

## 円周き裂列を有する丸棒の引張り\*

西谷 弘信\*\*, 野田 尚昭\*\*\*  
Hironobu NISITANI, Nao-aki NODA**Key Words:** Elasticity, Body Force Method, Stress Intensity Factor, Cylindrical Bar, Circumferential Crack, Infinite Row of Cracks, Interference Effect

## 1. 緒 言

円周き裂を有する丸棒(図1)は、き裂先端で平面ひずみ状態が実現されるので、材料の破壊じん性を決定する試験片としても用いられる。このため、その応力拡大係数を求める試みは、すでに多くの研究者により行われている<sup>(1)~(5)</sup>。Benthem-Koiter<sup>(2)</sup>は、き裂深さの両極端で厳密解に一致する近似式を提案し、その値がBueckner<sup>(3)</sup>の計算結果ともよく一致することを示した。1977年、Keer-Freedmann-Watts<sup>(4)</sup>は、特異積分方程式を利用した解法で、き裂深さの広い範囲にわたって信頼性の高い数値を得た。Atsumi-Shindo<sup>(5)</sup>は異方性体の問題をKeerらの解法を発展させて取扱っている。Benthemらの近似式は、応力拡大係数が数式の形で与えられており、実用上便利であるため広く用いられているようであるが、解析的な手法により得られた解との比較による正しい誤差の評価が必要であるように思う。また、このように一つの円周き裂を有する丸棒の問題では、かなり信頼性の高い解が得られているが、丸棒の引張り問題において複数個の円周き裂による干渉の問題を扱った例は見当たらないようである。

以上の点を考慮して、本論文では1個または無限個の円周き裂を有する丸棒の引張り問題を扱う(図1および図2)。

著者らは、これまで円周切欠きを有する丸棒の応力集中問題へ体積力法を適用し、従来よく用いられてきたノイバー三角則の誤差の程度を系統的な解析により明らかにしてきた<sup>(6)~(9)</sup>。切欠きが鋭くなった極限と考えられるき裂の問題は、破壊力学の発展に伴い最近特に注目されており、上述のように研究例も多いので、

計算結果を過去の研究と比較することは、これまでの研究の精度を確認する上でも興味深い。なお、一つの円周き裂を有する丸棒の引張りについては、すでにポアソン比 $\nu=0$ として体積力法により解析されている<sup>(10)</sup>が、本研究では $\nu=0.3$ として計算を行った。

## 2. 計算方法と体積力の対の密度の定義

体積力法を三次元軸対称問題へ適用する場合、基本となる解は無窮体中の一円周上に作用する集中力の輪による応力の式である。円周切欠きを有する丸棒の問題では、半径方向および軸方向の集中力の輪を、無限体中に想定した切欠きや丸棒円筒面となるべき仮想境界上に連続的に作用させ、その分布力の強さを調節することによって境界条件を満たし解を得る<sup>(7)~(9)</sup>。一方、き裂の問題では、き裂となるべき面上に集中力を対として作用させる必要があるため、実質的には集中力が作用する場合の応力場を微分したもの(集中力の対に

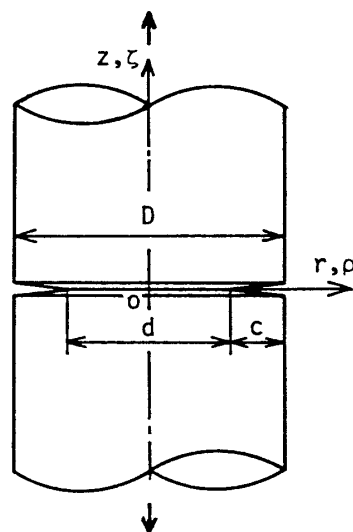


図1 円周き裂を有する丸棒の引張り

\* 昭和57年10月1日 第60期全国大会講演会において講演、原稿受付 昭和57年12月27日。

\*\* 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

\*\*\* 正員、九州工業大学(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

よる応力場)が基本解となる<sup>(12)</sup>。結局、本論文の問題では、き裂となるべき仮想境界上には集中力の対の輪(基本解①)を、丸棒円筒面となる仮想境界上には集中力の輪(基本解②)を作用させることになる。すなわち解法は、連続的に作用させる基本解①、②の強さ、つまり体積力および体積力対の密度を決定する問題に還元される。

き裂となるべき面の微小要素  $\rho d\rho d\varphi$  に作用させる「集中力の対」の大きさを  $dG_z$  とする時、体積力の対の密度  $\rho_{DB}$  を次式で定義する [着力点の円柱座標  $(\rho, \varphi, \zeta)$  を図1および図2に示すようにした]。

$$\rho_{DB} = \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \frac{1}{4\sqrt{C^2 - (\rho - D/2)^2}} \frac{dG_z}{\rho d\rho d\varphi} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、ここで大きさ1の「集中力の対」とは、 $z$  方向に作用する大きさ1の集中力対(単位距離だけ離れて逆向きに作用する集中力の組)に対して、 $r$  方向および  $\theta$  方向にそれぞれ大きさ  $\nu/(1-\nu)$  の集中力対を考え<sup>(11)(12)</sup>、それら3方向の集中力対を組合わせたものと定義する。大きさ  $\nu/(1-\nu)$  の集中力対は、大きさ1の集中力対を有限な面に分布させた時、その面が縮まないために必要である。

