

60°V形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中問題の考察*

西谷 弘信**, 野田 尚昭***
Hironobu NISITANI, Nao-aki NODA**Key Words:** Elasticity, Body Force Method, Stress Concentration, Cylindrical Bar V-Shaped Notch, Extremely Sharp Notch, Tension, Neuber's Trigonometric Rule

1. 緒 言

円周切欠きを有する丸棒の応力集中は、実用上は主に軸の設計において問題となるが、材料の強度研究用の試験片においても重要である。従来、この問題にはノイバーの三角則による近似値⁽¹⁾が主に用いられてきたが、最近では電算機の発達に伴い高精度の解析が可能となってきている。著者らは、この問題に体積力法⁽²⁾⁽³⁾を適用し、切欠きの寸法を広範囲に変えた系統的な解析(引張り⁽⁴⁾、曲げ⁽⁵⁾⁽⁶⁾、ねじり⁽⁷⁾)を行ってきた。

切欠きによる応力集中の問題において、切欠き半径 ρ が他の寸法に比べて極めて小さい場合——いわゆる鋭い切欠きの問題は、一般に精度よい解析が困難である。これは、局部的でしかも著しい応力集中の状態を

解析するには、境界あるいは領域などの数値計算のための分割を極めて細かくとる必要があるからである。

本論文では、実際の切欠き形状としてしばしば用いられる60°V形の切欠きを有する丸棒の引張り問題(図1)を取扱った。具体的な研究内容は次の二つである。

(1) 体積力法による解析を行い、切欠き半径 ρ と切欠き深さ t を変えて系統的に応力集中係数を求める。

(2) 得られた応力集中係数と切欠き形状との関係について、これまでの研究の蓄積をもとに詳しい考察を行い、解析困難な鋭いV形切欠きの場合についても実用上十分な精度で応力集中係数を推定できることを示す。

2. 計算方法と体積力の密度の定義

本論文で用いる体積力法⁽²⁾⁽³⁾は、無限体中の一点に集中力が作用する場合の応力場の式を基礎式とし、その重ね合せにより与えられた境界条件を満たす解析法である。

軸対称問題では無限体中の一つの円周上に作用する半径方向および軸方向の集中力の輪(図2)による任意の点の応力の式を基本解として使用する⁽³⁾⁽⁴⁾。具体的には、無限体中において、丸棒円筒面および円周切欠きとなるべき仮想境界上に集中力の輪を連続的に作用させ、 \ominus 境界(無限小近傍からなる境界)で境界条件を満足させる。すなわち解法は、連続的に作用させる基本解(a),(b)の強さ(すなわち体積力の密度)を決定する問題に還元される。

面積 $\rho d\varphi ds$ ($ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (d\zeta)^2}$) の帯状の微小要素に働く体積力の合力の成分を dP_r, dP_z とする時、体積力の密度 ρ_r, ρ_z を次のように定義する〔円柱座標系において着力点の座標を (ρ, φ, ζ) とする(図2)]。

(i) 切欠き部:

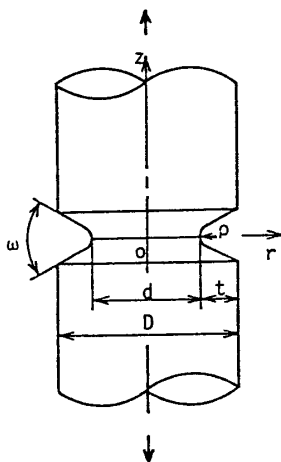


図1 60°V形切欠きを有する丸棒の引張り
(切欠きが浅い場合は円弧形切欠き)

* 昭和59年3月30日 第61期通常総会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和58年9月30日。

** 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

*** 正員、九州工業大学 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

$$\rho_r = \frac{dP_r}{\rho d\phi d\zeta}, \quad \rho_z = \frac{dP_z}{\rho d\phi d\zeta} \dots\dots\dots (1)$$

(ii) 丸棒円筒面:

$$\rho_r = \frac{dP_r}{\rho d\phi d\zeta}, \quad \rho_z = \frac{dP_z}{\rho d\phi d\zeta} \dots\dots\dots (2)$$

体積力の密度は一般に連続的に変化しているべきものであるから、それを階段状の分布で置き換える際にはなるべくそれが一定になるような定義が望ましい。この立場から、体積力法では問題に応じて体積力の密度の定義を工夫し計算精度を高めている。

3. 数値計算の具体的方法

図3に無限体中に想定した体積力を分布させる仮想境界を示す。円筒面 $r = D/2$ に生じるせん断応力 τ_{rz} をあらかじめ小さくしておくため、切欠きとなるべき境界 $BA'B'$ のほかに $BA'B'$ にも同じ密度の体積力を分布させた。分布させるべき体積力の密度は閉じた形では求まらないので、切欠き先端の円弧部 AE を n_1 分割、切欠き側面の直線部 EB を n_2 分割、丸棒円筒面 BC を n_3 分割する。分割した各区間の注目点(区間の中点)で境界条件を満たすよう各区間に分布させる体積力の密度を決定する。

