

半だ円形円周切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中*

村上敬宜**, 野田尚昭***, 西谷弘信****

Yukitaka MURAKAMI, Naoaki NODA, Iironobu NISITANI

1. 緒言

円周切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中を精度よく決定することは、直接設計に用いられる場合のほか、強度研究用の試験片においても重要である。解決を要求されている問題でありながら、解析的に厳密解を求めることは極めて困難であるため、ノイバー⁽¹⁾は三角則という便法によって近似値を与えた。これをもとにした、Peterson⁽²⁾や西田⁽³⁾の応力集中線図は設計や研究によく用いられている。しかし、最近になって、有限要素法による計算⁽⁴⁾⁽⁵⁾や、ひずみゲージによる実験⁽⁶⁾、あるいは解析的方法⁽⁷⁾⁽⁸⁾によって、ノイバーの三角則による値には無視できない程度の誤差があるのではないかという指摘があり、この問題に正しい解決を与える必要が生じてきている。最近発達した有限要素法によれば、原理的にはすべての場合の近似値を得ることが可能であり、高精度の値を得る方法⁽⁹⁾も提案されているが、実際には、各種の寸法の組合せに対して系統的な値を計算するには不向きであるため、依然としてノイバーの三角則による値が用いられている。

本研究では各種の寸法の組合せに対して系統的な応力集中の値を得るため体積力法⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾によってこの問題を解き、設計や研究に役立つ高精度の応力集中係数表と線図を作成した。半円切欠きを有する丸棒については、長谷川⁽⁹⁾が体積力の働く円柱のグリーン関数を用いて同様の解析を行っている。その方法の特徴は体積力を境界条件を与える境界(注目境界)に連続的に分布させるのではなく、その境界から離れた曲面のいくつかの点(着力点)を選んで集中的に作用させるのであるが、計算精度に及ぼす力の離散的作用および注目境界と着力点の相互位置関係の影響を十分考慮する必要が生じてくる。本研究では、体積力を境界条件を与える境界そのものにそって連続的に分布させて

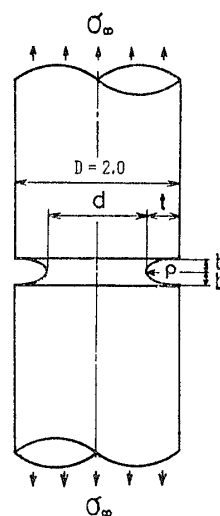
いるが、この方法によれば、これまでの著者らの研究の蓄積によって高精度が期待できる。

本研究で計算した結果は、だ円状切欠きにとどまらず、切欠き半径と深さをそろえれば、V形やU形切欠きなどの一般の切欠きの応力集中の評価にも応用できることは等価だ円の概念⁽¹²⁾から理解できるであろう。

2. 計算理論

体積力法を三次元軸対称問題に適用する方法は、さきの円周き裂に関する論文⁽¹³⁾の方法とほぼ同様であるが、半だ円形円周切欠きの部分で、法線方向の応力(σ_n)と接線方向の応力(τ_l)に関する二つの境界条件を満たさなければならないので、実際に解を得るのはかなり困難になる。

無限体中の一点に集中力が作用する場合の応力場⁽¹⁴⁾を基本とし、その基本解の強さ(すなわち体積力の密度)を調整して境界上に分布させ、無限体中から図1のような境界条件を満たす丸棒を得る。はじめに無限体中に図2のようなドーナツ状空どうとなるべき面を考え境界に体積力を分布させる。そのとき丸棒の円周縁となるべき円筒面($r=a_0$)には半径方向の



半だ円形の長半径 $a=t$, 短半径 b , 切欠き半径 $\rho=b^2/a$
図1 引張りを受ける半だ円形円周切欠きを有する丸棒

* 昭和54年10月13日 第57期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和54年12月3日。

** 正員、九州工業大学(〒804 北九州市戸畑区仙水町1)。

*** 学生員、九州工業大学大学院。

**** 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎町)。

垂直応力 (σ_r) とせん断応力 (τ_{rz}) が生じる。側面における境界条件を満たすには、無限に長い丸棒表面に力がリング状にかかる場合の解法⁽¹⁵⁾を利用する。結局、切欠き部分における σ_n , τ_t と外周での σ_r , τ_{rz} を同時に打ち消すように体積力 (切欠き部分) と表面力 (外周) の大きさを決める。これらの力の大きさは、閉じた形では求まらないので、切欠き部分 (n_1 分割) と外周の部分 (n_2 分割) を分割して、切欠き部分では区間の注目点で、外周では分割点で境界条件を満たした。外周の z 軸方向の分割は、切欠き近くでは細分し遠くでは粗い分割にして、計算結果に事実上影響しなくなるところまで z 軸方向の長さ (直径の約 2 倍) をとった。また境界条件を満たしやすくするため補助的につけ加える AC' 部分も同様に n_1 分割して、AC 部分と対にした体積力を分布させる (図 2)。その場合、AC および A'C 部分の区間は C の側から番号を 1 から n_1 までつけ、AC' および A'C' の部分は逆に C' のほうから番号をつけ、AC 部分と同じ番号のものを対にして取扱った。このようにすれば丸棒表面で打ち消すべきせん断応力 τ_{rz} をあらかじめ小さくしておくことができる。

以上述べたことをまとめて数式で表現するために次のように各応力および関数 f_{pj} , f_{qj} を定義する。

σ_{ri}^{pj} , σ_{zi}^{pj} , τ_{rzi}^{pj} ; σ_{ri}^{qj} , σ_{zi}^{qj} , τ_{rzi}^{qj} : ドーナツ状境界の j 番めの区間に、 r 方向に作用する z 方向単位長さ当たりの密度 $p_j=1$ (z 方向に作用する r 方向単位長さ当たりの密度 $q_j=1$) の体積力を分布させたとき、ドーナツ状境界の i 番めの区間の注目点に生じる各応力 ($\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$)。このとき j 番めとは AC, AC', A'C, A'C' の j 番めの区間をまとめていい、 i 番めの区間とは AC 部分だけの i 番めの区間をいう。

$\sigma_r^{pj}(z)$, $\tau_{rz}^{pj}(z)$; $\sigma_r^{qj}(z)$, $\tau_{rz}^{qj}(z)$: ドーナツ状境

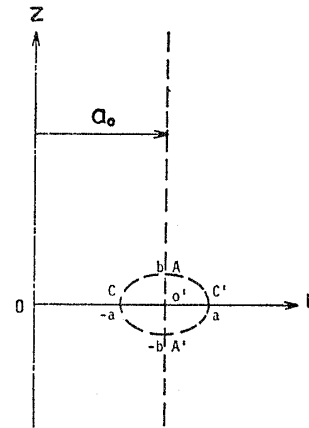


図 2 無限体中に想定したドーナツ状空どう

界の j 番めの区間に、 r 方向の密度 $p_j=1$ (z 方向の密度 $q_j=1$) の体積力を分布させたとき、円柱表面 ($r=a_0$) の $z=z$ に生ずる σ_n および τ_{rz} 。