式(1)の体積力対の密度の定義によれば、引張りを受ける無限体中に存在する平面ひずみ状態の二次元き裂の場合には、き裂に沿って  $\rho_{DB}$  は一定になる。

3. 基本解——無限体中に周期的に作用する「集中力対」の輪による応力の式——の導出について

本論文では、無限個のき裂による干渉の問題を扱うので、「集中力対」の輪(き裂面を作るのに使用)およ

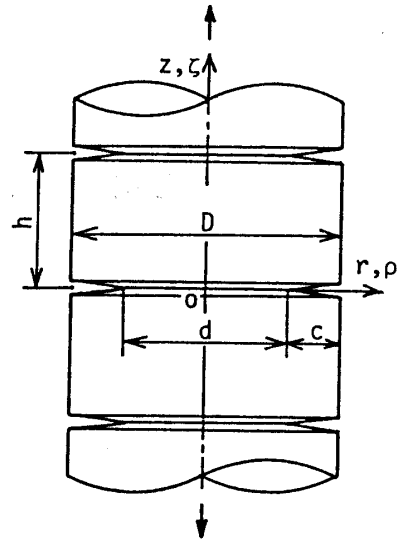


図2 円周き裂列を有する丸棒の引張り

び集中力の輪(円筒面を作るのに使用)が無限体中に周期的に作用する場合の応力の式の表示を求める必要がある。無限個の集中力の輪による表示については、すでに前報<sup>(9)</sup>で報告しているため、本報では無限個の「集中力対」の輪による応力の表示(これを  $\sigma^{F_{DB}^*}$  とする。以下において  $\sigma$  に応力成分の表示がない時は  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$  の各応力を意味するものとする)についてのみ述べることにする。

無限体中の1点  $(\rho, \varphi, \zeta + mh)$  に「集中力対」 $P_{DB}$  が作用する時、任意の点  $(r, \theta, z)$  における応力の式は、集中力による応力の式を微分したものを組合わせることにより次のようになる [問題の軸対称性より任意の点  $(r, \theta, z)$  において  $\theta=0$  とおいた]。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{P_{DB}} &= \frac{P_{DB}(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} [2(1-\nu)R^{-3} + 3(1-2\nu)R^{-5}\rho^2(-1 + \cos^2 \varphi) \\ &\quad + 15\bar{z}^2 R^{-7}(-r^2 + 2r\rho \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi)] \\ \sigma_\theta^{P_{DB}} &= \frac{P_{DB}(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} [2(1-\nu)R^{-3} + 3(1-2\nu)R^{-5}(-r^2 + 2r\rho \cos \varphi - \rho^2 \cos^2 \varphi) \\ &\quad + 15\bar{z}^2 R^{-7}\rho^2(-1 + \cos^2 \varphi)] \\ \sigma_z^{P_{DB}} &= \frac{P_{DB}(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} [R^{-3} + 6\bar{z}^2 R^{-5} + 15\bar{z}^4 R^{-7}(-1)] \\ \tau_{rz}^{P_{DB}} &= \frac{P_{DB}(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} [3\bar{z}R^{-5}(r - \rho \cos \varphi) + 15\bar{z}^3 R^{-7}(-r + \rho \cos \varphi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\nu$ : ポアソン比,  $\bar{z} = z - \zeta - mh$ ,  $R^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi + (z - \zeta - mh)^2$

式(2)で表される  $\sigma^{P_{DB}}$  を  $m$  について  $-\infty$  から  $+\infty$  までたし合わせ、 $P_{DB}$  として  $F_{DB}\rho d\varphi$  を代入し、 $\varphi$  について0から  $2\pi$  まで積分すれば求めるべき基本解  $\sigma^{F_{DB}^*}$  (無限個の集中力対の輪による応力の式) が得られる。

$$\sigma^{F_{DB}^*} = \int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma^{P_{DB}} \Big|_{P_{DB}=1} \times F_{DB}\rho d\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma^{P_{DB}} \Big|_{P_{DB}=1} \times F_{DB}\rho d\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_0^{F_{DB}^*} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\sigma_0^{F_{DB}^*}$  は一つの「集中力対」の輪による応力の式である（「集中力対」の“輪”による応力の表示には\*をつけて「集中力対」による表示と区別した）。

式(3)に含まれる無限級数の計算には  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \bar{z}^N R^M$  ( $N=0, 1, 2, 3, 4, M=-3, -5, -7$ ) の形式の級数和を求める必要がある。また、さらにその結果を  $\varphi$  について積分せねばならない。これら級数和は簡単には求められないので、本報では次のような方法を用いた。まず、

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma^{P_{DB}} = \sum_{m=m_0}^{\infty} \sigma^{P_{DB}} + \sum_{m=-m_0+1}^{m_0-1} \sigma^{P_{DB}} + \sum_{m=-\infty}^{-m_0} \sigma^{P_{DB}} \dots \dots \dots (4)$$