分割した区間を A の側から $E \rightarrow B \rightarrow C$ のほうへ番号をつける。問題の対称性から境界条件は $z > 0$ の範囲で満たせばよいから i 番めの注目点(境界条件を満たす点)とは $AEBC$ 間にある i 番めの区間の中点を指す

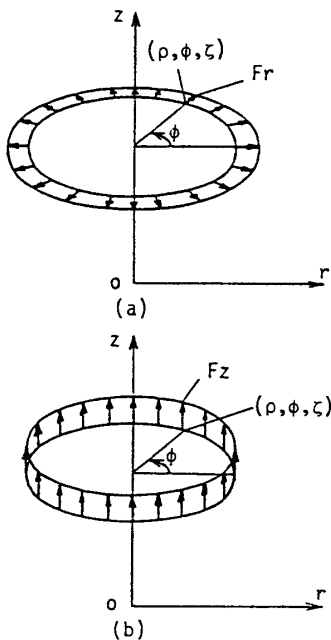


図2 無限体中の半径 ρ の円周上に作用する半径方向の集中力の輪(a)および軸方向の集中力の輪(b) (F_r, F_z は単位長さ当りの集中力の大きさ)

ものとする。また、 j 番めの着力区間とは、切欠き部では $AB, AB', A'B, A'B'$ の対応する j 番めの区間を指し、丸棒円筒面では $BC, B'C'$ の対応する j 番めの区間を指すものとする。丸棒円筒面の分割は、切欠きに近いところでは細かくした。軸方向の長さ $O'C$ は計算結果に実質上影響しなくなる点までの長さ(最低の場合で直径 D の2倍程度)をとった。

j 番めの区間に単位密度の体積力を分布させた時の i 番めの注目点における応力 $\sigma_i^{rj}, \sigma_i^{zj}$ (影響係数)は図2に示す2種類の集中力の輪による応力 $\sigma^{Fr*}, \sigma^{Fz*}$ を積分することによって求まる(単に σ と書くのは、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ の各応力を指すことにする)。

$$\sigma_i^{r*} = \int_j \sigma^{Fr*} \Big|_{F_r=1} \rho_h \cos \phi d\phi$$

$$\sigma_i^{z*} = \int_j \sigma^{Fz*} \Big|_{F_z=1} \rho_h \sin \phi d\phi$$

($j=1 \sim n_1$)

$$\sigma_i^{rj} = \int_j \sigma^{Fr*} \Big|_{F_r=1} d\zeta$$

$$\sigma_i^{zj} = \int_j \sigma^{Fz*} \Big|_{F_z=1} d\phi$$

($j=n_1+1 \sim n_1+n_2$)

$$\sigma_i^{rj} = \int_j \sigma^{Fr*} \Big|_{F_r=1} d\zeta$$

$$\sigma_i^{zj} = \int_j \sigma^{Fz*} \Big|_{F_z=1} d\zeta$$

($j=n_1+n_2+1 \sim n_1+n_2+n_3$)

ここで \int_j は区間 j における積分を表す(この積分は数値積分によって求めた)。切欠き先端を含む円弧部では切欠き形状を式(4)で表現する変数 ψ について積分した。

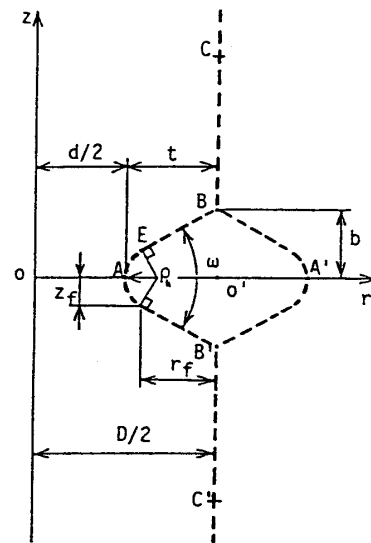


図3 無限体中に想定した体積力を分布させるべき仮想境界

$$r = -\rho_h \cos \psi + d/2 + \rho_h, \quad z = \rho_h \sin \psi \quad \dots\dots\dots (4)$$