σ_{ri}^P , σ_{zi}^P , τ_{rzi}^P ; σ_{ri}^Q , σ_{zi}^Q , τ_{rzi}^Q : 円柱表面の $z=z$ の点に r 方向に強さ $P=1$ (z 方向に強さ $Q=1$) なる集中力の輪を作用させたとき、ドーナツ状境界の i 番めの区間の注目点に生じる各応力 ($\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$)。

f_{pj}, f_{qj} : ドーナツ状境界で連続であるべき r 方向 (z 方向) の体積力の密度を $j=1 \sim n_1$ の階段状の値で近似したときの j 番めの区間の値。この値は境界条件を表す連立方程式中の $2n_1$ 個の未知数となる。

$\sigma_{ni}^{pj}, \tau_{ti}^{pj}$; $\sigma_{ni}^{qj}, \tau_{ti}^{qj}$: ドーナツ状境界の j 番めの区間に、 r 方向の密度 $p_j=1$ (z 方向の密度 $q_j=1$) を作用させたとき、円柱表面 ($r=a_0$) が自由表面であるという条件を満たしながら、ドーナツ状境界の i 番めの区間の注目点に生じる法線方向の応力 σ_n および接線方向の応力 τ_t 。

前に述べたことから、 $\sigma_{ni}^{pj}, \tau_{ti}^{pj}$; $\sigma_{ni}^{qj}, \tau_{ti}^{qj}$ は、 σ_{ni}^{pj} を例にとると次のように表すことができる (他も同様)。

$$\begin{aligned} \sigma_{ni}^{pj} = & \left[\sigma_{ri}^{pj} + \int_b^\infty \{ \sigma_{ri}^P \sigma_r^{pj}(z) + \sigma_{ri}^Q \tau_{rz}^{pj}(z) \} dz + \int_{-\infty}^{-b} \{ \sigma_{ri}^P \sigma_r^{pj}(z) + \sigma_{ri}^Q \tau_{rz}^{pj}(z) \} dz \right] \cos^2 \theta_1 \\ & + \left[\sigma_{zi}^{pj} + \int_b^\infty \{ \sigma_{zi}^P \sigma_r^{pj}(z) + \sigma_{zi}^Q \tau_{rz}^{pj}(z) \} dz + \int_{-\infty}^{-b} \{ \sigma_{zi}^P \sigma_r^{pj}(z) + \sigma_{zi}^Q \tau_{rz}^{pj}(z) \} dz \right] \sin^2 \theta_1 \\ & + 2 \left[\tau_{rzi}^{pj} + \int_b^\infty \{ \tau_{rzi}^P \sigma_r^{pj}(z) + \tau_{rzi}^Q \tau_{rz}^{pj}(z) \} dz + \int_{-\infty}^{-b} \{ \tau_{rzi}^P \sigma_r^{pj}(z) + \tau_{rzi}^Q \tau_{rz}^{pj}(z) \} dz \right] \cos \theta_1 \sin \theta_1 \\ & \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

なお、上式で積分記号中の $\sigma_{ri}^P \sigma_r^{pj}(z)$ などのように積の形で入っているものは、応力を打ち消すように σ_{ri}^P の符号を決めるものとする。また、 θ_1 はドーナツ状境界の i 番めの区間の注目点において外向き法線と r 軸がなす角である。

式 (1) の積分を含む項の積分範囲は b (図 1 参照) から ∞ となっているが、さきに述べたように計算結果に事実上影響しなくなるところで打ち切る。

ドーナツ状境界の i 番めの区間の注目点において $\sigma_n=0$, $\tau_t=0$ という境界条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r^{p,j*} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} Bt \{ (1-2\nu)A_0 - 3A_1 \} \frac{b}{a} \xi d\psi \\
 \sigma_z^{p,j*} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} Bt \{ (1-2\nu)A_4 - 3(z-\zeta)^2 A_5 \} \frac{b}{a} \xi d\psi \\
 \tau_{rz}^{p,j*} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} Bt \{ (1-2\nu)A_6 - 3A_7 - 3A_8 \} (z-\zeta) \frac{b}{a} \xi d\psi \\
 \sigma_r^{q,j*} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} Ct \{ (1-2\nu)W_1 - 3W_5 \} (z-\zeta) \frac{a}{b} \eta d\psi \\
 \sigma_z^{q,j*} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} -Ct \{ (1-2\nu)(z-\zeta)W_1 + 3(z-\zeta)^3 W_2 \} \frac{a}{b} \eta d\psi \\
 \tau_{rz}^{q,j*} &= \int_{\psi_{j1}}^{\psi_{j2}} Ct \{ -(1-2\nu)rW_1 - 3(z-\zeta)^2 rW_2 + (1-2\nu)tI_1 + 3(z-\zeta)^2 tI_2 \} \frac{a}{b} \eta d\psi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $A_0 \sim A_8$, $W_0 \sim W_5$, $I_0 \sim I_2$ は次のように表される。

$$W_0 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2}} = \frac{4F}{\{(t+r)^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2}} \dots\dots\dots (7)$$

$$W_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{3/2}} = \frac{k^3}{2(rt)^{3/2}} \frac{1}{1-k^2} E \dots\dots\dots (8)$$

$$W_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{5/2}} = \frac{k^5}{24(rt)^{5/2}(1-k^2)} \left\{ \frac{2(2-k^2)}{1-k^2} E - F \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$W_5 = \int_0^{2\pi} \frac{(r-t \cos \varphi)^2}{\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{5/2}} d\varphi = C_1 W_0 + C_2 W_1 + C_3 W_2 \dots\dots\dots (10)$$

ただし、

$$C_1 = \frac{1}{4r^2}, \quad C_2 = \frac{r^2 - t^2 - (z-\zeta)^2}{2r^2}, \quad C_3 = \frac{\{r^2 - t^2 - (z-\zeta)^2\}^2}{4r^2} \dots\dots\dots (11)$$

$$k = 2 \left\{ \frac{rt}{(t+r)^2 + (z-\zeta)^2} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (12)$$