として、和をとる範囲を3区間に分けて考える。 $m_0$  を適当に大きくとるとすれば、 $m \geq m_0$  で  $R^{-3}, R^{-5}, R^{-7}$  は次のように2項級数で展開できる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=m_0}^{\infty} R^{-3} &= \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{|\zeta + mh - z|^3} \left\{ 1 - \frac{3\bar{r}^2}{2(\zeta + mh - z)^2} + \frac{15\bar{r}^4}{8(\zeta + mh - z)^4} \dots \right\} \\ &= \frac{1}{h^3} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{(\bar{\zeta} + m)^3} - \frac{3\bar{r}^2}{2h^5} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{(\bar{\zeta} + m)^5} + \frac{15\bar{r}^4}{8h^7} \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{(\bar{\zeta} + m)^7} \dots \\ &= \frac{1}{h^3} \zeta(3, \bar{\zeta} + m_0) - \frac{3\bar{r}^2}{2h^5} \zeta(5, \bar{\zeta} + m_0) + \frac{15\bar{r}^4}{8h^7} \zeta(7, \bar{\zeta} + m_0) \dots \\ \sum_{m=m_0}^{\infty} R^{-5} &= \frac{1}{h^5} \zeta(5, \bar{\zeta} + m_0) - \frac{5\bar{r}^2}{2h^7} \zeta(7, \bar{\zeta} + m_0) + \frac{35\bar{r}^4}{8h^9} \zeta(9, \bar{\zeta} + m_0) \dots \\ \sum_{m=m_0}^{\infty} R^{-7} &= \frac{1}{R^7} \zeta(7, \bar{\zeta} + m_0) - \frac{7\bar{r}^2}{2h^7} \zeta(9, \bar{\zeta} + m_0) + \frac{63\bar{r}^4}{8h^9} \zeta(11, \bar{\zeta} + m_0) \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

ここで、

$$\bar{r}^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi, \quad \bar{\zeta} = (\zeta - z)/h$$

$\zeta(l, x)$  は一般化されたツェータ関数で、式(6)によって定義される。

$$\zeta(l, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(x+m)^l} = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^{\infty} \frac{t^{l-1} e^{-xt}}{1-e^{-t}} dt \dots \dots \dots (6)$$

$\zeta(l, x)$  の値は積分表示 [式(6)] を利用し数値積分によって求めた。

式(5)の右辺における級数は、 $m_0$  を適当に大きくとれば、最初の数項で十分な精度が得られる。式(2)において  $m$  についての総和をとるのに必要な他の表示 ( $\sum_{m=m_0}^{\infty} \bar{z}^N R^M, N=1, 2, 3, 4, M=-3, -5, -7$ ) も同じように求まる ( $m = -m_0 \sim -\infty$  の表示も同様)。また、式(5)のように展開することによって式(3)に含まれる  $\varphi$  に関する円周方向の積分は閉じた形で求まる。 $-m_0 < m < +m_0$  の範囲の計算については、式(7)に示すように、一つの「集中力対」の輪による応力の式  $\sigma_0^{F_{DB}^*}$  (この場合  $\varphi$  に関する積分は完全だ円積分を用いて表される) を  $(2m_0-1)$  個たし合わせることによって求めた。

$$\int_0^{2\pi} \sum_{m=-m_0+1}^{m_0-1} \sigma^{P_{DB}} \Big|_{P_{DB}=1} \times F_{DB} \rho d\varphi = \sum_{m=-m_0+1}^{m_0-1} \int_0^{2\pi} \sigma^{P_{DB}} \Big|_{P_{DB}=1} \times F_{DB} \rho d\varphi = \sum_{m=-m_0+1}^{m_0-1} \sigma_0^{F_{DB}^*} \dots \dots \dots (7)$$

#### 4. 基本解の表示

3章に示した方法によって求まる基本解をまとめて書くと次のようになる。

$$\sigma^{F_{DB}^*} = \sum_{m=m_0}^{\infty} \sigma_0^{F_{DB}^*} + \sum_{m=-m_0}^{m_0} \sigma_0^{F_{DB}^*} + \sum_{m=-\infty}^{-m_0} \sigma_0^{F_{DB}^*} \dots \dots \dots (8)$$