図2に示すような集中力の輪が無限体中に作用する場合の任意の点 (r, θ, z) における応力の式 $\sigma^{Fr*}, \sigma^{Fz*}$ は文献(4)で報告した式を用いた。

i 番めの注目点 (区間の中点) における境界条件 $\sigma_n = \sigma_r \cos^2 \psi_i + \sigma_z \sin^2 \psi_i + 2\tau_{rz} \sin \psi_i \cos \psi_i = 0, \tau_{nt} = (-\sigma_r + \sigma_z) \sin \psi_i \cos \psi_i + \tau_{rz}(\cos^2 \psi_i - \sin^2 \psi_i) = 0$ は式(5)で与えられる (n は i 番めの注目点における法線方向, ψ_i は法線と r 軸とのなす角度である)。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj}\sigma_n^{rj} + \rho_{zj}\sigma_n^{zj}) + \sigma_\infty \cos^2 \psi_i = 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj}\tau_{nt}^{rj} + \rho_{zj}\tau_{nt}^{zj}) + \sigma_\infty \sin \psi_i \cos \psi_i = 0 \end{aligned} \right\} (j=1 \sim n_1+n_2) : \text{切欠き部の条件}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj}\sigma_r^{rj} + \rho_{zj}\sigma_r^{zj}) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2+n_3} (\rho_{rj}\tau_{rz}^{rj} + \rho_{zj}\tau_{rz}^{zj}) = 0 \end{aligned} \right\} (i=n_1+n_2+1 \sim n_1+n_2+n_3) : \text{丸棒円筒面の条件}$$

..... (5)

ここで σ_∞ は無限遠での一様引張応力である。

式(5)の $2(n_1+n_2+n_3)$ 元連立一次方程式を解いて各区間に分布させる体積力の密度 ρ_{rj} および $\rho_{zj} (j=1 \sim n_1+n_2+n_3)$ が決定されれば, 任意の点における応力は体積力の密度 ρ_{rj}, ρ_{zj} と影響係数との一次結合の形で求めることができる。

以上の議論において, 注目点が着力区間に含まれる時 (すなわち $i=j$ の時) と, 切欠き底近傍に分布させた体積力の最大応力に及ぼす効果を求める際, 式(3)の被積分関数は特異性をもつので特別な配慮が必要となる。そこで中点を含む $2\epsilon_0$ を除いた区間にはそのまま数値積分を実行し, 中点を含む $2\epsilon_0$ の区間に対しては直接積分を実行した。注目点を含む微小領域 $2\epsilon_0$ に関する積分値は, 切欠きの円弧部を例にとると式(6)のようになる⁽⁶⁾(r_i は注目点の r 座標である)。切欠きの直線部と丸棒円筒面についても同様な式が得られるが紙面の都合上省略した。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_r^r &= -B_r \sin \psi_i \cos \psi_i [\cot \psi_i - 2 \tan \psi_i - (\rho_h/r_i) \sin \psi_i] \\ &\quad \times \{(3-2\nu) \sin^2 \psi_i + (1-2\nu) \cos^2 \psi_i\} + 4 \sin \psi_i \cos \psi_i \epsilon_0 \\ &\quad + B_r (\rho_h/r_i) \cos \psi_i \{(1-2\nu)[4-3 \ln \{8r_i/(\rho_h \epsilon_0)\}] + 3 - \sin^2 \psi_i\} \epsilon_0 \\ \Delta\sigma_z^z &= B_r \sin \psi_i \cos \psi_i [\cot \psi_i - 2 \tan \psi_i - (\rho_h/r_i) \sin \psi_i] \\ &\quad \times \{(1-2\nu) \sin^2 \psi_i - (1+2\nu) \cos^2 \psi_i\} + 4 \sin \psi_i \cos \psi_i \epsilon_0 \\ &\quad + B_r (\rho_h/r_i) \cos \psi_i \{-(1-2\nu) \ln \{8r_i/(\rho_h \epsilon_0)\} + \cos^2 \psi_i\} \epsilon_0 \\ \Delta\tau_{rz}^r &= B_r \cos^2 \psi_i [-3 \tan \psi_i + (\rho_h/r_i) \sin \psi_i] \\ &\quad \times \{(3-2\nu) \sin^2 \psi_i + (1-2\nu) \cos^2 \psi_i\} + 4 \sin \psi_i \cos \psi_i \epsilon_0 \\ \Delta\sigma_r^z &= -B_z \sin \psi_i \cos \psi_i [-\tan \psi_i + 2 \cot \psi_i - (\rho_h/r_i) \sin \psi_i] \\ &\quad \times \{(1-2\nu) \cos^2 \psi_i - (1+2\nu) \sin^2 \psi_i\} - 4 \sin \psi_i \cos \psi_i \epsilon_0 \\ &\quad + B_z (\rho_h/r_i) \sin \psi_i (2 \sin \psi_i \cos \psi_i) \epsilon_0 \\ \Delta\sigma_z^r &= B_z \sin \psi_i \cos \psi_i [-\tan \psi_i + 2 \cot \psi_i - (\rho_h/r_i) \sin \psi_i] \\ &\quad \times \{(3-2\nu) \cos^2 \psi_i + (1-2\nu) \sin^2 \psi_i\} - 4 \sin \psi_i \cos \psi_i \epsilon_0 \\ \Delta\tau_{rz}^z &= -B_z \sin^2 \psi_i [3 \cot \psi_i - (\rho_h/r_i) \sin \psi_i] \\ &\quad \times \{(3-2\nu) \cos^2 \psi_i + (1-2\nu) \sin^2 \psi_i\} - 4 \sin \psi_i \cos \psi_i \epsilon_0 \\ &\quad - B_z (\rho_h/r_i) \sin \psi_i \{(1-2\nu) \ln \{8r_i/(\rho_h \epsilon_0)\} + \cos^2 \psi_i\} \epsilon_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで, $B_r = \rho_r / \{4\pi(1-\nu)\}, B_z = \rho_z / \{4\pi(1-\nu)\}, \nu$: ポアソン比である。

