

This is "Advance Publication Article".

Category: Paper

Received date: 2 December 2022

Accepted date: 16 April 2023

J-STAGE Advance publication date: 8 July 2023

Publication date: *****

Corresponding author:

DOI: 10.14953/jjsde.2022.2976

Copyright©2023 Japan Society for Design Engineering

モードⅡ荷重下における半だ円形表面き裂の応力拡大係数の分布を 正確に与える計算式

Convenient Formulas to Provide Accurate Stress Intensity Factor Distributions of a Semi-Elliptical Surface Crack Subjected to Shear Loading

高瀬 康*¹, 野田 尚昭*²
(Yasushi TAKASE) (Nao-Aki NODA)

Abstract

The stress intensity factor (SIF) of a semi-elliptical surface crack has been often used for evaluating the fatigue strength of structures. Previously accurate stress intensity factor distributions were analyzed along the crack front of a semi-elliptical surface crack by solving the hypersingular integral equation of the body force method. In this paper, to use the results conveniently, the accurate calculation formulas are provided by considering the solution of an elliptical cracks F_{IIE} , F_{III} and the corner point singularity the semi-elliptical surface crack F_{IISE} , F_{IIISE} . Regarding mode II SIF F_{IISE} , by applying the least squares method to the whole range of F_{IISE}/F_{IIE} , accurate formulas are proposed. Regarding mode III SIF F_{IIISE} , accurate formulas are proposed by applying the least squares method to F_{IIISE}/F_{III} in the range $\beta \geq 15^\circ$ but directly to F_{IIISE} in the range $\beta \leq 15^\circ$. The formulas proposed in this paper provides the stress intensity factors with better than 1.0% accuracy.

Key words

stress intensity factor, crack, approximate formula

* 1 正会員, 九州工業大学技術部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1),
takase.yasushi415@mail.kyutech.jp

* 2 正会員, 九州工業大学工学研究院(同上), nao592noda@gmail.com

1 緒言

圧力容器や一般の機械構造物の設計では、半だ円形表面き裂が進展して疲労破壊が生じ、最終破断も半だ円き裂から生じることを考慮することが多い。従って、それらの厳しさのパラメータである半だ円形表面き裂の応力拡大係数を設計に便利な形で与えることは、脆性破壊や疲労き裂の発生・進展を予測して設計するため極めて重要である^{1)~6)}。例えば最近後藤等は、半だ円形表面き裂の応力拡大係数の分布の解³⁾を用いて、超微細粒 Cu における傾斜疲労き裂の形成メカニズムを考察している^{4)~6)}。

著書らは先の研究^{3),7)}で、**図 1 (a)**に示す半無限体中の半だ円形表面き裂を、体積法の特異積分方程式として定式化した。そして、その未知関数を多項式と基本密度関数の積で近似する解析法を用いて、モード I~III の高精度の無次元化応力拡大係数 $F_{I\text{ISE}}$, $F_{II\text{ISE}}$, $F_{III\text{ISE}}$ (**図 1 (a)**参照)の分布を得た。また、**図 1 (a)**のモード I 型荷重を受ける場合の $F_{I\text{ISE}}$ の無次元化応力拡大係数の計算式を、実験に用いる際に便利なように b/a と自由表面からの角度であるパラメトリックアングル β (**図 1 (a)**参照)の関数として与えた⁸⁾。その際、形状比 $a/b \cong 1.2$ で $F_{I\text{ISE}}(\beta) \cong$ 一定となり、実際の疲労き裂がその形状比で進展することを明らかにした。一方、**図 1 (c)**に示す引張方向に対して α だけ傾いて生じた半だ円き裂に対しては、モード II, モード III の応力拡大係数も生じる⁹⁾。詳細な実験研究には、混合モード荷重下での表面き裂の応力拡大係数の正確な分布が必要となるが、それらは設計に便利な形では与えられていない。

そこで、本研究では**図 1 (c)**のモード II 型荷重を受ける場合の $F_{II\text{ISE}}$, $F_{III\text{ISE}}$ を研究対象として、半だ円き裂の形状比 b/a を変化させた場合の半だ円き裂における高精度で簡便な無次元化応力拡大係数 $F_{II\text{ISE}}$, $F_{III\text{ISE}}$ を求める計算式を提案する。なお、このような計算式の作成において、だ円のパラメトリックアングル $\beta \rightarrow 0^\circ$ の Corner Point では、半だ円き裂とだ円き裂の応力拡大係数分布¹⁰⁾が異なる挙動を示すことに注意する。これは、き裂前縁が自由表面と交差する Corner Point での応力特異性が、通常なき裂の特異性 $r^{-0.5}$ とは異なるため、その近傍の応力拡大係数分布が特異な挙動を示す^{11)~21)}ことが原因である。本研究では、このような特異挙動と、実用上の有用性を考慮して、 $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ の範囲で誤差 1%以内の正確な計算式を設計に便利な形で与えることを目標とする²²⁾。

2 Corner Point での応力特異性指数とその近傍での応力拡大係数

図 1に示す表面に垂直な半だ円き裂は、実際の欠陥の基本モデルとして使用されており、このような 3次元表面き裂では、き裂前縁が自由表面と交差する点は Corner Point と呼ばれ、この点での応力特異性は、通常なき裂の $r^{-0.5}$ とは異なることが、これまで議論されている³⁾。Corner Point からの距離として r を使用すると (**図 2** 参照)、逆対称変形 (モード II および III) の特異応力は $\sigma \propto r^{-p_A}$ と表され、 r が減少するにつれて、通常なき裂で定義される応力拡大係数は無限大になる。一方で、対称変形 (モード I) の特異応力は $\sigma \propto r^{-p_S}$ と表され、 r が減少するにつれて、通常なき裂で定義される応力拡大係数がゼロになる。

図 3 と **表 1** および **2** は、それぞれ Corner Point の特異性指数 p_S および p_A の値を示している^{20),23)~28)}。これらに示すように、特異性指数は、 $0 \geq v \geq 0.5$ の範囲のポアソン比に応じて、対称変形の場合は $0.5 \geq p_S \geq 0.332$ の範囲で、逆対称変形の場合は $0.5 \leq p_A \leq 0.646$ の範囲で変化する。**図 1 (a)**のモード I 型荷重を受ける場合では、Corner Point の特異性指数 p_S が 0.5 より小さいので、 $K_{I\text{ISE}}$ は、Corner Point ($\beta \rightarrow 0^\circ$)近傍で複雑な挙動を示し、自由表面の $\beta \rightarrow 0^\circ$ で最終的に $K_{I\text{ISE}} \rightarrow 0$ となる^{27),29)}。一方、**図 1 (a)**のモード II 型荷重を受ける場合では、Corner Point の特異性指数 p_A が 0.5 より大きいので、 $K_{II\text{ISE}}$, $K_{III\text{ISE}}$ は、自由表面の $\beta \rightarrow 0^\circ$ で最終的に $K_{II\text{ISE}} \rightarrow \infty$, $K_{III\text{ISE}} \rightarrow \infty$ となる。