F , E は第 1 種および第 2 種の完全だ円積分である。

$$F = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \dots\dots\dots (13)$$

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2}} d\varphi = -\frac{2}{rt} \{(t+r)^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2} E + \frac{2}{rt} \frac{r^2 + t^2 + (z-\zeta)^2}{\{(t+r)^2 + (z-\zeta)^2\}^{1/2}} F \dots\dots\dots (14)$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{3/2}} d\varphi = \frac{1}{t} \left(\frac{\partial W_0}{\partial r} + rW_1 \right) \dots\dots\dots (15)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{\{R^2 + (z-\zeta)^2\}^{5/2}} d\varphi = \frac{1}{3t} \left(\frac{\partial W_1}{\partial r} + 3rW_2 \right) \dots\dots\dots (16)$$

$$A_0 = \frac{t^2 + (z-\zeta)^2}{r} I_1 - \frac{1}{r} I_0 - tW_1 \dots\dots\dots (17)$$

$$A_1 = \frac{1}{4r} I_0 + \frac{r^2 - t^2 - (z-\zeta)^2}{2r} I_1 + \frac{\{r^2 - t^2 - (z-\zeta)^2\}^2}{4r} I_2 - tW_5 \dots\dots\dots (18)$$

$$A_4 = rI_1 - tW_1 \dots\dots\dots (19)$$

$$A_5 = rI_2 - tW_2 \dots\dots\dots (20)$$

$$A_6 = -I_1 \dots\dots\dots (21)$$

$$A_7 = \frac{1}{4r^2} I_0 + \frac{r^2 - t^2 - (z-\zeta)^2}{2r^2} I_1 + \frac{\{r^2 - t^2 - (z-\zeta)^2\}^2}{4r^2} I_2 \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{aligned}
 A_8 = & -trW_2 + t^2 I_2 + \frac{1}{4rt} W_0 - \frac{r^2 + t^2 + (z-\zeta)^2}{2rt} W_1 + \frac{\{r^2 + t^2 + (z-\zeta)^2\}^2}{4rt} W_2 \\
 & - \frac{1}{4r^2} I_0 + \frac{r^2 + t^2 + (z-\zeta)^2}{2r^2} I_1 - \frac{\{r^2 + t^2 + (z-\zeta)^2\}^2}{4r^2} I_2 \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned}$$

式 (6) の段階で回転だ円体状空かの基礎式が得られる。式 (6) において $\xi = a \cos \psi + a_0$, $\eta = \sin \psi$ なる変換を行えば、ドーナツ状空どうとなるべき境界上に体積力を分布させたときの式が得られる。図 2 における

AC, A'C, AC', A'C' の対応する j 番めの区間

$$\left\{ \phi = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2n_1} (j-1) \sim \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2n_1} j \right.$$

および

$$\left. \phi = \frac{3}{2} \pi \pm \frac{\pi}{2n_1} (j-1) \sim \frac{3}{2} \pi \pm \frac{\pi}{2n_1} j \right\}$$

について ϕ に関する積分を実行し, i 番めの区間の注目点の座標

$$\left\{ r = a \cos \phi_i + a_0, \quad z = b \sin \phi_i; \quad \phi_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n_1} (i-0.5) \right\}$$

を代入すれば, 2章で定義した $\sigma_{ri}^{pj} \sim \tau_{rzi}^{qj}$ が求まる. また注目点の座標として $r=a_0, z=z_0$ を代入すれば $\sigma_r^{pj}(z) \sim \tau_{rz}^{qj}(z)$ が求まる.

3.2 $\sigma_{ri}^P, \sigma_{zi}^P, \tau_{rzi}^P; \sigma_{ri}^Q, \sigma_{zi}^Q, \tau_{rzi}^Q$ の導出 $\sigma_{ri}^P \sim \tau_{rzi}^Q$ は, 図4に示すように, 無限に長い丸棒の円筒面 ($r=a_0, z=z_0$) に強さ 1 なる集中力の輪を r 方向および z 方向 ($P=1, Q=1$) に作用させたとき, i 番めの注目点における各応力を意味している. Rankin が焼きばめ応力の問題に用いた方法⁽¹⁵⁾ によって次のように導出される.

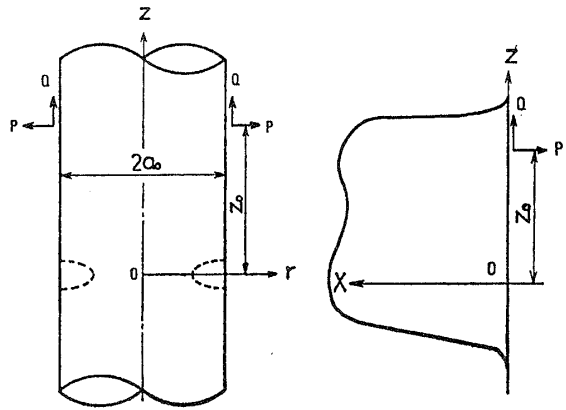


図4 丸棒表面に作用する集中力の輪 図5 半無限板の縁に作用する集中力

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ri}^P &= \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{f_1(\eta)}{D(\eta)} \cos \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta, & \sigma_{zi}^P &= \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta}{a_0} \frac{f_2(\eta)}{D(\eta)} \cos \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \\ \tau_{rzi}^P &= \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta^2}{a_0} \frac{f_3(\eta)}{D(\eta)} \sin \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta, & \sigma_{ri}^Q &= \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{g_1(\eta)}{D(\eta)} \sin \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \\ \sigma_{zi}^Q &= \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta}{a_0} \frac{g_2(\eta)}{D(\eta)} \sin \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta, & \tau_{rzi}^Q &= \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a_0} \frac{g_3(\eta)}{D(\eta)} \cos \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

$$\left. \begin{aligned} D(\eta) &= \{\eta^2 + 2(1-\nu)\} I_1^2(\eta) - \eta^2 I_0^2(\eta) \\ f_1(\eta) &= -\frac{\eta^2 r}{a_0} I_0(\eta) I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) + \eta I_0(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) - \frac{\eta r}{a_0} I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) I_1(\eta) \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{\eta r}{a_0}\right)^2 + 2(1-\nu) \right\} I_1(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) \\ f_2(\eta) &= \eta I_0(\eta) I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) - 2I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) I_1(\eta) - \frac{\eta r}{a_0} I_1(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) \\ f_3(\eta) &= I_0(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) - \frac{r}{a_0} I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) I_1(\eta) \\ g_1(\eta) &= -\left\{ \left(\frac{\eta r}{a_0}\right)^2 + (1-2\nu) \right\} I_0(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) + \frac{r}{a_0} \{(1-2\nu) + \eta^2\} I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) I_1(\eta) \\ &\quad + \eta \left\{ \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 - 1 \right\} I_1(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) \\ g_2(\eta) &= 3I_0(\eta) I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) + \frac{\eta r}{a_0} I_0(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) \\ &\quad - \left\{ 2(2-\nu) \frac{1}{\eta} + \eta \right\} I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) I_1(\eta) - \frac{r}{a_0} I_1(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) \\ g_3(\eta) &= -\frac{\eta^2 r}{a_0} I_0(\eta) I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) - \eta I_0(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) \\ &\quad + \frac{\eta r}{a_0} I_0\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) I_1(\eta) + \{\eta^2 + 2(1-\nu)\} I_1(\eta) I_1\left(\frac{\eta r}{a_0}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

I_0, I_1 : 第1種変形ベッセル関数

フーリエ積分の形で与えられた式 (24) は, そのまま数値積分すると良い精度が得られないので, 図5 ($x=a_0-r$ とする) に示すような半無限板の縁に集中力が直角方向および接線方向に作用する場合の応力の式をフー