ここで、

$\sigma^{F_{DB}^*}$  : 無限体中に「集中力対」の輪が周期的に作用する場合の応力

$\sigma_0^{F_{DB}^*}$  : 無限体中に一つの「集中力対」の輪が作用する場合の応力

である。

4・1  $\sum_{m=m_0}^{\infty} \sigma_0^{F_{DB}^*}, \sum_{m=-m_0}^{-\infty} \sigma_0^{F_{DB}^*}$  (式(8)の右辺第1項と第3項)の表示 式(8)の右辺第1項と第3項は、式(2), (3), (5), (6)を用いて求めることができる。それは以下のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{m=m_0}^{\infty} \sigma_{r_0}^{F_{DB}^*} &= \frac{F_{DB}\rho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2} \left[ 2(1-\nu) \sum_{l=0}^{\infty} S_1(l) \zeta_m(2l+3) C_0(l) + 3(1-2\nu)\rho^2 \right. \\
 &\quad \times \sum_{l=0}^{\infty} S_2(l) \zeta_m(2l+5) \{-C_0(l) + C_2(l)\} + 15 \sum_{l=0}^{\infty} S_3(l) \zeta_m(2l+5) \{-r^2 C_0(l) + 2re C_1(l) - \rho^2 C_2(l)\} \left. \right] \\
 \sum_{m=m_0}^{\infty} \sigma_{z_0}^{F_{DB}^*} &= \frac{F_{DB}\rho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} S_1(l) \zeta_m(2l+3) C_0(l) + 6 \sum_{l=0}^{\infty} S_2(l) \zeta_m(2l+3) C_0(l) \right. \\
 &\quad \left. + 15 \sum_{l=0}^{\infty} S_3(l) \zeta_m(2l+3) \{-C_0(l)\} \right] \\
 \tau_{rz_0}^{F_{DB}^*} &= \frac{F_{DB}\rho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2} \left[ 3 \sum_{l=0}^{\infty} S_2(l) \zeta_m(2l+4) \{r C_0(l) - \rho C_1(l)\} \right. \\
 &\quad \left. + 15 \sum_{l=0}^{\infty} S_3(l) \zeta_m(2l+4) \{-r C_0(l) + \rho C_1(l)\} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9\cdot a)$$

ここで,

$$S_1(l) = (-1)^l \frac{(2l+1)!}{l!2^l}, \quad S_2(l) = (-1)^l \frac{(2l+3)!}{3l!2^l}, \quad S_3(l) = (-1)^l \frac{(2l+5)!}{15l!2^l} \dots\dots\dots (9\cdot b)$$

$$C_n(l) = \int_0^\pi \cos^n \varphi (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi)^l d\varphi \dots\dots\dots (9\cdot c)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \zeta_m(l) &= (-1)^{l+1} \zeta(l, \bar{\xi} + m_0) / h^l \\
 \bar{\xi} &= (\xi - z) / h, \quad \zeta(l, x) \text{ は式(6)で定義される.}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9\cdot d)$$

式(9・a)の右辺に含まれる  $l$  についての級数は, 第7項までとった式を数値計算に用いた.

$\sum_{m=-m_0}^{\infty} \sigma_0^{F_{DB}^*}$  についての表示は, 式(9)において式(9・d), (9・e)のように置き換えれば得られる.

$$\zeta_m(l) = \zeta(l, \bar{\xi} + m_0) / h^l, \quad \bar{\xi} = (z - \xi) / h \dots\dots\dots (9\cdot e)$$

4・2  $\sum_{m=-m_0}^{m_0} \sigma_0^{F_{DB}^*}$  [式(8)の右辺第2項] の表示 式(8)の右辺第2項の計算には, 一つの「集中力対」の輪による応力の式  $\sigma_0^{F_{DB}^*}$  が必要である. それは次のように表される {式(2)で  $P_{DB}$  として  $F_{DB}\rho d\varphi$  を代入し,  $\varphi$  について0から  $2\pi$  まで積分して求める}.

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{r_0}^{F_{DB}^*} &= \frac{F_{DB}\rho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2 r_m^3} \left[ 2(1-\nu) I_0 + \frac{3(1-2\nu)}{r_m^2} \rho^2 (-J_0 + J_2) + \frac{15\bar{z}^2}{r_m^4} (-r^2 L_0 + 2r\rho L_1 - \rho^2 L_2) \right] \\
 \sigma_{z_0}^{F_{DB}^*} &= \frac{F_{DB}\rho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2 r_m^3} \left[ I_0 + \frac{6\bar{z}^2}{r_m^2} J_0 + \frac{15\bar{z}^4}{r_m^4} (-L_0) \right] \\
 \tau_{rz_0}^{F_{DB}^*} &= \frac{F_{DB}\rho(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)^2 r_m^3} \left[ \frac{3\bar{z}}{r_m^2} (rJ_0 - \rho J_1) + \frac{15\bar{z}^3}{r_m^4} (-rL_0 + \rho L_1) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10\cdot a)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned}
 r_m &= \sqrt{2r\rho}, \quad \bar{z} = z - \xi - mh, \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos^n \varphi}{(e - \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi, \quad J_n = \int_0^\pi \frac{\cos^n \varphi}{(e - \cos \varphi)^{5/2}} d\varphi \\
 L_n &= \int_0^\pi \frac{\cos^n \varphi}{(e - \cos \varphi)^{7/2}} d\varphi, \quad e = 1 + \frac{(r-e)^2 + (z-\xi)^2}{2r\rho}, \quad I_0 = \frac{1}{e^2-1} K_1 \\
 J_0 &= \frac{4e}{3(e^2-1)^2} K_1 - \frac{1}{3(e^2-1)} K_2, \quad J_1 = \frac{e^2+3}{3(e^2-1)^2} K_1 - \frac{e}{3(e^2-1)} K_2 \\
 J_2 &= -\frac{2e(e^2-3)}{3(e^2-1)^2} K_1 + \frac{2e^2-3}{3(e^2-1)} K_2, \quad L_0 = \frac{23e^2+9}{15(e^2-1)^3} K_1 - \frac{8e}{15(e^2-1)^2} K_2, \\
 L_1 &= \frac{e(3e^2+29)}{15(e^2-1)^3} K_1 - \frac{3e^2+5}{15(e^2-1)^2} K_2, \quad L_2 = \frac{-2e^4+19e^2+15}{15(e^2-1)^3} K_1 + \frac{2e(e^2-5)}{15(e^2-1)^2} K_2 \\
 K_1 &= \int_0^\pi (e - \cos \varphi)^{1/2} d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{k} E(k), \quad K_2 = \int_0^\pi (e - \cos \varphi)^{-1/2} d\varphi = \sqrt{2} k K(k)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10\cdot b)$$

$K(k), E(k)$  は第1種および第2種の完全だ円積分で  $k = \sqrt{2/(e+1)}$  である.