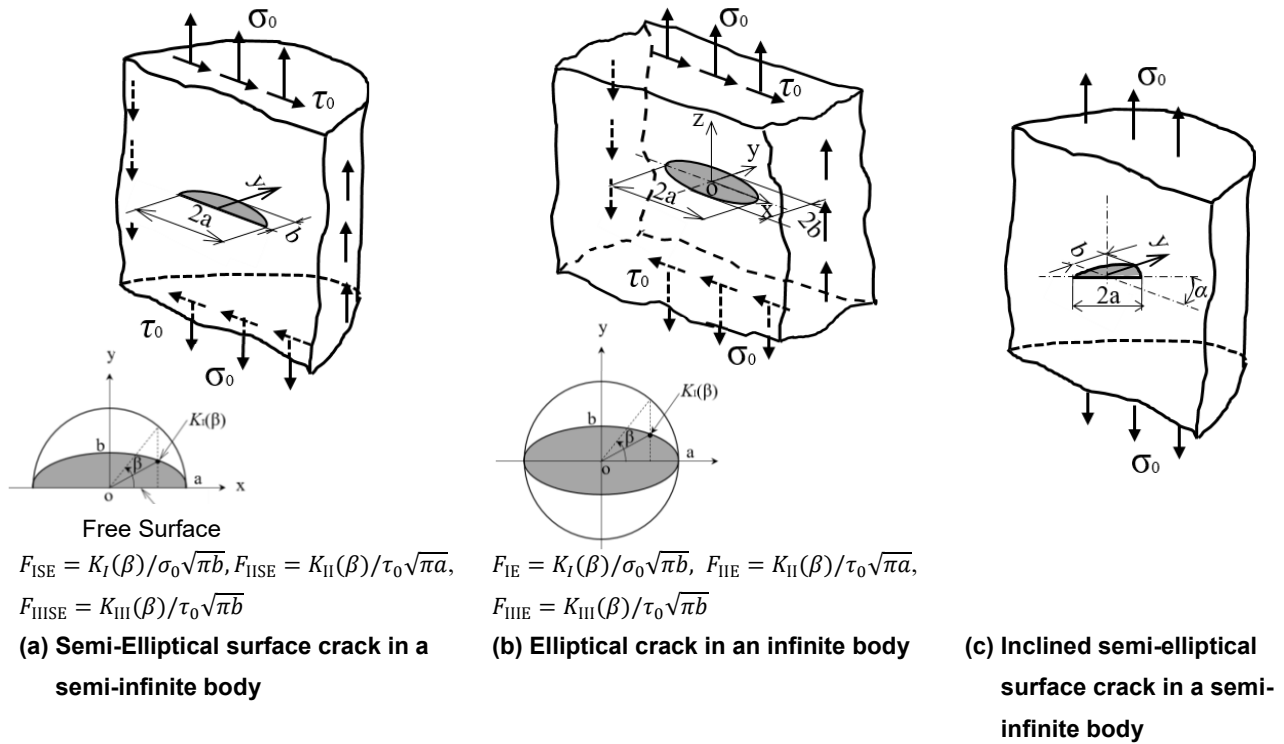


Fig. 1 Semi-Elliptical surface crack and elliptical crack

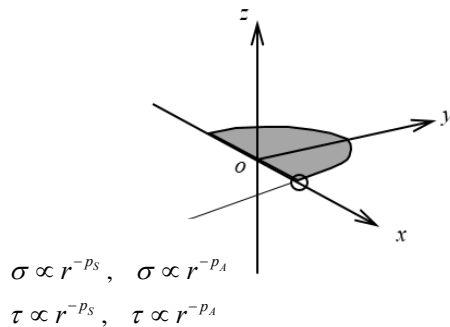


Fig. 2 Stress singularity at the corner point

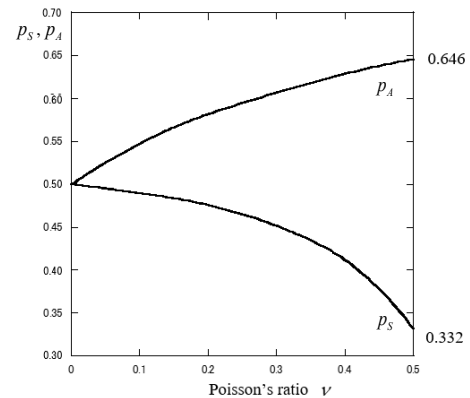


Fig. 3 Singular indices at the corner point

Table 1 Singular index p_s at the corner point, to express mode I deformation

ν	Ref.23)	Ref.24)	Ref.25)	Ref. 26)
0	0.5	0.49997		0.5002
0.1				0.4904
0.15	0.4836	0.4835	0.484	
0.2				0.4755
0.3	0.4523	0.4519	0.452	0.4523
0.4	0.4132	0.4141	0.413	0.4133
0.5	0.3318	0.3452		0.3316

Table 2 Singular index p_A at the corner point, to express mode II, III deformation

ν	Ref.24)	Ref. 25)
0	0.4999	
0.15		0.5668
0.565		
0.3		0.6073
0.598		
0.4		0.6286
0.604		
0.5	0.6462	

3 モードII荷重下における半だ円形表面き裂の応力拡大係数を与える計算式

3.1 F_{IIE} の計算式

表3に、 $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ の範囲で、き裂の形状比を $a/b=1.0, 1.33, 1.5, 2.0, 4.0$ に変化させた場合の体積力法