リエ積分の形に表した次式を利用した。

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r^P &= \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a_0} \left\{ 1 + \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \exp \left\{ - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \cos \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \\
 \sigma_z^P &= \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a_0} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \exp \left\{ - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \cos \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \\
 \tau_{rz}^P &= - \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a_0} \left\{ \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \exp \left\{ - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \sin \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \\
 \sigma_r^Q &= - \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a_0} \left\{ \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \exp \left\{ - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \sin \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \\
 \sigma_z^Q &= - \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a_0} \left\{ 2 - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \exp \left\{ - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \sin \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta \\
 \tau_{rz}^Q &= \frac{Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{a_0} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \exp \left\{ - \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \eta \right\} \cos \left\{ \frac{\eta(z-z_0)}{a_0} \right\} d\eta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

式(24)と式(26)は同形で表されているから、対応する各式の差について数値積分を行い、これに式(26)の閉じた形の積分値を加える。このようにすれば数値積分によって計算される部分は極めて小さくなり精度を上げることができる。積分範囲は0~∞となっているが実際には計算精度に事実上影響しなくなるところで打ち切る。

3.3 応力集中部における極限操作 最大応力は体積力を分布する境界上(切欠き底)に生じるので、式(5)の特異性から、切欠き底近傍に分布した体積力の最大応力におよぼす効果は特別に求める必要がある。このため切欠き底の二次元的広がりをもつ一部の境界について、境界から離れた点の影響を求め、それを境界上に近づける極限操作を行う。このほかに、切欠き部分を m 分割して各区間から注目点(境界条件を満たす点)への影響を求める際に、注目点と同じ区間に分布した体積力 ($i=j$ の場合) の影響についても

同様な計算を行った。

図6に示すように、 rz 平面に半径 $\rho=1$ の微小円弧 ($\xi^2 + \eta^2 = 1$) を考え、その $2\varepsilon_0$ の部分 $\widehat{CC'}$ (rz 平面に垂直方向は土単位長さをとるものとする) に r 方向および z 方向の体積力 p_0, q_0 が分布している場合を考える。 \widehat{CD} 上の任意の点 $B(\xi, \eta)$ に作用する力 $p_0|d\eta|$ および $q_0|d\xi|$ による、点 $A(b, 0)$ における応力は、無限体中の一点に集中力が作用する場合の任意の点の応力の式⁽¹⁴⁾によって求めることができる。結果の誘導は二次元の場合の極限操作⁽¹⁰⁾と類似であるが、異なるのは体積力の影響の計算が二重積分となることである。結果だけ示すと、点 A における z 方向の応力 $\sigma_{zA}^{p_0}, \sigma_{zA}^{q_0}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 1 \\ \varepsilon_0 \rightarrow \pi/2}} \sigma_{zA}^{p_0} &= - \frac{\nu}{2(1-\nu)} p_0 \\
 \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 1 \\ \varepsilon_0 \rightarrow \pi/2}} \sigma_{zA}^{q_0} &= \frac{\{3 + \nu/(1-\nu)\} \varepsilon_0}{2\pi} q_0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

だ円境界 ($\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 = 1$) に体積力を分布した場合の影響も、切欠き底の近傍を円弧とみなして式(27)の結果を利用する。そのとき式(27)第2式の ε_0 を図3に示す ϕ で表すことが実際の計算上必要となる。切欠き底における曲率半径は $\rho = b^2/a$ であるの

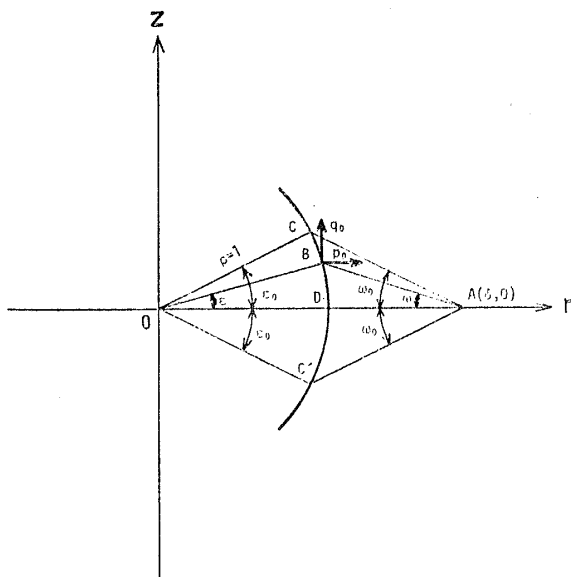


図6 応力集中部における極限操作(半円切欠きの場合)

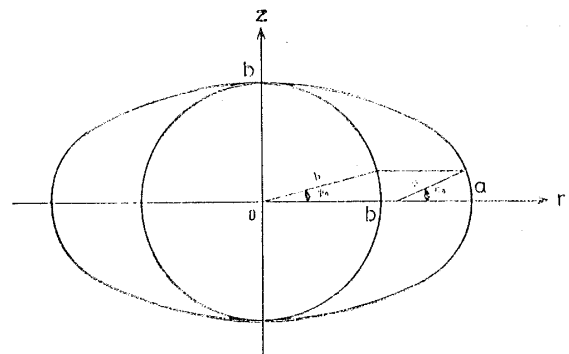


図7 だ円形切欠きの場合の極限操作における ε_0 と ϕ の関係

で, 図 7 に示すように,

$$\rho \sin \varepsilon_0 = b \sin \phi_0 \quad \therefore \varepsilon_0 = \frac{a}{b} \phi_0 \dots \dots \dots (28)$$

式 (28) を式 (27) に代入して,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z^{p_0} &= -\frac{\nu}{2(1-\nu)} p_0 \\ \sigma_z^{q_0} &= \frac{3+\nu/(1-\nu)}{2\pi} \frac{a}{b} \phi_0 q_0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

切欠き底近傍に分布した体積力の最大応力におよぼす効果は, 図 7 の ϕ_0 を十分小さくすることによって式 (29) で表すことができる. それに伴って 3・1 節で述べた ϕ に関する Simpson 則による数値積分を細かく行う.

4. 計算結果

3 章までの手順によって応力集中を求めるプログラムを作成した. 計算にあたって, Simpson 則による数値積分を行う必要があるが, 分割数や積分範囲は計算結果にほとんど影響しなくなる数値をあらかじめ調

べて決定したものをを用いた. 実際に積分を実行する範囲および分割数の例を表 1 に示す. これは図 1 で $\rho = t = 0.1$ の場合である. 他の形状についても, ほぼこれと同様な分割で計算を行った. 以下の結果は, すべて切欠き深さ t と切欠き半径 ρ の値との関連でまとめているが, これらの寸法は半だ円形の長短半径 a, b とは $t = a, \rho = b^2/a$ の関係がある.

図 1 の形状について切欠き部分の分割数 n_1 を変えて計算した例を表 2 に示す. $K_t(n_1)$ は分割数 n_1 での応力集中係数である. $K_t(\infty)$ は $n_1 = 16, 24$ の場合の結果からの外そう値を意味する. 表 2 からわかるように n_1 を変えても K_t の変化は少なく高精度が予想される. 本研究では, 以下に示すすべての計算結果について表 2 と同様な精度の検討を行った. それによると, 本計算の精度は誤差 1% 以内と考えてよいように思う.