4. 計算結果

3章に示した手順に従ってV形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数を求める計算プログラムを作製した。最終的な数値は, 有限の分割数から分割数が無限大の場合を外そう⁽²⁾⁽³⁾することによって求めた。計算でポアソン比は0.3とした。

表1は60°V形切欠きを有する丸棒の応力集中係数

K_i を切欠き半径 ρ と切欠き深さ t について系統的に計算した結果をまとめたものである。切欠きが浅い場合 ($t \leq \rho/2$) は円弧形切欠きの結果である。参考のため半円切欠きを有する丸棒の $K_i^{(4)}$ と, ノイバーの三角則によって求めた K_i を示した。

図4は表1の結果を, 縦軸に応力集中係数 K_i , 横軸に $2t/D$ をとって整理したものである。60°V形切欠きの応力集中係数をノイバーの三角則によって評価す

る場合、本論文で計算した範囲 ($2\rho/D \leq 0.03$) で最大 10% 程度の危険側の誤差を含む場合がある。図 4 によれば、危険側の誤差の存在範囲はかなり大きいことがわかる。

図 5 (a), (b) は横軸に $2\rho/D$ をとって結果を整理したもので、図 4 と合わせて使用すれば表 1 に示していない寸法の組合せに対する応力集中係数を求めるのに便利である。

5. 切欠きの形状と応力集中係数の関係についての考察

5.1 半だ円切欠きを有する丸棒の引張り問題における考察 表 2 はすでに報告した半だ円切欠きを有する丸棒の引張り問題⁽⁴⁾で、切欠きの形状比 a/b を一定にして切欠きの相対深さ λ を変化させた場合の応力集中係数の変化を示したものである。また、図 6 は表 2 の応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0} [K_{t0} は $\lambda \rightarrow 0$ における K_t (二次元)] を縦軸にとり、横軸に λ をとって図示したものである。表 2 および図 6 からわかるように半円より鋭い切欠きでは、き裂の場合も含めて、深さが増すことによる応力集中係数の変化の仕方は、切欠きの浅い範囲でよく似ている。特に、ある程度鋭い

切欠きでは K_t/K_{t0} の値は、切欠き深さが極めて深い場合を除いて、 a/b に無関係に λ のみによって決まる

表 1 60° V 形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数 K_{tV}

K_{tV} : 60° V 形切欠きを有する丸棒の K_t
 K_{tE} : 半だ円切欠きを有する丸棒の K_t ⁽⁴⁾
 K_{tN} : ノイバーの三角則によって求めた K_t

2t/D	2ρ/D=0.03			2ρ/D=0.05			2ρ/D=0.1		
	K_{tV}	K_{tE}	K_{tN}	K_{tV}	K_{tE}	K_{tN}	K_{tV}	K_{tE}	K_{tN}
0.02	2.571	2.598	2.55	2.193	2.221	2.19	1.816	1.847	1.83
0.05	3.424	3.411	3.27	2.824	2.832	2.74	2.232	2.257	2.20
0.1	4.181	4.122	3.87	3.387	3.359	3.18	2.596	2.601	2.48
0.2	4.790	4.678	4.32	3.827	3.755	3.49	2.865	2.836	2.64
0.3	4.883	4.741	4.38	3.877	3.781	3.51	2.871	2.824	2.63
0.4	4.732	4.571	4.26	3.742	3.633	3.39	2.754	2.697	2.53
0.5	4.423	4.265	4.02	3.495	3.384	3.20	2.566	2.506	2.38
0.6	4.013	3.865	3.70	3.171	3.065	2.94	2.330	2.274	2.19
0.7	3.516	3.381	3.28	2.777	2.689	2.61	2.055	2.010	1.97
0.8	2.910	2.802	2.75	2.314	2.247	2.21	1.742	1.718	1.70
0.9	2.139	2.077	2.06	1.739	1.712	1.71	1.387	1.386	1.39