5. 具体的な数値計算の方法

図3に無限体中に想定した体積力および体積力対を分布させる仮想境界を示す。4章で定義した基本解を用いれば、問題の対称性から境界条件は図3のABCの範囲で満たせばよい。円筒面に生じるせん断応力をあらかじめ小さくしておくため、き裂となるべき面ABのほかにもA'Bにも体積力対を分布させた。分布すべき体積力対の密度は閉じた形では求まらないので、き裂部分ABを  $n_1$  分割、円筒面BCを  $n_2$  分割して各区間の midpoint で境界条件を満たすよう数値計算を行う。円筒面の分割は、き裂に近いところで細かくした。分割した区間をAからB、Cへ順番に番号をつける。j番めの区間に単位密度の体積力(体積力対)を分布させた時のi番めの区間の midpoint (境界条件を満たす点)に生じる応力  $\sigma_i^{r'}$  (影響係数)は、式(11)のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^{r'j} &= \int_j \sigma F_{rr'} \Big|_{F_{rr}=1} \frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu} \\ &\quad \times 4\sqrt{C^2 - (\rho - D/2)^2} d\rho \quad (j=1 \sim n_1) \\ \sigma_i^{z'j} &= \int_j \sigma F_{rz'} \Big|_{F_{rz}=1} d\zeta, \quad \sigma_i^{z'j} = \int_j \sigma F_{zz'} \Big|_{F_{zz}=1} d\zeta \\ &\quad (j=n_1+1 \sim n_1+n_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 $\int_j$  は区間jにおける積分を表す(この積分は数値積分によって求めた)。 $\sigma F_{rz'}$ 、 $\sigma F_{zz'}$  は、無限体中

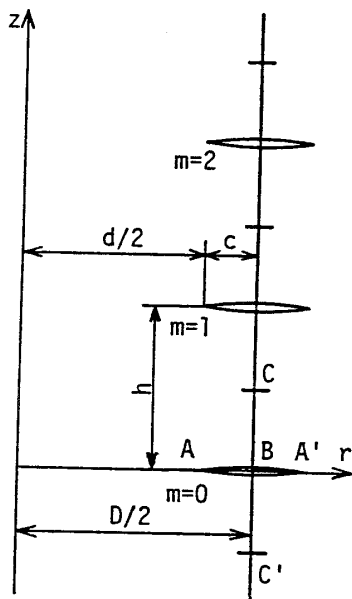


図3 無限体中に想定した体積力および体積力対を分布させる仮想境界

に  $r$  方向もしくは  $z$  方向の集中力の輪が周期的に作用する場合の応力〔その表示は文献(9)に示した〕である。

i番めの区間の midpoint における境界条件は式(12)で表される。式(12)の第1, 2, 3式は、それぞれき裂面の  $\sigma_z=0$ , 円筒面の  $\sigma_r=0$ , 円筒面の  $\tau_{rz}=0$  の条件に対応している。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1} \rho_{DBj} \sigma_{zi}^{r'j} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \sigma_{zi}^{r'j} + \rho_{zj} \sigma_{zi}^{z'j}) + \sigma_\infty &= 0 \\ (i=1 \sim n_1) \\ \sum_{j=1}^{n_1} \rho_{DBj} \sigma_{ri}^{r'j} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \sigma_{ri}^{r'j} + \rho_{zj} \sigma_{ri}^{z'j}) &= 0 \\ (i=n_1+1 \sim n_1+n_2) \\ \sum_{j=1}^{n_1} \rho_{DBj} \tau_{rzi}^{r'j} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \tau_{rzi}^{r'j} + \rho_{zj} \tau_{rzi}^{z'j}) &= 0 \\ (i=n_1+1 \sim n_1+n_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここで、 $\sigma_\infty$  は無限遠における  $z$  方向の垂直応力である。

式(12)の  $(n_1+2n_2)$  元連立方程式を解けば、式(13)から無次元化応力拡大係数  $F_1$  を求めることができる。

$$F_1 = \rho_{DB1} = K_1 / \sigma_\infty \sqrt{\pi C} \dots\dots\dots(13)$$

( $K_1$ : 応力拡大係数)

ここで、 $\rho_{DB1}$  は  $j=1$  における体積力対の密度である。

6. 計算結果および考察

以下の計算でポアソン比は0.3とした。最終的な数値を、有限の分割数  $n_1, n_2$  から分割数が無限大の場合を外そうして求めたことなどは、これまでの報告<sup>(6)-(9)</sup>と同様である。

6.1 一つの円周き裂を有する丸棒の引張り 表

表1 円周き裂を有する丸棒の引張りにおける応力拡大係数  $F_1$  ( $F_1 = K_1 / \sigma_\infty \sqrt{\pi C}$ ,  $\nu = 0.3$ )