表 3, 4 も図 1 の形状について切欠き半径 ρ と切欠き深さ t を変えて計算した結果である. これらの値の

表 1 数値積分の範囲と分割数の例 ($\rho = t = 0.1, D = 2.0$ の場合)

数 値 積 分 の 種 類	実際の積分範囲	分割数	備 考
式 (1) における $z = b \sim \infty$ (あるいは $z = -b \sim -\infty$) の範囲の積分	$z = b \sim 2D$	60	切欠きに近いところで細かく分割
式 (24) と式 (26) の差についての, $\eta = 0 \sim \infty$ の範囲の積分	$\eta = 0 \sim 80$	約 250	被積分関数の変化の大きい範囲 ($0 \leq \eta \leq 10$) で細かく分割
図 2 に示す $\phi = \phi_{j1} \sim \phi_{j2}$ の範囲の積分	注目点と着力区間が一致する場合 ($i = j$ のとき)	60	ϕ について等分割
	注目点と着力区間が一致しない場合 ($i \neq j$ のとき)	6	
最小断面における平均応力および応力分布を求めるための r 方向の分割	$r = 0 \sim d/2$ (d は最小断面の直径)	16	切欠き底近くの応力集中を考慮して $r = 0 \sim (d/2 - \rho)$ の範囲で 8 分割 $r = (d/2 - \rho) \sim d/2$ の範囲で 8 分割

表 2 分割数 n_1 の変化による応力集中係数 $K_t(n_1)$ の変化

ρ	t	$K_t(6)$	$K_t(8)$	$K_t(12)$	$K_t(16)$	$K_t(24)$	$K_t(\infty)$
1/9	1/9	2.476 7	2.477 7	2.484 5	2.491 8	2.501 1	2.520
0.2	0.2	2.204 4	2.205 1	2.206 4	2.206 9	2.206 1	2.204

表 3 半円切欠きを有する丸棒の応力集中係数 $K_t(\rho = t = a = b)$

ρ, t	著 者 ら	菊川ら ⁽⁶⁾	佐藤ら ⁽⁵⁾	半沢ら ⁽⁷⁾	桜井ら ⁽¹⁶⁾	長谷川 ⁽⁸⁾	ノイバー
0.05	2.78	—	—	—	—	2.842	2.74
0.1	2.56	—	—	—	—	2.593	2.48
1/9	2.52	2.58	2.57	—	—	—	2.42
4/29	2.42	2.45	—	—	—	—	2.29
0.2	2.20	2.24	2.21	2.199	—	2.191	2.05
0.3	1.91	—	—	—	—	1.871	1.75
1/3	1.82	1.78	1.80	1.780	1.89	—	1.67
0.4	1.66	—	—	—	—	1.608	1.54
0.5	1.45	1.43	1.44	1.420	—	1.411	1.38
0.6	1.29	—	—	—	—	1.270	1.27
2/3	1.21	1.22	—	—	—	1.200	1.21
0.8	1.10	—	—	—	—	1.101	1.11
0.9	1.05	—	—	—	—	1.046	1.05

ほとんどは $m=16\sim 24$ の場合の結果から外そうして得たものである。半円状切欠き(表3)については、参考のためノイバーの三角則による値とともに、長谷川⁽⁶⁾および半沢ら⁽⁷⁾の計算値、菊川らの実験値⁽⁶⁾、佐藤ら⁽⁵⁾および桜井ら⁽¹⁶⁾の有限要素法による計算値をのせた。長谷川の計算値はほぼ著者らの値と一致しており、また菊川らの値はひずみゲージを用いた実験値であるが、かなり精度が良い。また表4からノイバーの三角則による値は、切欠き深さ t の広範囲にわたって、10%程度の危険側の誤差を含むことがわかる。

図8は表3の結果を図示したものである。 $2\rho/D \rightarrow 0$ に従って半無限板の半円切欠きの厳密解 $K_t = 3.065$ ⁽¹⁷⁾ に、また $2\rho/D \rightarrow 1$ に従って $K_t = 1$ にそれぞれ無理なく一致する。参考のためノイバーの三角則による値と、石田による両側に半円切欠きを有する帯板の値⁽¹⁷⁾をのせた。

図9~11は、表4の結果をもとに、任意形状の円

周切欠きについて応力集中係数を与える線図を作成したもので、設計や研究に役立つ高い精度をもつものである。図9に示されるように、ノイバーの三角則によ

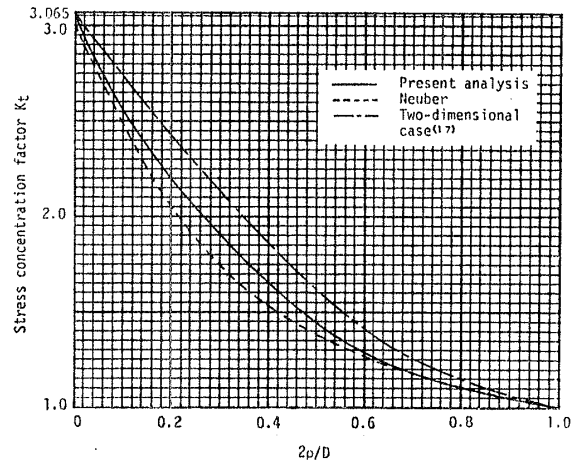


図8 半円切欠きを有する丸棒の応力集中係数

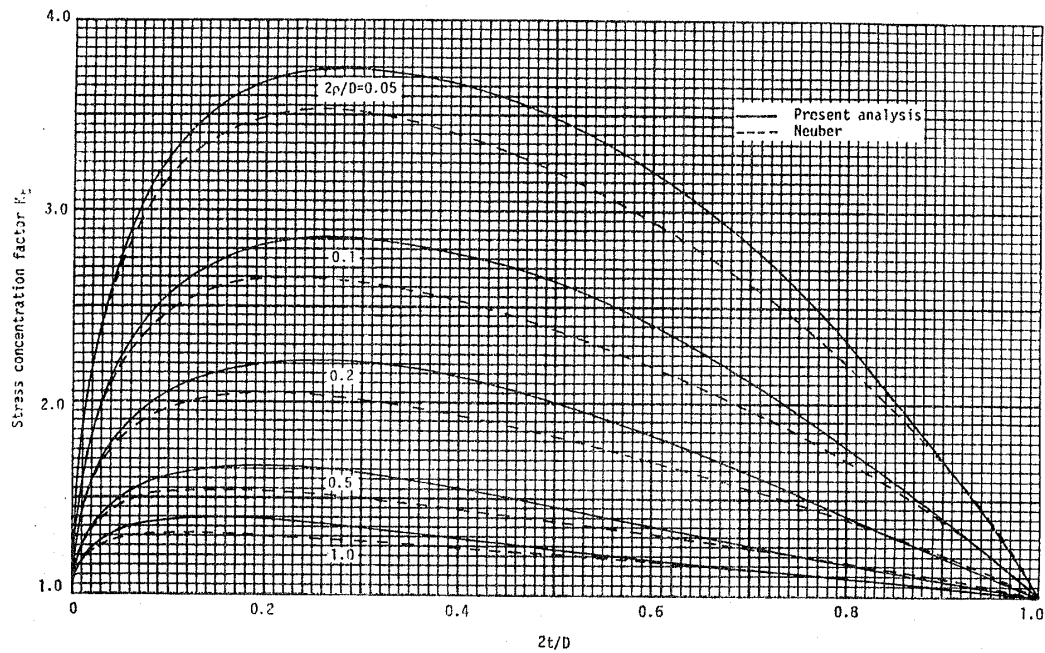


図9 半円切欠きを有する丸棒の応力集中係数(破線はノイバーの三角則)