2t/D	2ρ/D=0.2			2ρ/D=0.5			2ρ/D=1.0		
	K_{tV}	K_{tE}	K_{tN}	K_{tV}	K_{tE}	K_{tN}	K_{tV}	K_{tE}	K_{tN}
0.02	1.555	1.586	1.58	1.331	1.356	1.35	1.221	1.241	1.23
0.05	1.827	1.856	1.81	1.476	1.505	1.46	1.305	1.330	1.29
0.1	2.050	2.071	1.97	1.582	1.609	1.53	1.356	1.382	1.31
0.2	2.196	2.196	2.05	1.624	1.641	1.53	1.356	1.374	1.30
0.3	2.172	2.158	2.01	1.581	1.587	1.50	1.313	1.322	1.27
0.4	2.071	2.048	1.93	1.503	1.504	1.45	1.260	1.263	1.24
0.5	1.928	1.903	1.82	1.414	1.412	1.38	1.209	1.208	1.21
0.6	1.760	1.740	1.70	1.325	1.323	1.32	1.164	1.162	1.17
0.7	1.579	1.567	1.55	1.240	1.240	1.24	1.123	1.122	1.13
0.8	1.389	1.388	1.39	1.161	1.162	1.17	1.084	1.083	1.09
0.9	1.199	1.201	1.21	1.084	1.085	1.09	1.043	1.044	1.04