により求めた F_{IIE} の解析結果⁷⁾と、式(2)より求まるモードII荷重下における無次元化だ円形き裂の応力拡大係数 F_{IIE} の厳密解¹⁰⁾を示す。ここで、**図 1(b)**のだ円形き裂のモードI～IIIの無次元化応力拡大係数を、 F_{IE} 、 F_{IIE} 、 F_{III} とする。

$$K_{IE}(\beta) = \frac{\sigma_0}{E(k)} \left(\frac{\pi b}{a} \right)^{\frac{1}{2}} (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)^{\frac{1}{4}}, \quad F_{IE} = K_{IE}(\beta) / \sigma_0 \sqrt{\pi b},$$

$$\text{For } a \geq b, \quad k = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad \text{For } a < b, \quad k_1 = \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad E(k) = \frac{b}{a} E(k_1). \quad (1)$$

$$\text{For } a > b, \quad K_{IIE}(\beta) = \left(\frac{\pi b^3}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \times \frac{k^2 \tau_0 \sin \beta}{[(k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k)](b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta)^{\frac{1}{4}}}, \quad k = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k' = \frac{b}{a},$$

$$\text{For } a = b, \quad K_{IIE}(\beta) = \frac{4\tau_0 \sqrt{a} \sin \beta}{(2 - \nu) \sqrt{\pi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}}, \quad F_{IIE} = K_{IIE}(\beta) / \tau_0 \sqrt{\pi a}. \quad (2)$$

$$\text{For } a > b, \quad K_{III}(\beta) = (\pi b a)^{\frac{1}{2}} \times \frac{-(1 - \nu) k^2 \tau_0 \cos \beta}{[(k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k)](b^2 \sin^2 \beta + a^2 \cos^2 \beta)^{\frac{1}{4}}}, \quad k = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad k' = \frac{b}{a},$$

$$\text{For } a = b, \quad K_{III}(\beta) = \frac{4\tau_0 \sqrt{b} (1 - \nu) \cos \beta}{(2 - \nu) \sqrt{\pi}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}} d\phi, \quad K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{(1 - k^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{2}}},$$

$$F_{III} = K_{III}(\beta) / \tau_0 \sqrt{\pi b}. \quad (3)$$

表 3 より、両者の比 F_{IIE}/F_{IIE} は、 $F_{IIE}/F_{IIE} = 0.811 \sim 1.050$ の狭い範囲に分布している。このように F_{IIE} と F_{IIE} がほぼ等しいことから、直接 F_{IIE} に最小二乗法を適用せず、 F_{IIE}/F_{IIE} について最小二乗法を適用することにより、高精度の計算式を得ることができる²²⁾。ここで、Corner Point の近傍 $\beta \approx 0^\circ$ に注目すると、 F_{IIE}/F_{IIE} は、**表 2** に示すように $\beta = 0^\circ$ のCorner Point での特異性指数 $p_A = 0.646 > 0.5$ であり、通常なき裂より強い特異性となるので、 $\beta \rightarrow 0^\circ$ で $F_{IIE} \rightarrow \infty$ となるものと考えられる。しかし、この場合もCorner Pointの影響は局所的であり、 $\beta \approx 0^\circ$ 付近に限定される。従って、本論文で目標とする $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ 、 $1 \leq a/b \leq 4$ の範囲では、 $F_{IIE}/F_{IIE} = 0.811 \sim 1.050$ であり、Corner Pointの影響はそれほど大きくない。よって、 $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ の全範囲で、 F_{IIE}/F_{IIE} の比に対して計算式を作成することにする。ここでは、簡便で正確な計算式を作成するため、各々の計算式で、誤差 1%以内で、次数が最も少ない場合を計算式として求めている。そのような理由で、式(4.a)と式(4.b)の最高次数が異なっている。

表 3 の F_{IIE}/F_{IIE} の比に最小二乗法を適用して作成した計算式(4.a)、(4.b)を以下に示す。これらの計算式により求めた F_{IIE} の値は、 $a/b = 1.0 \sim 4.0$ の範囲で体積力法の F_{IIE} の値に対して誤差 0.70%以内の精度がある。

$1^\circ \leq \beta \leq 5^\circ$ ($\pi/180 \leq \beta \leq \pi/36$) の範囲($1.0 \leq a/b \leq 4.0$) :

$$\begin{aligned} \frac{F_{IIE}}{F_{IIE}} &= 0.75402 + 3.0009(b/a) - 7.6743(b/a)^2 + 7.7609(b/a)^3 - 2.7827(b/a)^4 \\ &+ [-0.11408 + 0.35575(b/a) - 1.8249(b/a)^2 + 2.9235(b/a)^3 - 1.3864(b/a)^4] \beta \\ &+ [0.045929 - 0.32963(b/a) + 1.1559(b/a)^2 - 1.5206(b/a)^3 + 0.65655(b/a)^4] \beta^2 \\ &+ [-0.004338 + 0.034715(b/a) - 0.11409(b/a)^2 + 0.14398(b/a)^3 - 0.060793(b/a)^4] \beta^3 \end{aligned} \quad (4.a)$$

Table 3 Stress intensity factor F_{IIE} , F_{IIE} and ratio of $F_{IIE}/F_{IIE}(a/b=1.0, 1.33, 1.5, 2.0, 4.0, \nu=0.3)$

β (°)	1.0					1.33					1.5				
	F_{IIE} (Ref.7))	F_{IIE} (Eqn (2))	$\frac{F_{IIE}}{F_{IIE}}$	Eqns (4.a), (4.b)	Error (%)	F_{IIE} (Ref.7))	F_{IIE} (Eqn (2))	$\frac{F_{IIE}}{F_{IIE}}$	Eqns (4.a), (4.b)	Error (%)	F_{IIE} (Ref.7))	F_{IIE} (Eqn (2))	$\frac{F_{IIE}}{F_{IIE}}$	Eqns (4.a), (4.b)	Error (%)
1	0.765	0.749	1.021	1.0203	-0.1027	0.780	0.7660	1.018	1.0166	-0.1605	0.779	0.7660	1.017	1.0159	-0.1090
2	0.744	0.749	0.993	0.9949	0.1634	0.745	0.7660	0.973	0.9762	0.3673	0.740	0.7660	0.966	0.9687	0.2688
3	0.733	0.748	0.980	0.9796	-0.0385	0.730	0.7650	0.954	0.9543	0.0041	0.723	0.7650	0.945	0.9446	-0.0574
4	0.726	0.747	0.972	0.9710	-0.0893	0.725	0.7640	0.949	0.9452	-0.3950	0.716	0.7630	0.938	0.9361	-0.2481
5	0.720	0.746	0.965	0.9590	-0.6401	0.718	0.7620	0.942	0.9408	-0.1577	0.713	0.7620	0.936	0.9348	-0.0927
6	0.715	0.745	0.960	0.9565	-0.3414	0.714	0.7600	0.939	0.9386	-0.0961	0.709	0.7600	0.933	0.9324	-0.0546
7	0.709	0.743	0.954	0.9542	-0.0069	0.710	0.7580	0.937	0.9365	-0.0171	0.704	0.7570	0.930	0.9301	0.0112
8	0.704	0.742	0.949	0.9521	0.3504	0.707	0.7560	0.935	0.9346	-0.0629	0.700	0.7550	0.927	0.9279	0.0847
9	0.700	0.740	0.946	0.9503	0.4561	0.702	0.7530	0.932	0.9328	0.0579	0.695	0.7510	0.925	0.9259	0.0526
10	0.696	0.738	0.943	0.9486	0.5852	0.697	0.7500	0.929	0.9312	0.1956	0.691	0.7480	0.924	0.9240	0.0254
20	0.6635	0.7038	0.943	0.9409	-0.1975	0.6479	0.7046	0.920	0.9203	0.0860	0.6342	0.6961	0.911	0.9110	-0.0082
30	0.6139	0.6486	0.947	0.9431	-0.3544	0.5826	0.6348	0.918	0.9166	-0.1225	0.5620	0.6202	0.906	0.9052	-0.1086
40	0.5453	0.5737	0.950	0.9487	-0.1900	0.5021	0.5475	0.917	0.9163	-0.0849	0.4779	0.5291	0.903	0.9027	-0.0598
50	0.4591	0.4814	0.954	0.9532	-0.0551	0.4111	0.4484	0.917	0.9166	-0.0199	0.3871	0.4294	0.901	0.9011	-0.0482
60	0.3580	0.3745	0.956	0.9545	-0.1479	0.3132	0.3416	0.917	0.9162	-0.0745	0.2925	0.3249	0.900	0.8991	-0.1261
70	0.2453	0.2562	0.957	0.9532	-0.4465	0.2108	0.2300	0.917	0.9146	-0.2045	0.1957	0.2177	0.899	0.8972	-0.1950
80	0.1247	0.1301	0.958	0.9518	-0.6950	0.1059	0.1156	0.916	0.9129	-0.3447	0.0980	0.1091	0.898	0.8968	-0.1611
90	0	0	0.960	0.9556	-0.4621	0	0	0.916	0.9131	-0.3159	0	0	0.903	0.9010	-0.2237