表4 半円切欠きを有する丸棒(図1)の応力集中係数 $K_t(t=a, \rho=b^2/a)$

t	$\rho=0.05$		$\rho=0.1$		$\rho=0.2$		$\rho=0.5$		$\rho=1.0$	
	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー	著者ら	ノイバー
0.05	2.78	2.74	2.23	2.20	1.84	1.81	1.50	1.46	1.33	1.29
0.1	3.28	3.18	2.56	2.48	2.05	1.97	1.61	1.53	1.38	1.31
0.2	3.67	3.49	2.82	2.64	2.20	2.05	1.67	1.53	1.39	1.30
0.3	3.74	3.51	2.85	2.62	2.21	2.01	1.63	1.50	1.34	1.27
0.4	3.66	3.39	2.77	2.53	2.13	1.93	1.56	1.44	1.29	1.24
0.5	3.43	3.20	2.63	2.38	1.99	1.82	1.45	1.38	1.23	1.21
0.6	3.20	2.94	2.40	2.19	1.83	1.70	1.36	1.32	1.18	1.17
0.7	2.83	2.61	2.12	1.97	1.63	1.55	1.25	1.24	1.13	1.13
0.8	2.32	2.21	1.77	1.70	1.41	1.39	1.16	1.17	1.09	1.09
0.9	1.71	1.71	1.38	1.39	1.20	1.21	1.08	1.09	1.04	1.04

る値には $2t/D$ の広い範囲にわたって無視できない誤差が存在する。

図 12~14 は, 最小断面における切欠き底断面近傍の応力分布を調べたものである。縦軸には, 引張方向応力 σ_z を切欠き底の最大応力 σ_{max} で無次元化したもの, 横軸には切欠き底から内部方向の距離 x を切欠き半径 ρ で無次元化したものをとっている。これらの図から, 切欠き半径 ρ が一定なら切欠き深さ t が広い範囲に変わっても切欠き底近くの応力分布はほとんど変化しないことがわかる。また切欠き底での応力こう

配 λ は, ほとんどすべての場合について $\lambda \cong 2/\rho$ であることがわかる。応力分布または応力こう配が ρ によってほぼ決定されるということは, 材料の疲労限度の寸法効果 (または切欠き効果) が主として切欠き半径 ρ の寸法を通じて現れることを意味しており, 極めて重要な意味をもっている⁽¹⁰⁾。