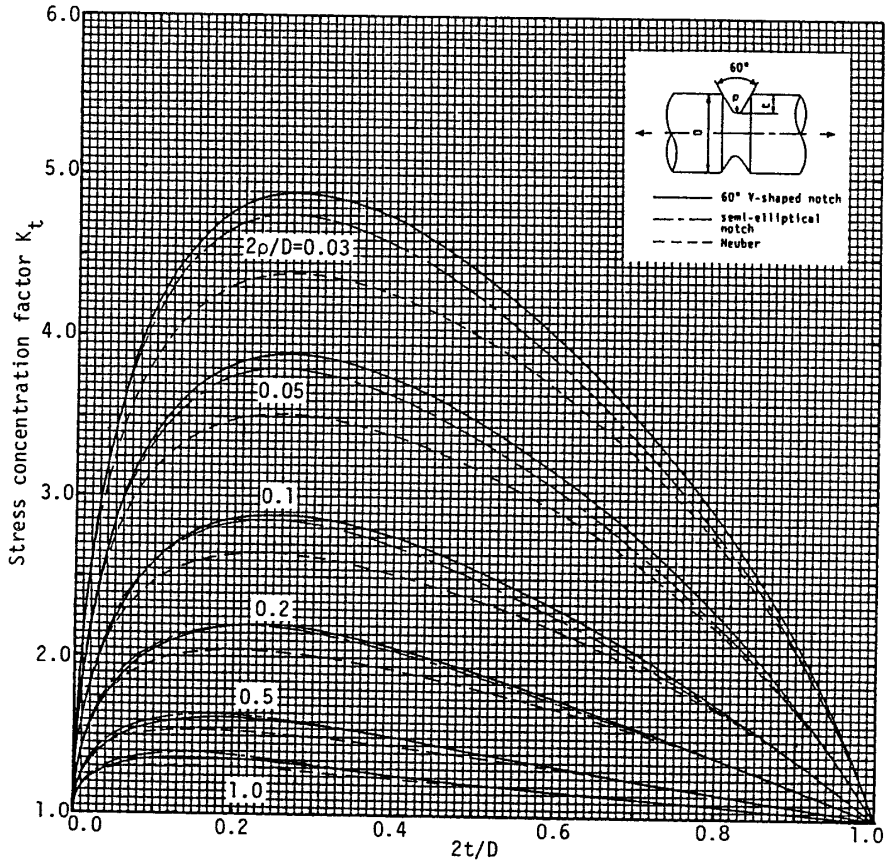
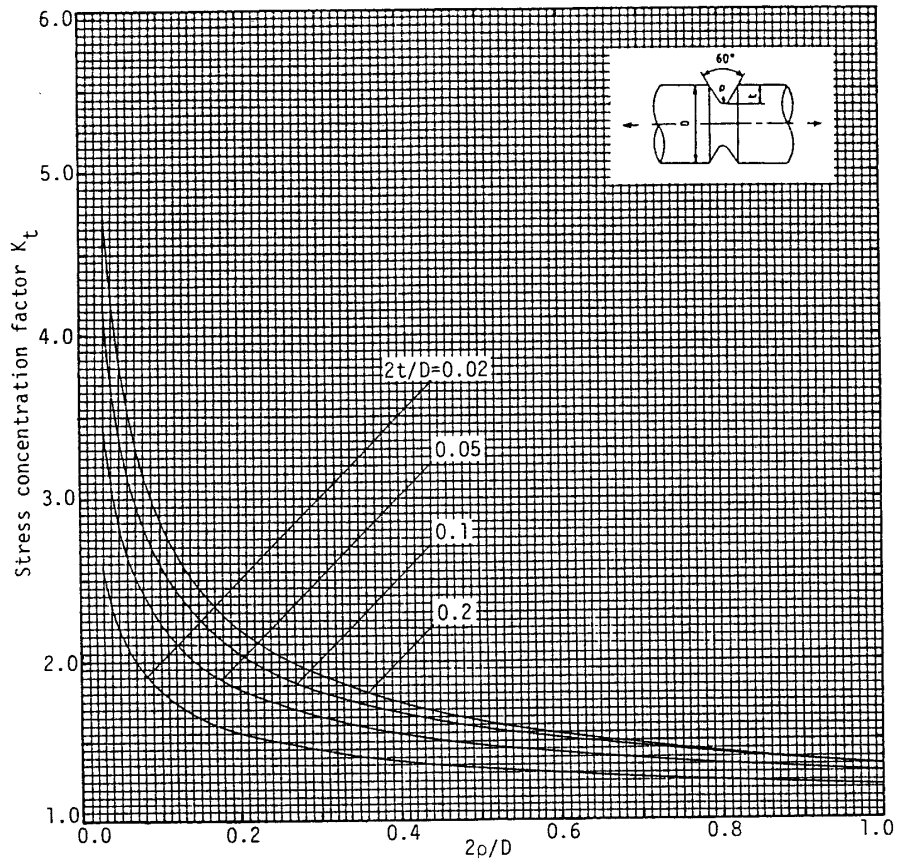
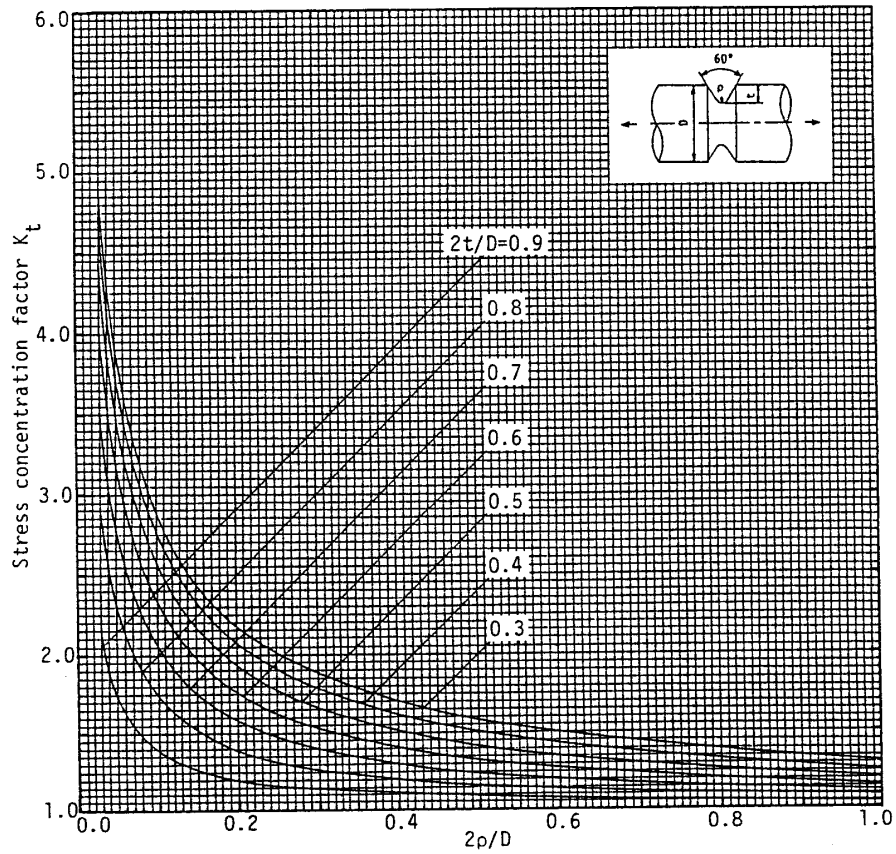


図 4 60° V 形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数 K_t (ρ が一定で t が変化した場合)



(a)



(b)

図 5 60° V 形切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数 K_t (t が一定で ρ が変化した時)

ことが予想される。

図7は半円切欠きを有する半無限板の引張り問題を体積力法によって解析した結果である⁽³⁾。縦軸には、半円切欠き(半無限板)と円孔(無限板)の応力集中係数の比 K_{tE}/K_{tH} をとって整理している。図7によれば切欠きが極端に鋭い場合も含めて半円切欠きの二次元の値を精度よく求めることができる。

表3は半円切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数(表1)において、それぞれの切欠き形状における切欠き深さと切欠き半径の比 t/ρ に対して、図7により二次元の応力集中係数 K_{t0} を求め、 K_t/K_{t0} (三次元と二次元の応力集中係数の比)をまとめて表にしたものである。表3によれば、切欠き形状のかなり広い範囲にわたって、 K_t/K_{t0} の値はほとんど切欠き深さのみによって決まっていることがわかる。ま