β (°)	2.0					4.0				
	F_{IIE} (Ref.7))	F_{IIE} (Eqn (2))	$\frac{F_{IIE}}{F_{IIE}}$	Eqns (4.a), (4.b)	Error (%)	F_{IIE} (Ref.7))	F_{IIE} (Eqn (2))	$\frac{F_{IIE}}{F_{IIE}}$	Eqns (4.a), (4.b)	Error (%)
1	0.779	0.7500	1.039	1.0382	-0.0459	0.668	0.6360	1.050	1.0499	-0.0439
2	0.732	0.7490	0.977	0.9786	0.1283	0.627	0.6340	0.989	0.9892	0.0230
3	0.707	0.7480	0.945	0.9454	0.0183	0.597	0.6300	0.948	0.9483	0.0749
4	0.696	0.7460	0.933	0.9308	-0.2366	0.576	0.6240	0.923	0.9226	-0.0501
5	0.689	0.7430	0.927	0.9272	-0.0124	0.560	0.6170	0.908	0.9031	-0.4960
6	0.684	0.7400	0.924	0.9238	-0.0592	0.547	0.6100	0.897	0.8974	0.0746
7	0.679	0.7370	0.921	0.9205	-0.0864	0.535	0.6010	0.890	0.8919	0.1982
8	0.673	0.7330	0.918	0.9174	-0.0820	0.524	0.5920	0.885	0.8868	0.1857
9	0.666	0.7280	0.915	0.9144	-0.0449	0.513	0.5820	0.881	0.8819	0.0489
10	0.659	0.7230	0.911	0.9116	0.0132	0.501	0.5710	0.877	0.8772	-0.0210
20	0.5817	0.6541	0.889	0.8901	0.0865	0.3912	0.4645	0.842	0.8428	0.0686
30	0.4964	0.5650	0.879	0.8776	-0.1145	0.3086	0.3735	0.826	0.8247	-0.1843
40	0.4094	0.4699	0.871	0.8704	-0.1019	0.2434	0.2978	0.817	0.8165	-0.0976
50	0.3241	0.3742	0.866	0.8658	-0.0341	0.1881	0.2313	0.813	0.8135	0.0275
60	0.2410	0.2794	0.863	0.8624	-0.0132	0.1381	0.1702	0.811	0.8125	0.1338
70	0.1597	0.1857	0.860	0.8599	-0.0153	0.0909	0.1121	0.811	0.8124	0.1844
80	0.0798	0.0927	0.861	0.8588	-0.2410	0.0455	0.0557	0.817	0.8137	-0.3947
90	0	0	0.861	0.8610	0.0006	0	0	0.817	0.8186	0.1932

$5^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ($\pi/36 \leq \beta \leq \pi/2$) の範囲 ($1.0 \leq a/b \leq 4.0$):

$$\begin{aligned} \frac{F_{IISE}}{F_{IIE}} = & 0.82882 + 0.82452(b/a) - 2.0801(b/a)^2 + 2.2124(b/a)^3 - 0.81022(b/a)^4 \\ & + [-0.014481 + 0.041673(b/a) - 0.069413(b/a)^2 + 0.067052(b/a)^3 - 0.028828(b/a)^4]\beta \\ & + [0.00072004 - 0.004082(b/a) + 0.010009(b/a)^2 - 0.010829(b/a)^3 + 0.0043336(b/a)^4]\beta^2 \\ & + [-1.2656 \times 10^{-5} + 8.5432 \times 10^{-5}(b/a) - 0.00022474(b/a)^2 + 0.0002508(b/a)^3 - 0.00010094(b/a)^3]\beta^3 \\ & + [7.5027 \times 10^{-8} - 5.4711 \times 10^{-7}(b/a) + 1.4828 \times 10^{-6}(b/a)^2 - 1.6798 \times 10^{-6}(b/a)^3 \\ & + 6.7892 \times 10^{-7}(b/a)^4]\beta^4 \end{aligned} \quad (4.b)$$

図4に作成した計算式(4.a), (4.b)の値を示す。図5は、 $F_{IISE}(\beta)$ を示したものである。図5より、 $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, $a/b=1.0 \sim 4.0$ の範囲では、 $\beta = 0^\circ$ でそれぞれ F_{IISE} の最大値が生じる。また、 $\beta = 0^\circ$ 付近では Corner Point の特異性の影響を受けるため、だ円と半だ円の違いは大きくなる (図4)。すなわち、 K_{IISE} は、Corner Point ($\beta = 0^\circ$) の自由表面で最終的に $K_{IISE} \rightarrow \infty$ となる^{27), 29)}。