5. 結 言

本研究では体積法を三次元軸対称問題に適用し, 半円状円周切欠きを有する種々の形状の丸棒につい

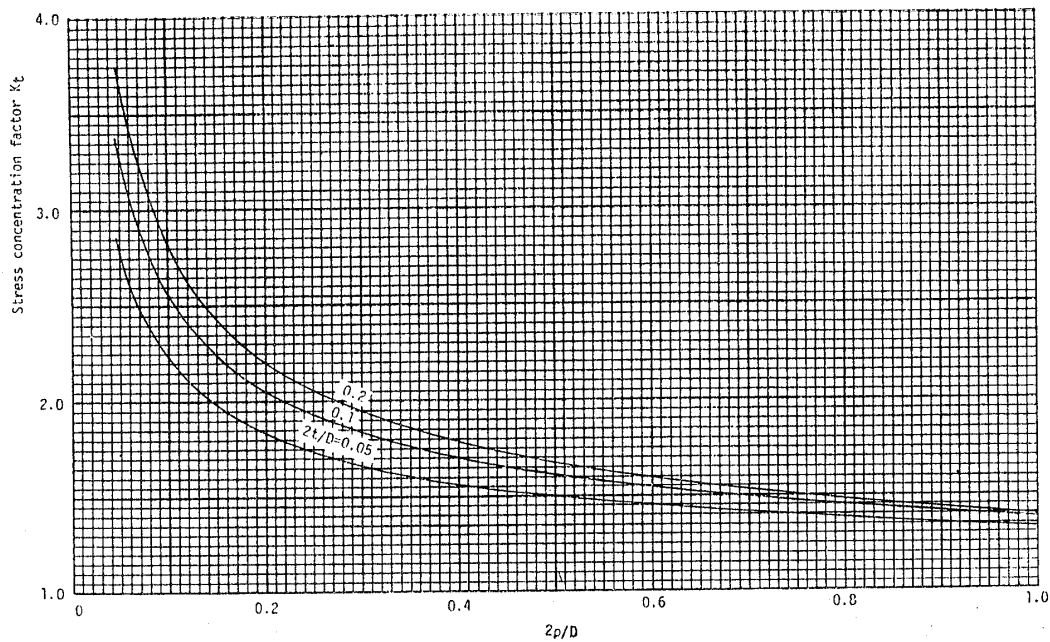


図 10 半円切欠きを有する丸棒の応力集中係数

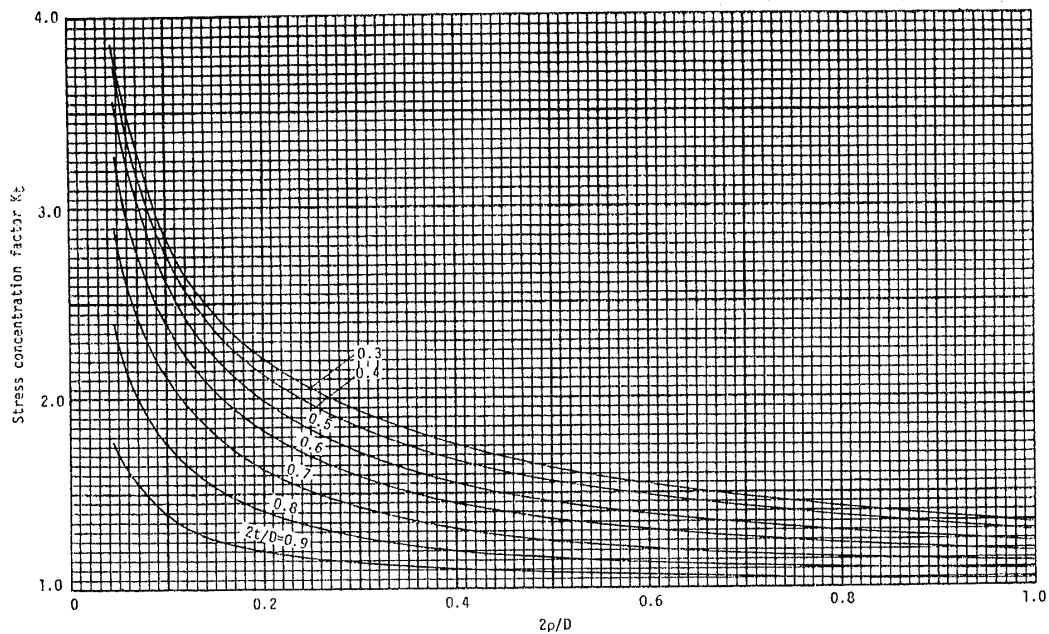


図 11 半円切欠きを有する丸棒の応力集中係数

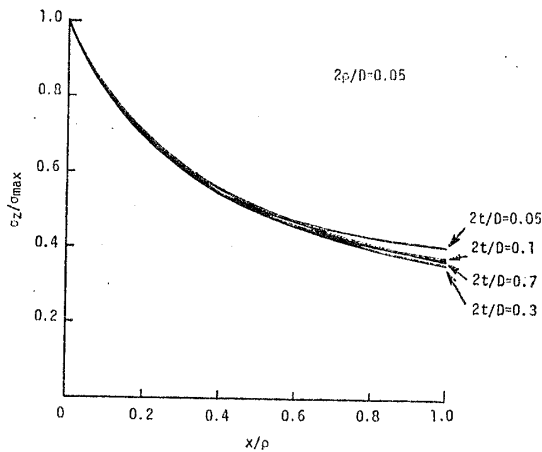


図 12 切欠き底近傍の応力分布 (鋭い切欠きの場合)

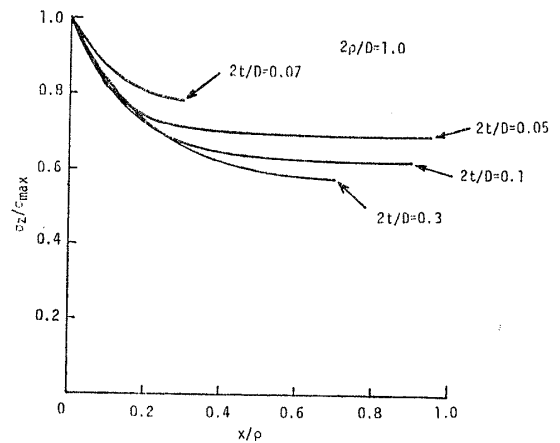


図 14 切欠き底近傍の応力分布 (鈍い切欠きの場合)

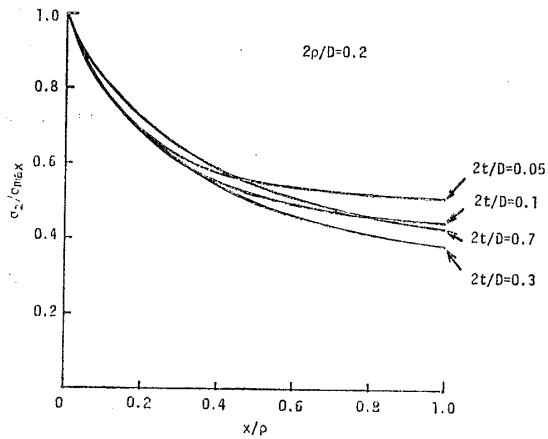


図 13 切欠き底近傍の応力分布

て解析を行った。結果をまとめると次のようになる。

(1) 半円状円周切欠きを有する丸棒について得られた応力集中係数は、 $2\rho/D \rightarrow 0$ に従って半無限板の半円切欠きの厳密解 $K_t=3.065$ に、また、 $2\rho/D \rightarrow 1$ に従って $K_t=1$ にそれぞれ無理なく一致する。

(2) 半円状円周切欠きを有する丸棒について過去の研究と比較すると、長谷川の計算値や菊川らの実験値はだいたいにおいて著者らの結果によく一致する。

(3) 半円状円周切欠きを有する丸棒について、切欠き形状を変化させて計算した結果、ノイパーの三角則による値には $2t/D$ の広い範囲にわたって最大 10% 程度の無視できない危険側の誤差を含む場合がある。

(4) 得られた計算結果から、設計や研究に役立つ

種々の寸法の円周切欠きについて応力集中係数を与える高精度 (誤差 1% 以内) の線図を作成した。

(5) 切欠き底の応力分布について考察した結果、切欠き半径 ρ によって応力分布の形がほぼ決定され、疲労における寸法効果 (または切欠き効果) に切欠き半径 ρ が重要な意味をもつこと⁽¹⁸⁾を確認した。

最後に、本研究の一部に協力いただいた卒論生、宗志朗氏 (新日本空調会社)、谷村佳昭氏 (九州工業大学大学院)、灘 信之氏 (日本鋼管会社) の各氏に感謝します。

文 献

- (1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1957), Springer-Verlag.
- (2) Peterson, R. E., *Stress Concentration Design Factors*, (1962), John-Wiley & Sons.
- (3) 西田, 応力集中, (1973), 森北出版.
- (4) 富本, 精密機械, 35-10 (昭 44), 609.
- (5) 佐藤・ほか 2 名, 機論, 42-364 (昭 51), 3071.
- (6) 菊川・佐藤, 機論, 38-311 (昭 47), 1663.
- (7) 半沢・ほか 2 名, 機論, 45-392, A (昭 54), 299.
- (8) 長谷川, 機論, 46-407, A (昭 55), 805.
- (9) 山本・谷口, 機論, 38-306 (昭 47), 269.
- (10) 西谷・機誌, 70-580 (昭 42), 627.
- (11) Nisitani, H., *Mechanics of Fracture*, 5 (1978), No. ordhoff Int. Pub.
- (12) 平野, 機論, 16-55 (昭 25), 52; 17-61 (昭 26), 12.
- (13) 村上・西谷, 機論, 41-342 (昭 50), 360.
- (14) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, (1951), 355, McGraw Hill.
- (15) Rankin, A. W., *J. Appl. Mech.*, 11-2 (1944), A 77.
- (16) 桜井・ほか 2 名, 機誌, 72-607 (昭 44), 1043.
- (17) 石川, 機論, 19-83 (昭 28), 5.
- (18) 西谷・機論, 34-259 (昭 43), 372.

討 論

〔質問〕 長谷川久夫 (明治大学工学部)

(1) 環状みぞをもつ丸軸の応力集中問題の貴重な論文, 興味深く拝読させていただいた. 計算機の計算時間の心配がなければ, 本方法による結果と文献(8)の方法による結果を実用上必要とされる精度で一致させることは十分可能と思われる. ところで, 著者らの一人が切欠きのない丸軸の表面力問題の解を用いて環状みぞをもつ丸軸問題を解く方法を以前に報告(付1)されておられるが, 原理的には, 前報の方法も計算機の精度さえ十分であれば有効と考えてよいか.