表2 半円切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数 K_t ⁽⁴⁾ (a/b が一定の時)

a/b	K_t, F_I			$K_t/K_t _{\lambda=0}, F_I/F_I _{\lambda=0}$		
	1	2	∞	1	2	∞
$\lambda=2a/D$						
0.0	3.065	5.221	1.122	1.000	1.000	1.000
0.02	2.976	—	1.088	0.971	—	0.970
0.03	2.928	—	1.072	0.955	—	0.956
0.05	2.832	4.835	1.038	0.924	0.926	0.926
0.1	2.601	4.446	0.956	0.849	0.852	0.852
0.2	2.196	3.755	0.807	0.716	0.719	0.720
0.3	1.869	3.180	0.683	0.610	0.609	0.609
1/3	1.775	3.010	0.645	0.579	0.577	0.575
0.4	1.610	2.697	0.577	0.525	0.517	0.514
0.5	1.412	2.286	0.485	0.461	0.438	0.433
0.6	1.270	1.935	0.403	0.414	0.371	0.359
2/3	1.201	1.730	0.351	0.392	0.331	0.313
0.7	1.172	1.637	0.326	0.382	0.314	0.290
0.8	1.103	1.388	0.250	0.360	0.266	0.223
0.9	1.048	1.180	0.167	0.342	0.226	0.149
1.0	1.000	1.000	0.000	0.326	0.192	0.000

表3 半円切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0}

$2\rho/D$	$2t/D$	crack	0.02	0.03	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.02		0.970	0.971	0.970	0.969	0.970	0.969	0.968	0.967
0.05		0.926	0.925	0.925	0.924	0.922	0.921	0.919	0.919
0.1		0.852	0.852	0.851	0.850	0.849	0.846	0.845	0.844
0.2		0.720	0.721	0.720	0.719	0.718	0.717	0.716	0.721
0.3		0.609	0.610	0.610	0.609	0.609	0.609	0.613	0.625
0.4		0.514	0.516	0.516	0.516	0.517	0.518	0.529	0.551
0.5		0.433	0.435	0.435	0.435	0.437	0.441	0.461	0.494
0.6		0.359	0.362	0.362	0.363	0.366	0.375	0.406	0.489
0.7		0.290	0.294	0.295	0.297	0.303	0.317	0.359	0.412
0.8		0.223	0.228	0.229	0.234	0.244	0.266	0.320	0.381
0.9		0.149	0.157	0.161	0.169	0.187	0.219	0.286	0.353

た、 $2\rho/D=0.02$ における K_t/K_{t0} の値と、円周き裂を有する丸棒の引張り問題⁽⁹⁾における応力拡大係数の相対値 F_I/F_{I0} [F_{I0} は $\lambda \rightarrow 0$ における F_I (二次元)]とは極めてよく一致していることから、 $2\rho/D < 0.02$ の範囲の鋭い切欠きについても、 K_t/K_{t0} として表3(または図6)におけるき裂の場合の値を用い、 K_{t0} として図7から得られる値(K_{t0} =図7の K_{tE})を用いれば、十分な精度で応力集中係数 K_t を推定できるものと思われる。

5.2 60°V 形切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数 前節の方法を60°V 形切欠きを有する丸棒の問題に適用するためには、60°V 形切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数を知る必要がある。表4は60°V 形切欠きを有する半無限板の引張り問題において、切欠き形状がかなり鋭い範囲まで追加計算を行って得た結果をまとめたものである。また、図8は縦軸に60°V 形切欠き(半無限板)

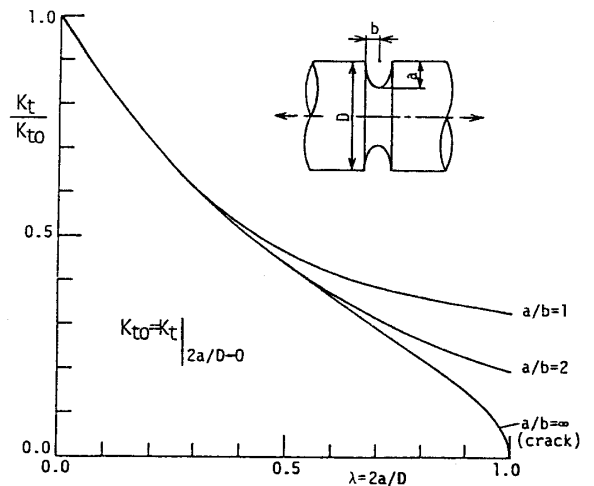


図6 半円切欠きを有する丸棒の引張りにおける K_t/K_{t0} と λ の関係⁽⁴⁾ (a/b が一定の時)