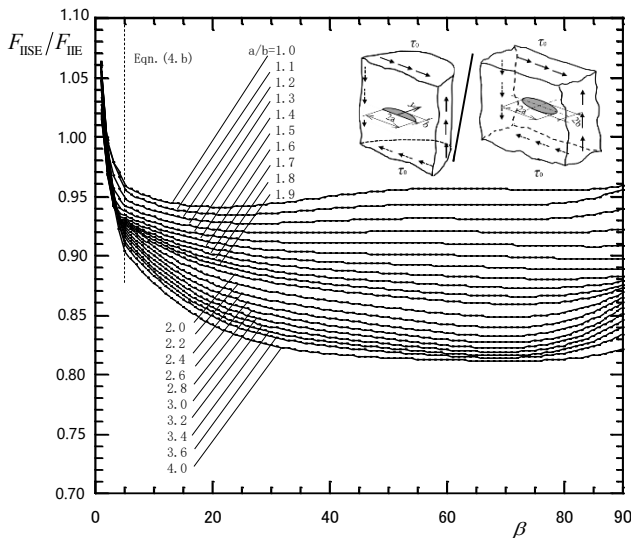


Fig. 4 Curves of F_{IISE}/F_{IIE} given by the approximate formulas

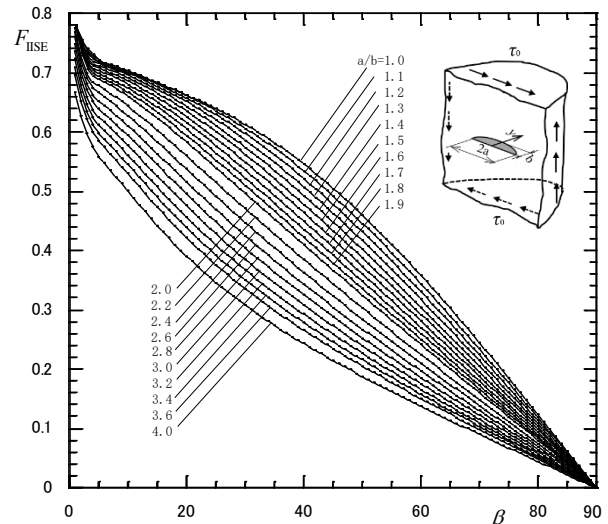


Fig. 5 Stress intensity factor F_{IISE} of semi-elliptical surface crack

3.2 F_{IISE} の計算式

表4に、 F_{IISE} の解析結果⁷⁾と、式(3)より求まる F_{IIE} の厳密解¹⁰⁾を示す。表4より、両者の比 F_{IISE}/F_{IIE} は、 $F_{IISE}/F_{IIE} = 1.006 \sim 31.6$ とかなり広い範囲に分布している。ここで、Corner Point の近傍 $\beta \approx 0^\circ$ に注目すると、表2に示すように $\beta = 0^\circ$ の Corner Point での特異性指数 $p_A = 0.646 > 0.5$ であり、通常なき裂より強い特異性となるので、 $\beta \rightarrow 0^\circ$ で $F_{IISE} \rightarrow \infty$ となるものと考えられる。この F_{IISE} は F_{ISE} , F_{IIE} とは異なり、Corner Point の影響が大きく表れているように見える (例えば、表4で $\beta = 1^\circ \sim 3^\circ$ のとき、 $F_{IISE}/F_{IIE} > 10$)。しかし、その原因を見ると、表4では F_{IISE} の $\beta \approx 0^\circ$ の変化はそれほど大きくない。すなわち、この場合は対称性より $\beta \rightarrow 0^\circ$ で $F_{IIE} \rightarrow 0$ となる。これによって、本論文で目標とする $1^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$ では、 $F_{IISE}/F_{IIE} = 1.12 \sim 31.6$ と広い範囲に存在する。したがって、 β の小さい範囲に F_{IISE}/F_{IIE} を使用するとむしろ大きな誤差が生じる。そこで、 F_{IISE} の計算式の作成に関しては、 β が小さい範囲に、直接 F_{IISE} に最小二乗法を適用することとする。具体的には、 $1^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$ では、 F_{IISE} の値を用い、 $15^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ では、 F_{IISE}/F_{IIE} の比で計算式を作成する。

表4に示す $1^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$ の範囲の F_{IISE} の値に、直接最小二乗法を適用して作成した計算式(5.a)ならびに、

Table 4 Stress intensity factor $F_{III\text{SE}}$, $F_{III\text{E}}$ and ratio of $F_{III\text{SE}}/F_{III\text{E}}$ ($a/b=1.0, 1.33, 1.5, 2.0, 4.0, \nu=0.3$)

$\beta(^{\circ})$	1.0						1.33					1.5					
	$F_{III\text{SE}}$ (Ref.7)	$F_{III\text{E}}$ (Eqn.(3))	$\frac{F_{III\text{SE}}}{F_{III\text{E}}}$	Eqns (5.a), (5.b)	Error (%)		$F_{III\text{SE}}$ (Ref.7)	$F_{III\text{E}}$ (Eqn.(3))	$\frac{F_{III\text{SE}}}{F_{III\text{E}}}$	Eqns (5.a), (5.b)	Error (%)		$F_{III\text{SE}}$ (Ref.7)	$F_{III\text{E}}$ (Eqn.(3))	$\frac{F_{III\text{SE}}}{F_{III\text{E}}}$	Eqns (5.a), (5.b)	Error (%)
1	0.284	0.009	31.556	0.2832	-0.2725		0.302	0.0120	25.167	0.3014	-0.1933		0.307	0.0140	21.929	0.3068	-0.0595
2	0.238	0.018	13.222	0.2394	0.5864		0.251	0.0250	10.040	0.2520	0.4141		0.257	0.0280	9.179	0.2572	0.0882
3	0.216	0.027	8.000	0.2166	0.2985		0.227	0.0370	6.135	0.2274	0.1561		0.232	0.0420	5.524	0.2321	0.0532
4	0.208	0.037	5.622	0.2070	-0.4682		0.219	0.0500	4.380	0.2184	-0.2618		0.223	0.0560	3.982	0.2230	-0.0106
5	0.206	0.046	4.478	0.2047	-0.6534		0.220	0.0620	3.548	0.2185	-0.6613		0.224	0.0700	3.200	0.2233	-0.3067
6	0.206	0.055	3.745	0.2054	-0.2735		0.223	0.0750	2.973	0.2229	-0.0254		0.229	0.0840	2.726	0.2285	-0.2316
7	0.206	0.064	3.219	0.2068	0.3933		0.228	0.0870	2.621	0.2285	0.2290		0.235	0.0980	2.398	0.2353	0.1436
8	0.206	0.073	2.822	0.2075	0.7150		0.233	0.0990	2.354	0.2336	0.2448		0.242	0.1110	2.180	0.2421	0.0460
9	0.207	0.082	2.524	0.2071	0.0574		0.237	0.1110	2.135	0.2375	0.2060		0.248	0.1250	1.984	0.2480	0.0151
10	0.208	0.091	2.286	0.2062	-0.8793		0.242	0.1230	1.967	0.2405	-0.6167		0.254	0.1380	1.841	0.2532	-0.3307
20	0.2509	0.1793	1.399	1.4141	1.0536		0.3129	0.2393	1.308	1.3166	0.6903		0.3381	0.2660	1.271	1.2782	0.5643
30	0.3108	0.2621	1.186	1.1780	-0.6556		0.3926	0.3420	1.148	1.1433	-0.4047		0.4255	0.3760	1.132	1.1275	-0.3634
40	0.3716	0.3370	1.103	1.1027	0.0009		0.4655	0.4288	1.086	1.0854	-0.0192		0.5022	0.4662	1.077	1.0768	-0.0374
50	0.4273	0.4016	1.064	1.0703	0.5927		0.5266	0.4987	1.056	1.0600	0.3850		0.5648	0.5373	1.051	1.0544	0.3084
60	0.4739	0.4540	1.044	1.0443	0.0485		0.5743	0.5521	1.040	1.0403	0.0096		0.6127	0.5908	1.037	1.0371	0.0016
70	0.5088	0.4927	1.033	1.0297	-0.2865		0.6082	0.5897	1.031	1.0286	-0.2727		0.6464	0.6280	1.029	1.0267	-0.2479
80	0.5305	0.5163	1.028	1.0331	0.5483		0.6284	0.6120	1.027	1.0295	0.2620		0.6663	0.6499	1.025	1.0274	0.2135
90	0.5370	0.5243	1.024	1.0234	-0.0826		0.6348	0.6194	1.025	1.0235	-0.1283		0.6730	0.6571	1.024	1.0220	-0.2110