(2) 特異性をもつ基本解を応用するとき, その特異性をいかにして避けるかが重要なことと思われる. この点に関し, 次のことをお伺いする.

(i) 式(6)を数値積分するとき, 荷重点と注目点が一致する点 ($i=j$ のとき) で特異性をもつわけであるが, 体積法を応用するすべての場合に対して式(27)のような極限操作が可能か.

(ii) 式(27)は $i=j$ の n_1 個の場合に対して成立するのか. それとも切欠き底 (最小横断面) の区間の注目点だけで成立するのか.

(iii) 式(27)は, だ円面に沿っては積分できないため, 解析的に積分可能な円弧で切欠き面を近似して求めたものと思われるが, 円弧ではなく, 折れ線状の直線で近似したら誤差は大きくなるか.

(iv) 特異性を避けるための上記の極限操作はよく考えられていると思うが, それとは別に, 真の境界から少し離れた面に体積力を分布させる方法が考えられる. 問題によっては, 後者の方が有力とならないか.

(v) もしよろしかったら, 式(27)を導く過程をお示しいただきたい.

(3) 切欠き面の境界に沿っての応力 σ_n と τ_t の値は, なめらかに零になっているのか. それとも振動しながら零になっているのか (丸軸表面 $r=a_0$ ではなめらかに零になっているものと思われる).

(4) 解の収束性を速めるための式(26)の導入は, 特に弾性論の解を用いなくてもよいのではないか.

〔回答〕 (1) ご指摘のとおりだと思ふ. 実際,

$$\sigma_{zA}^{p_0} = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{s \{ \alpha s^2 + (2\alpha - \beta) \varepsilon^2 \}}{(s^2 + \varepsilon^2)^2} p_0 d\eta = p_0 \left\{ \alpha \left(\omega_0 + \frac{\varepsilon_0 s}{\varepsilon_0^2 + s^2} \right) - \frac{1}{2} \alpha s^2 \left(\omega_0 - \frac{\varepsilon_0 s}{\varepsilon_0^2 + s^2} \right) + (2\alpha - \beta) \left(\omega_0 - \frac{\varepsilon_0 s}{\varepsilon_0^2 + s^2} \right) - \frac{1}{2} (2\alpha - \beta) s^2 \left(\frac{2\varepsilon_0}{s} - 3\omega_0 + \frac{\varepsilon_0 s}{\varepsilon_0^2 + s^2} \right) \right\} \dots (v)$$

半沢氏らが前報(付1)の方法を用いて計算された結果は, 表3に示すようになりよく一致する.

(2) (i) すべての場合に対して可能である. 本質的には二次元でも三次元でもまったく変わらない. 二次元については文献(10)にかなりくわしく説明してある.

(ii) 式(27)は切欠き底についての式であるが, n_1 個の区間において $i=j$ である場合も二次元の結果⁽¹⁰⁾を用いて同様に簡単な極限操作の式が得られる. ただ平面応力の結果のポアソン比を $\nu/(1-\nu)$ でおきかえる必要がある.

(iii) 式(27)は注目点が最大応力点の場合の式であり, 従ってそこを折れ線で近似すれば大きな誤差を生じる.

(iv) 精度を多少犠牲にしても, 計算時間の短縮が強く要求される場合には後者が有力となるかもしれない.

(v) 式(27)は ε_0 が微小で, かつ注目点が着点に近い場合を対象としているので平面ひずみ状態にあるとして導出した.

図6に示すように rz 平面に半径 $\rho=1$ の微小円弧 ($\xi^2 + \eta^2 = 1$) を考え, その $2\varepsilon_0$ の部分 $\overline{CC'}$ に r 方向および z 方向の体積力 p_0, q_0 が分布している場合を考える. \overline{CD} 上の任意の点 $B(\xi, \eta)$ に作用する力 $p_0 d\eta$ および $-q_0 d\xi$ による, 点 $A(\delta, 0)$ における応力は, 無限板中の一点に集中力が作用する場合の任意の点の応力の式⁽¹⁰⁾において, ポアソン比 $\nu = \nu/(1-\nu)$ とおきかえることによって求めることができる. いま, $\xi = \cos \varepsilon, \eta = \sin \varepsilon$ であるから,

$$\left. \begin{aligned} -d\xi &= \sin \varepsilon d\varepsilon = \varepsilon d\varepsilon \\ d\eta &= \cos \varepsilon d\varepsilon = \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right) d\varepsilon \end{aligned} \right\} \dots (i)$$

$$\overline{DA} = s \text{ として} \quad \varepsilon_0 = s \tan \omega_0, \quad \varepsilon = s \tan \omega \quad \dots (ii)$$

$$\omega_0 = \tan^{-1} \frac{\varepsilon_0}{s}, \quad \omega = \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{s} \quad \dots (iii)$$

$$d\varepsilon = s \sec^2 \omega d\omega \quad \dots (iv)$$

以上の準備から, 点Aにおける z 方向の応力 $\sigma_{zA}^{p_0}$, $\sigma_{zA}^{q_0}$ は次のように求まる.

(付1) 西谷, 機論, 26-167 (昭 35), 983.

$$\sigma_{zA}^{q_0} = - \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{\varepsilon(\beta\varepsilon^2 + \alpha s^2)}{(s^2 + \varepsilon^2)^2} q_0 d\xi = 2q_0 \left[\beta \left\{ \varepsilon_0 - \frac{3}{2} s\omega_0 + \frac{\varepsilon_0 s^2}{2(\varepsilon_0^2 + s^2)} \right\} + \alpha s \left(\frac{\omega_0}{2} - \frac{\varepsilon_0 s}{2(\varepsilon_0^2 + s^2)} \right) \right] \dots\dots\dots(vi)$$

ただし,

$$\alpha = \frac{1-\nu^*}{4\pi}, \quad \beta = \frac{3+\nu^*}{4\pi}, \quad \nu^* = \frac{\nu}{1-\nu}$$

ここで, 点 A($\delta, 0$) を点 D(1, 0) に近づける操作を行う. このとき $s \rightarrow 0, \omega_0 \rightarrow \pi/2$ となる.

$$\lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \omega_0 \rightarrow \pi/2}} \sigma_{zA}^{p_0} = - \frac{\nu}{2(1-\nu)} p_0, \quad \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ \omega_0 \rightarrow \pi/2}} \sigma_{zA}^{q_0} = \frac{\{3+\nu/(1-\nu)\}\varepsilon_0}{2\pi} q_0 \dots\dots\dots(vii)$$

(3) なめらかであるべき体積力の密度を階段状の分布でおきかえているので, 振動しながら零になっていることになる. ただ, 切欠き底に関しては体積力の密度の定義として特別な関係式⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾を用いているた

めに, なめらかに零に近づいている.

(4) 丸棒表面にごく近い点を対象とした場合, 式(24)は実質的には半無限板の解に一致するので式(26)の導入により解の収束は非常に早くなる.