2c/D	本計算	Keerら <sup>(4)</sup>	Atsumiら <sup>(5)</sup>	Benthemら <sup>(2)</sup>	深い円周き裂の解
0.02	1.133	-	-	1.125	3.644
0.03	1.139	-	-	1.127	3.022
0.05	1.150	1.151 3	1.152	1.133	2.415
0.1	1.180	1.180 7	1.181	1.153	1.852
0.2	1.261	1.260 8	1.261	1.225	1.563
0.3	1.393	1.390 4	1.390	1.353	1.559
1/3	1.452	-	-	1.412	1.591
0.4	1.602	1.597	1.596	1.561	1.701
0.5	1.940	1.932	1.928	1.901	2.000
0.6	2.516	2.502	2.494	2.481	2.552
2/3	3.158	-	-	3.128	3.182
0.7	3.618	3.598	3.571	3.590	3.637
0.8	6.243	6.201	6.115	6.223	6.250
0.9	16.67	16.46	-	16.66	16.67

1は、円周き裂を有する丸棒の引張りについての計算結果を、Keerらの解<sup>(4)</sup>、Atsumiらの解<sup>(5)</sup>、Benthemらの近似式<sup>(2)</sup>{式(14)}による値、深い円周き裂の解{式(15)}と比較して整理したものである。

Benthem・Koiter<sup>(2)</sup>：

$$K_I = \frac{1}{2} \sigma_{net} \sqrt{\pi d c / D} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{D} \right) + \frac{3}{8} \left( \frac{d}{D} \right)^2 - 0.363 \left( \frac{d}{D} \right)^3 + 0.731 \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right\} \dots\dots\dots (14)$$

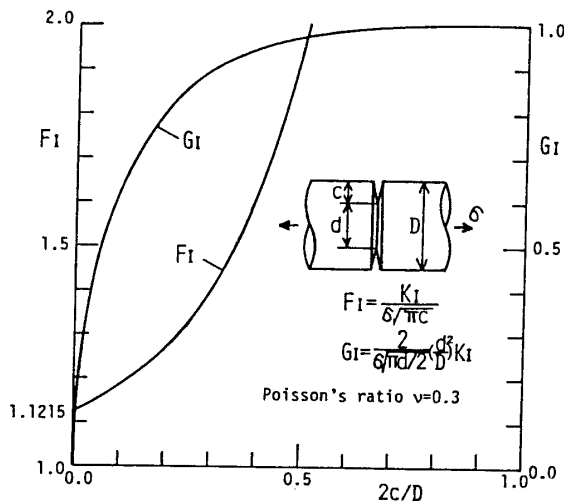


図4 円周き裂を有する丸棒の引張りにおける無次元化応力拡大係数

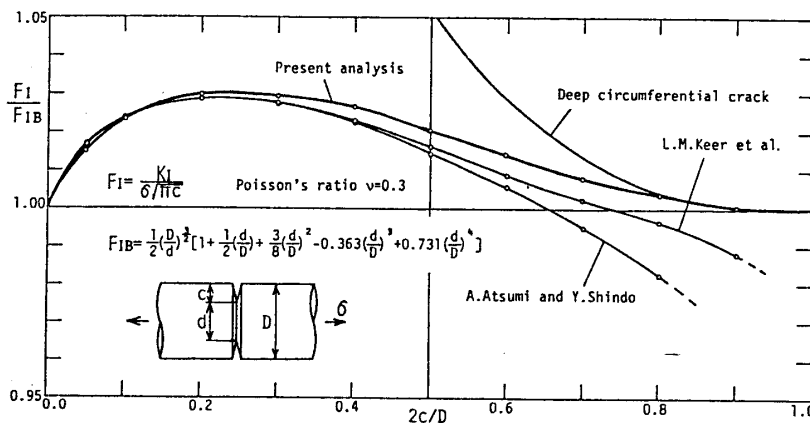


図5  $F_I/F_{IB}$  と  $\lambda=2c/D$  の関係 ( $F_{IB}$  : Benthemらの近似式<sup>(2)</sup>による  $F_I$ )

深い円周き裂の解：

$$K_I = \frac{1}{2} \sigma_{net} \sqrt{\pi (d/2)} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $\sigma_{net}$ は最小断面(直径  $d$ )の公称応力  $= (D/d)^2 \sigma_\infty$  である。

図4は著者らの計算結果を2種類の無次元化表示により、横軸にき裂深さをとって図示したものである [ $F_I = K_I / \sigma_\infty \sqrt{\pi c}$ ,  $G_I = K_I / \{ (1/2) \sigma_{net} \sqrt{\pi (d/2)} \}$ ]。本計算結果は、き裂深さの両極端で厳密解と無理なく一致することがわかる。

表1に示すように、著者らの結果は他の研究者らの結果とよく一致している(Keerらの解との差は最大でも1.3%)が、さらに詳しい精度の検討を行うため、図5のような整理を試みた。図5は縦軸に  $F_I/F_{IB}$  ( $F_{IB}$  : Benthemらの近似式による  $F_I$ の値)をとり、横軸にき裂深さ  $\lambda=2c/D$ をとって図示したものである。Benthemらの近似式は、き裂深さの両極端で厳密解と一致するよう式の係数を決めているので、 $F_I/F_{IB}$ の値は  $\lambda \rightarrow 0$  および  $\lambda \rightarrow 1$  で1に近づくべきものである。著者らの結果は、この両極端での条件を満足している。また、き裂深さの浅い範囲ではKeerらおよびAtsumiらの解と極めてよく一致しており信頼性が高い。Benthemらの近似式には、最大3%程度の誤差があることがわかる。