$\beta(^{\circ})$	2.0						4.0				
	$F_{III\text{SE}}$ (Ref.7)	$F_{III\text{E}}$ (Eqn.(3))	$\frac{F_{III\text{SE}}}{F_{III\text{E}}}$	Eqns (5.a), (5.b)	Error (%)		$F_{III\text{SE}}$ (Ref.7)	$F_{III\text{E}}$ (Eqn.(3))	$\frac{F_{III\text{SE}}}{F_{III\text{E}}}$	Eqns (5.a), (5.b)	Error (%)
1	0.311	0.0180	17.278	0.3113	0.0971		0.245	0.0310	7.903	0.2454	0.1826
2	0.267	0.0370	7.216	0.2662	-0.3142		0.244	0.0620	3.935	0.2431	-0.3878
3	0.242	0.0550	4.400	0.2423	0.1237		0.245	0.0920	2.663	0.2448	-0.0886
4	0.233	0.0910	2.560	0.2333	0.1238		0.250	0.1220	2.049	0.2507	0.2782
5	0.234	0.0910	$a/b \cdot 2.571$	0.2341	0.0273		0.260	0.1510	1.722	0.2606	0.2172
6	0.241	0.1090	2.211	0.2408	-0.0935		0.274	0.1790	1.531	0.2739	-0.0250
7	0.251	0.1090	2.303	0.2506	-0.1466		0.291	0.2070	1.406	0.2902	-0.2874
8	0.262	0.1440	1.819	0.2618	-0.0919		0.309	0.2330	1.326	0.3085	-0.1586
9	0.273	0.1620	1.685	0.2730	0.0148		0.328	0.2580	1.271	0.3282	0.0489
10	0.284	0.1790	1.587	0.2840	-0.0107		0.348	0.2820	1.234	0.3483	0.0862
20	0.3974	0.3333	1.192	1.1974	0.4243		0.5090	0.4734	1.075	1.0775	0.2163
30	0.5003	0.4567	1.095	1.0923	-0.2893		0.6269	0.6039	1.038	1.0367	-0.1339
40	0.5836	0.5520	1.057	1.0568	-0.0400		0.7157	0.6997	1.023	1.0230	0.0098
50	0.6484	0.6244	1.038	1.0408	0.2297		0.7836	0.7719	1.015	1.0164	0.1210
60	0.6969	0.6776	1.028	1.0284	-0.0123		0.8343	0.8254	1.011	1.0109	0.0155
70	0.7305	0.7143	1.023	1.0211	-0.1569		0.8697	0.8624	1.008	1.0077	-0.0796
80	0.7505	0.7358	1.020	1.0216	0.1613		0.8906	0.8843	1.007	1.0077	0.0609
90	0.7566	0.7429	1.018	1.0170	-0.1371		0.8970	0.8915	1.006	1.0056	-0.0559

$15^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ の範囲の $F_{\text{IIISE}}/F_{\text{IIIIE}}$ の比に最小二乗法を適用して作成した計算式(5.b)を以下に示す. これらの計算式により求めた F_{IIISE} の値は, $a/b=1.0\sim 4.0$ の範囲で体積力法の F_{IIISE} の値に対して誤差 1.0%以内の精度がある.

$1^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$ ($\pi/180 \leq \beta \leq \pi/12$) の範囲($1.0 \leq a/b \leq 4.0$):

$$\begin{aligned}
 F_{\text{IIISE}} = & -0.27209 + 3.3695(b/a) - 6.2961(b/a)^2 + 5.1954(b/a)^3 - 1.6383(b/a)^4 \\
 & + [0.23536 - 1.4621(b/a) + 2.3717(b/a)^2 - 1.7884(b/a)^3 + 0.54852(b/a)^4]\beta \\
 & + [-0.033483 + 0.18208(b/a) - 0.1872(b/a)^2 + 0.076744(b/a)^3 - 0.01615(b/a)^4]\beta^2 \\
 & + [0.0023605 - 0.0075409(b/a) - 0.0093679(b/a)^2 + 0.019907(b/a)^3 - 0.0077304(b/a)^4]\beta^3 \\
 & + [-7.3948 \times 10^{-5} - 3.7927 \times 10^{-5}(b/a) + 0.0014716(b/a)^2 - 0.0019481(b/a)^3 + 0.00070752(b/a)^4]\beta^4 \\
 & + [7.9301 \times 10^{-7} + 5.9261 \times 10^{-6}(b/a) - 3.9674 \times 10^{-5}(b/a)^2 + 4.7752 \times 10^{-5}(b/a)^3 \\
 & - 1.7016 \times 10^{-5}(b/a)^4]\beta^5
 \end{aligned} \tag{5.a}$$

$15^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ ($\pi/12 \leq \beta \leq \pi/2$) の範囲($1.0 \leq a/b \leq 4.0$):

$$\begin{aligned}
 F_{\text{IIISE}}/F_{\text{IIIIE}} = & 0.83931 + 2.2047(b/a) + 0.72668(b/a)^2 - 0.2876(b/a)^3 \\
 & + [0.014972 - 0.1954(b/a) - 0.0052608(b/a)^2 - 0.015714(b/a)^3]\beta \\
 & + [-0.00059058 + 0.0073697(b/a) - 0.0015559(b/a)^2 + 0.0016657(b/a)^3]\beta^2 \\
 & + [1.1462 \times 10^{-5} - 0.00013795(b/a) + 5.3974 \times 10^{-5}(b/a)^2 - 4.5724 \times 10^{-5}(b/a)^3]\beta^3 \\
 & + [-1.0855 \times 10^{-7} + 1.2625 \times 10^{-6}(b/a) - 6.7493 \times 10^{-7}(b/a)^2 + 5.2074 \times 10^{-7}(b/a)^3]\beta^4 \\
 & + [3.9866 \times 10^{-10} - 4.4908 \times 10^{-9}(b/a) + 2.9252 \times 10^{-9}(b/a)^2 - 2.1409 \times 10^{-9}(b/a)^3]\beta^5
 \end{aligned} \tag{5.b}$$

図6に作成した計算式(5.a), (5.b)の値を示す. 図7は, $F_{\text{IIISE}}(\beta)$ を示したものである. 図7より, $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$, $a/b=1.0\sim 4.0$ の範囲では, $\beta = 90^\circ$ でそれぞれ F_{IIISE} の最大値が生じる. また, $\beta = 0^\circ$ 付近では Corner Point の特異性の影響を受けるため, $F_{\text{IIISE}} \rightarrow \infty$ となるが, 対称性より $F_{\text{IIIIE}} \rightarrow 0$ となるため, だ円と半だ円の違いは非常に大きくなる(図6). すなわち, K_{IIISE} は, Corner Point ($\beta = 0^\circ$) の自由表面で最終的に $K_{\text{IIISE}} \rightarrow \infty$ となる.

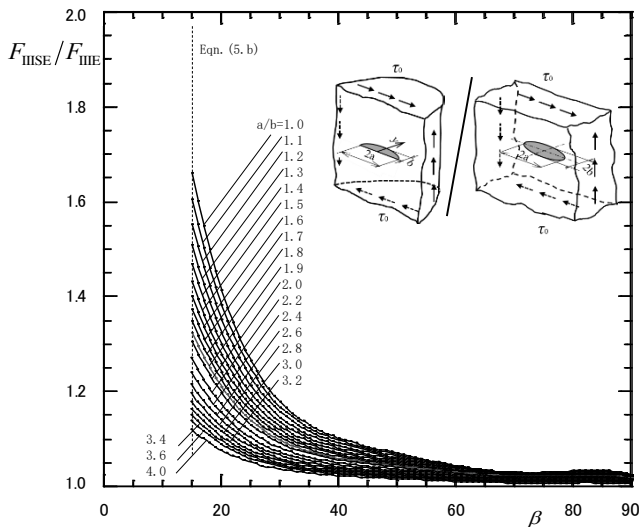


Fig. 6 Curves of $F_{\text{IIISE}}/F_{\text{IIIIE}}$ given by the approximate formulas

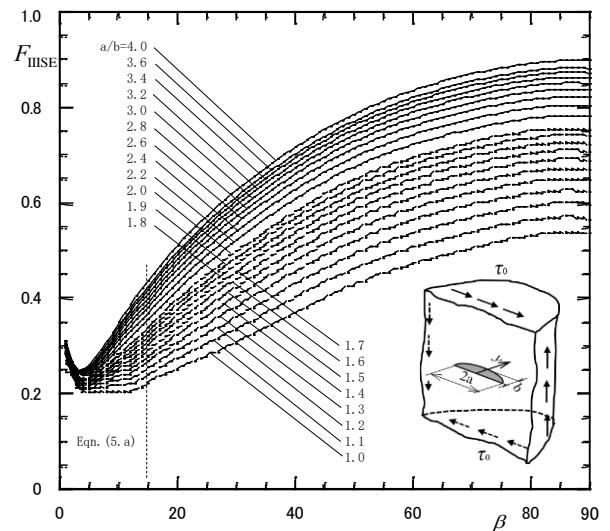


Fig. 7 Stress intensity factor F_{IIISE} of semi-elliptical surface crack

4 結論

構造物の疲労破壊は、半だ円表面き裂が進展して生じ、最終破断も半だ円き裂から生じることが多い。従って、半だ円表面き裂の応力拡大係数を設計に便利な形で与えることは、極めて重要である。本研究では、モード II 型荷重を受ける場合の無次元化応力拡大係数分布の計算式 (F_{IISE}, F_{IIISE}) を正確に求めた。特に、 F_{IISE}, F_{IIISE} の値にほぼ等しい無限体中のだ円板状き裂の厳密解⁸⁾に注目した。但し、パラメトリックアングル $\beta \rightarrow 0^\circ$ の Corner Point において、両者は異なる挙動を示すので、本研究では、そのことを考慮し、 $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ の範囲で正確な計算式を作成した。得られた結論は、以下の通りである。

(1) せん断荷重を受けるモード II 型無次元化応力拡大係数 F_{IISE} では、 $\beta = 0^\circ$ の Corner Point での特異性指数 $p_A = 0.607 > 0.5$ であり、 $\beta \rightarrow 0^\circ$ で $F_{IISE} \rightarrow \infty$ となる。しかし、Corner Point の影響は局所的である。よって、 $1^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ の全範囲で、 F_{IISE}/F_{IIIE} の比に注目して誤差 1% 以内の計算式を作成した (図 1 (a), (b), 表 3)。

(2) せん断荷重を受けるモード III 型無次元化応力拡大係数 F_{IIISE} では、 $\beta = 0^\circ$ の Corner Point での特異性指数 $p_A = 0.607 > 0.5$ であり、 $\beta \rightarrow 0^\circ$ で $F_{IIISE} \rightarrow \infty$ となる。この場合は F_{IISE} とは異なり、Corner Point の影響が大きく表れている。しかし、その原因を調べると、対称性より $\beta \rightarrow 0^\circ$ で $F_{IIIIE} \rightarrow 0$ となることで、 $1^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$ では、 $F_{IIISE}/F_{IIIIE} = 1.12 \sim 31.6$ と広い範囲に存在することがわかる。そこで、 β が小さい範囲 $1^\circ \leq \beta \leq 15^\circ$ では、直接 F_{IIISE} の値を用い、 $15^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ では、 F_{IIISE}/F_{IIIIE} の比に注目して誤差 1% 以内の計算式を作成した (図 1 (a), (b), 表 4)。