6・2 無限個の円周き裂を有する丸棒の引張り

表2は、無限個の円周き裂を有する丸棒について、き裂深さ  $2c/D$  とき裂の間隔  $c/h$  を変えて計算した結果をまとめたものである。また、図6は縦軸に  $F_I/F_{10}$  ( $F_{10}$  は円周き裂が1個のみある場合の  $F_I$ ) をとり、横軸にき裂深さ  $\lambda=2c/D$ をとって結果を整理したものである。著者らの結果は、 $\lambda=2c/D \rightarrow 0$  に従って半無限板縁にき裂列がある場合の解<sup>(13)</sup>に無理なく一致する。また、き

表2 円周き裂列を有する丸棒の引張りにおける応力拡大係数  $F_I$  ( $F_I = K_I / \sigma_\infty \sqrt{\pi c}$ ,  $\nu=0.3$ )

$c/h$	$2c/D$					$F_I/F_I   c/h \rightarrow 0$				
	0.0 <sup>(13)</sup>	0.2	1/3	0.5	2/3	0.0	0.2	1/3	0.5	2/3
0.0	1.122	1.261	1.452	1.940	3.158	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.2	0.872	1.176	1.439	1.942	—	0.778	0.933	0.991	1.001	—
0.3	0.726	1.027	1.335	1.917	—	0.647	0.814	0.919	0.988	—
0.4	0.625	0.906	1.212	1.839	—	0.558	0.719	0.835	0.948	—
0.5	0.558	0.821	1.113	1.746	3.092	0.498	0.651	0.767	0.900	0.979

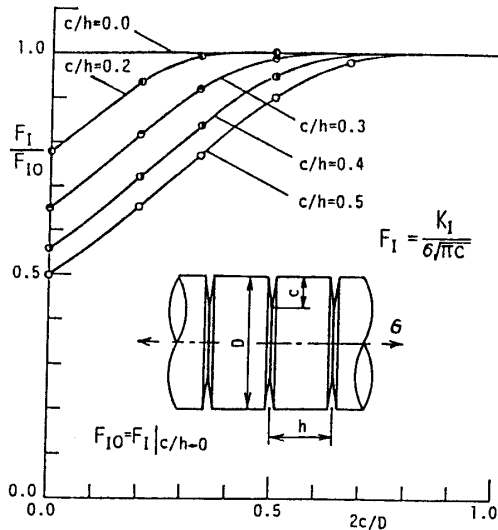


図6 円周き裂列を有する丸棒の引張りにおけるき裂の干渉効果

裂が深くなるにつれて、他のき裂による干渉の影響は小さくなり、 $F_1/F_{10} \rightarrow 1$  となることがわかる。

## 7. 結 言

本論文では、1個および無限個の円周き裂を有する丸棒が引張りを受ける場合について、体積力法による解析を行い、応力拡大係数を求めた。結果をまとめると次のようになる。

(1) 一つの円周き裂を有する丸棒において、著者らの結果は、き裂が浅い範囲では Keer ら<sup>(4)</sup>および

Atsumi ら<sup>(5)</sup>の結果と極めてよく一致した。また、き裂が深い場合には、深い円周き裂の解に無理なく近づく。Benthem らの近似式<sup>(2)</sup>には最大 3% 程度の誤差がある。

(2) 無限個の円周き裂を有する丸棒において、き裂深さおよびき裂の間隔を変えて計算した結果、著者らの結果は  $\lambda \rightarrow 0$  に従って半無限板縁にき裂列がある場合の解<sup>(13)</sup>に一致する。また、き裂が深い場合には干渉効果は小さくなり、き裂が一つの場合の応力拡大係数と実質的に同じになる。

## 文 献

- (1) 例えば、文献(4)、(10)参照。
- (2) Benthem, J. P. and Koiter, W. T. (Sih, G. C. 編), *Method of Analysis and Solutions of Crack Problems*, (1973), 131, Noordhoff. Int. Pub.
- (3) Beuckner, H. F., *ASTM Spec. Tech. Publ.*, 381 (1965), 82.
- (4) Keer, L. H., ほか 2 名, *Letters Appl. Eng. Sci.*, 5-2 (1977), 129.
- (5) Atsumi, A. and Shindo, Y., *Int. J. Eng. Sci.*, 17-12 (1979), 1229.
- (6) 村上・ほか 2 名, 機論, 47-423, A (昭 56), 1194.
- (7) 村上・ほか 2 名, 機論, 48-427, A (昭 57), 312.
- (8) 村上・ほか 2 名, 機論, 48-430, A (昭 57), 800.
- (9) 西谷・ほか 2 名, 機論, 49-441, A (昭 58), 602.
- (10) 村上・西谷, 機論, 41-342 (昭 50), 360.
- (11) 石田・野口, 機論, 48-429, A (昭 57), 607.
- (12) 西谷, 機論, 41-344 (昭 50), 1103.
- (13) Nisitani, H. (Sih, G. C. and Chow, C. L. 編), *Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics*, (1977), 1127.