謝辞

本研究を遂行するに当たり、計算式作成の一部にご尽力とご助言を賜りました鄭州大学 陳棟博士に心からお礼申し上げます。

参考文献

- 1) Gopalakrishnan, K. and Mecholsky, J.J.: Quantitative Fractography of Mixed-Mode Fracture in an R-Curve Material, *J. Materials Science*, 48 (2013), 7081.
- 2) Levesque, G. and Arakere, N.K.: Empirical Stress Intensity Factors for Surface Cracks under Rolling Contact Fatigue, *Tribology Transactions*, 53, 4 (2010), 621.
- 3) Noda, N-A. and Kagita, M.: Variations of Stress Intensity Factors of a Semi-Elliptical Surface Crack Subjected to Mode I, II, III Loading, *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 81 (2004), 635.
- 4) Goto, M., Han, S.Z., Ahn, J.H., Yakushiji, T., Euh, K., Kim, S.S. and Lee, J.: The Role of Mixed-Mode Deformation at the Crack Tip on Shear Banding and Crack Propagation of Ultrafine-Grained Copper, *Int. J. Fatigue*, 66 (2014), 220.
- 5) Goto, M., Han, S.Z., Yamamoto, T., Kitamura, J., Ahn, J.H., Yakushiji, T., Kim, S.S. and Lee, J.: Formation Mechanism of Inclined Fatigue-Cracks in Ultrafine-grained Cu Processed by Equal Channel Angular Pressing, *Int. J. Fatigue*, 92 (2016), 577.
- 6) Goto, M., Yamamoto, T., Han, S.Z., Kim, S., Ahn, J-H., Kitamura, J., Iwamura, T. and Lee, J.: Crack Growth Rate of Inclined and Deflected Surface-Cracks in Round-Bar Specimens of Copper Processed by Equal Channel Angular Pressing under Cyclic Loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 182 (2017), 100.
- 7) Noda, N-A., Kihara, T. and Beppu, D.: Variation of Stress Intensity Factor of a Semi-Elliptical Surface Crack Subjected to Mixed Mode Loading, *Int. J. Fracture*, 127 (2004), 167.

- 8) Takase, Y. and Noda, N-A.: Convenient and Accurate Formulas for Stress Intensity Factor Distribution of Semi-Elliptical Surface Crack, *Int. J. Modern Physics B*, 35 (2021), 14.
- 9) He, M.Y. and Hutchinson, J.W.: Surface Crack Subject to Mixed Mode Loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 65 (2000), 1.
- 10) Irwin, G.R.: Crack-Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate, *Transactions of the ASME, J. Applied Mechanics*, 29, 1 (1962), 651.
- 11) Bazant, Z.P.: Three-Dimensional Harmonic Functions near Termination or Intersection of Gradient Singularity Line: a General Numerical Method, *Int. J. Engineering Science*, 12 (1974), 221.
- 12) Bazant, Z.P. and Estenssoro, L.F.: General Numerical Method for Three-Dimensional Singularities in Cracked or Notched Elastic Solids, *Proc. the 4th International Conference of Fracture*, 3 (1977), 371.
- 13) Benthem, J.P.: On an Inversion Theorem for Conical Regions in Elasticity Theory, *J. Elasticity*, 9 (1979), 159.
- 14) Fujitani, Y.: Analysis of the Stress Singular Solution in the Three-Dimensional Surface Crack Problem by Rayleigh-Ritz Method, *Bulletin of Hiroshima University*, 28 (1980), 129.
- 15) Barsoum, R.S.: Application of the Finite Element Iterative Method to the Eigenvalue Problem of a Crack between Dissimilar Media, *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 25 (1988), 541.
- 16) Nakamura, T. and Parks, D.M.: Three-Dimensional Elastic Stress Field near the Crack Front of a Thin Elastic Plate, *J. Applied Mechanics*, 55 (1988), 805.
- 17) Nakamura, T. and Parks, D.M.: Anti-Symmetrical 3 D Stress Field near the Crack Front of a Thin Elastic Plate, *Int. J. Solids and Structures*, 25 (1989), 1411.
- 18) Ghahremani, F. and Shih, C.F.: Corner Singularities of Three-Dimensional Planar Interface Crack, *J. Applied Mechanics*, 59 (1992), 61.
- 19) Pook, L.P.: A Note on Corner Point Singularities, *Int. J. Fracture*, 53 (1992), R3.
- 20) Pook, L.P.: Some Implications of Corner Point Singularities, *Engineering Fracture Mechanics*, 48 (1994), 367.
- 21) Dhondt, G.: On Corner Point Singularities along a Quarter Circular Crack Subject to Shear Loading, *Int. J. Fracture*, 89 (1998), L33.
- 22) 野田尚昭, 高瀬康 : 設計に活かす切欠き・段付き部の材料強度, 日刊工業新聞社, (2010).
- 23) Benthem, J.P.: State of Stress at the Vertex of Crack in a Half-Space, *Int. J. Solids Structure*, 13 (1977), 479.
- 24) Benthem, J.P.: The Quarter-Infinite Crack in a Half Space; Alternative and Additional Solutions, *Int. J. Solids Structure*, 16 (1980), 119.
- 25) Bazant, Z.P. and Estenssoro, L.F.: Surface Singularity and Crack Propagation, *Int. J. Solids Structure*, 15 (1979), 405.
- 26) 高久田和夫: き裂先端近傍における応力の特異性, 日本機械学会論文集A編, 50, 454 (1984), 1193.
- 27) 村上敬宜, 棗浩志: モードII負荷を受ける三次元き裂のCorner Point Singularity, 日本機械学会論文集A編, 66, 652 (2000), 2211.
- 28) 大塚昭夫, 東郷敬一郎, 吉田誠: 混合モード三次元き裂の疲労き裂進展挙動に関する研究 (第2報, せん断負荷を受ける半だ円表面き裂からの疲労き裂進展挙動), 日本機械学会論文集A編, 54, 505 (1988), 1735.
- 29) 野田尚昭, 木原利彰, 別府大輔: 特異積分方程式法による混合モード負荷を受ける半だ円表面き裂の応力拡大係数の分布の解析, 日本機械学会論文集A編, 67, 661 (2001), 1542.