## 討 論

〔質問〕 長谷川 久夫 [明治大学工学部]

(1) き裂の干渉問題のご研究、興味深く拝読させていただいた。本問題の場合、き裂列の応力拡大係数の値  $K_\infty$  は、き裂の干渉効果により、常に  $K_\infty \leq K_1$  が成立するといえるか。ここに  $K_1$  は、き裂が 1 個の時の値である。

(2) 物体力の密度の定義を式(1)のように行う理由をお示しいただければ幸いである。

〔回答〕 (1) 本論文で計算した範囲では、 $c/h = 0.2$ ,  $2c/D = 0.5$  における応力拡大係数は、き裂が一つの場合よりごくわずかだが大きくなっている (表 2)。また、切欠き列を有する丸棒の問題では、明らかに

$$K_{t\infty} > K_{t1} \quad \left( \begin{array}{l} K_{t\infty} : \text{切欠き列の応力集中係数} \\ K_{t1} : \text{一つの切欠きの応力集中係数} \end{array} \right)$$

となる場合のあることを確認している<sup>(9)</sup>。したがって常に  $K_\infty \leq K_1$  が成り立つとはいえないと考える。

(2) 体積力の密度の定義として式(1)を用いることは、き裂を  $n_1$  分割して数値計算する際、無限体中に 1 個の二次元き裂がある時の密度を基準とすることを意味する [二次元き裂に関する詳しい説明は(付 1)参照]。つまり、連続的に変化しているべき体積力の対の密度を、無限体中に 1 個の二次元き裂がある時の密度を各区分ごとに一定の倍率で比例的に変えた階段状のもので置き換えることになる (こうすることによって各区分ごとの倍率の変化が小さくなり、精度が高くなる)。円周き裂列を有する丸棒の問題において、き裂先端近くのごくせまい幅の領域は二次元状態に近いと

(付 1) Nisitani, H. (Sih, G. C. 編), *Mechanics of Fracture*, 5 (1978), 1, Noordhoff. Int. Pub.

考えることができるので、式(1)の定義は三次元問題においても高精度の解を得るのに有効となる。

〔質問〕 相澤 龍彦〔東京大学教養学部〕

(1) 1円周き裂解析で全き裂長さに対して  $F_1/F_{1B} \geq 1$  となるのは本法の解法と Benthem の近似式との間になんらかの関係があるのか。

(2) 無限個き裂解析で  $c/h, 2c/D$  を大きくした時の解の精度はいかかか。また  $c/h$  がいかに大きいても  $2c/D \rightarrow 1.0$  の極限は  $F_1/F_{10} = 1.0$  になるのか、それとも干渉効果である程度の大きさの  $c/h$  では  $2c/D \rightarrow 1.0$  でも  $F_1/F_{10} < 1.0$  となるのか。

(3) 本解析ではポアソン比を  $\nu = 0.3$  となさっているが、1円周き裂で  $\nu$  を 0.5 に漸近させていく時  $F_1$  が減少していく解 (FEM 解) を得た経験があるが、本解析ではいかかか。

〔回答〕 (1) Benthem らの近似式と本論文の解法とは直接関係はない。円周き裂の問題で  $F_1/F_{1B} \geq 1$  となるのは、Benthem らが参考にした Beuckner の計算結果が 2% 程度の過小の誤差を有することと関係があると思われる。

(2)  $c/h$  および  $2c/D$  が大きい場合を精度よく解析するためには、分割数がある程度大きくとる必要がある (表 2 に示した範囲では 4 けた程度の精度があると考えている)。

また、 $c/h$  を一定にして  $2c/D$  を 1 に近づけることは、 $h$  (および  $c$ ) を一定にして最小断面の直径  $d$  を 0 に近づけることに相当する。この場合、き裂先端近傍

付表 1 円周き裂を有する丸棒の引張りにおけるポアソン比の影響

$2c/D$	$F_1$	
	$\nu=0.0$	$\nu=0.3$
0.02	1.136	1.133
0.03	1.144	1.139
0.05	1.158	1.150
0.1	1.193	1.180
0.2	1.277	1.261
0.3	1.408	1.393
1/3	1.466	1.452
0.4	1.614	1.602
0.5	1.948	1.940
0.6	2.522	2.516
2/3	3.162	3.158
0.7	3.622	3.618
0.8	6.246	6.243
0.9	16.67	16.67

の応力状態は寸法  $d$  のみによって支配されるので、本報で計算していない  $c/h > 0.5$  の場合でも  $F_1/F_{10} \rightarrow 1.0$  となるものと思われる。

(3) 付表 1 に一つの円周き裂を有する丸棒の問題においてポアソン比  $\nu=0$  と  $\nu=0.3$  で計算した結果を示す。この両者の比較からも、ご指摘のように  $\nu$  の増加とともに  $K_1$  が減少する傾向があることがわかる。

なお、半円切欠きを有する丸棒の問題における長谷川の結果(付2)では、 $\nu$  を 0 から 0.5 まで変化させてあり、より明確にその傾向が認められる。

(付2) 長谷川, 機論, 48-430, A (昭57), 853.