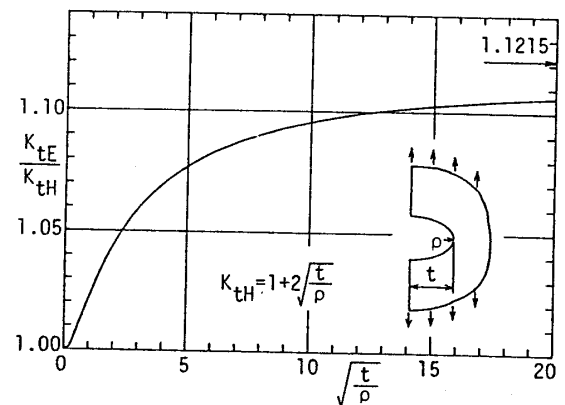


図7 半円切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数⁽³⁾

とだ円孔（無限板）の応力集中係数の比 K_{tV}/K_{tH} をとり、横軸に $\sqrt{t/\rho}$ をとって表 4 の結果を整理したものである。 $\sqrt{t/\rho} \rightarrow \infty$ の時の K_{tV}/K_{tH} の値は知られていないが、60° V 形切欠きと半だ円切欠きの応力集中係数の比 K_{tV}/K_{tE} を縦軸にとって整理した図 9 によれば、 $\sqrt{t/\rho} \rightarrow \infty$ において $K_{tV}/K_{tE} \cong 1.04$ 程度に収束するようである。図 8 および図 9 などを利用することによって、切欠きがかなり鋭い場合まで 60° V 形切欠きの二次元における応力集中係数を精度よく求めることができる。

表 4 60° V 形切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数 K_{tV}

$\frac{t}{\rho}$	$\sqrt{\frac{t}{\rho}}$	K_{tV}	K_{tE}	K_{tH}
0.0625	0.25	1.474	1.503	1.5
0.25	0.5	1.983	2.016	2
1	1	3.065	3.065	3
2	1.414	3.995	3.951	3.828
4	2	5.331	5.221	5
8	2.828	7.243	7.036	6.657
16	4	9.958	9.623	9
36	6	14.58	14.07	13
64	8	19.20	18.53	17
100	10	23.8	23.00	21
225	15	35.4	34.19	31
400	20	47	45.39	41

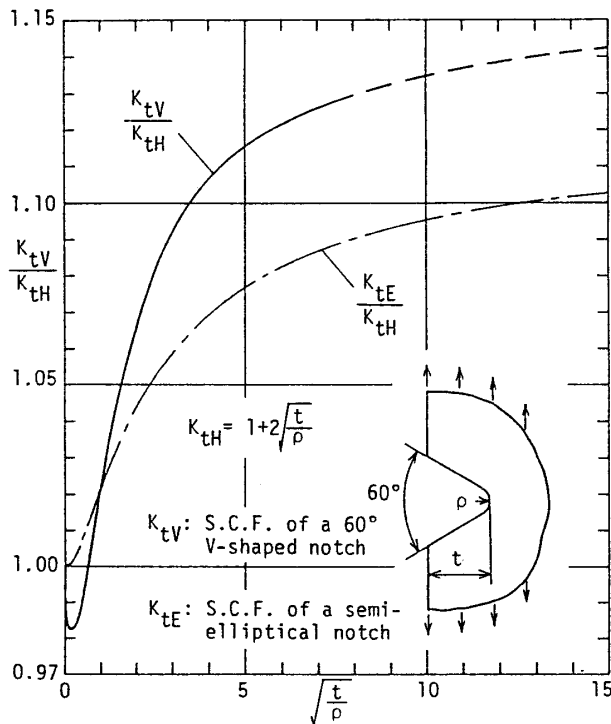


図 8 60° V 形切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数 K_{tV}

5.3 60° V 形切欠きを有する丸棒の引張り問題における考察 半だ円切欠きを有する丸棒の場合に確認した K_t/K_{t0} (三次元と二次元の応力集中係数の比) が切欠きが鋭い場合には切欠きの形に無関係にほとんど切欠き深さの相対値 λ のみによって決まるという事実を利用すれば、60° V 形切欠きを有する丸棒において切欠きがある程度鋭い場合の応力集中係数は次のような手順で求めることができる。

(1) 与えられた切欠き深さを切欠き半径の比 t/ρ より、二次元の 60° V 形切欠きの応力集中係数 K_{t0} を図 8 および図 9 などを利用して求める ($K_{t0} =$ 図 8, 9 の K_{tV})。

(2) 与えられた切欠き深さの相対値 $2t/D$ より、 K_t/K_{t0} (三次元と二次元の応力集中係数の比) を表 3 (または図 6) のき裂の場合から求める。

(3) $K_t = K_{t0} \times (K_t/K_{t0})$ より、V 形切欠きを有する丸棒の K_t が求まる。

以上の手順によって求めた応力集中係数の推定値の例を表 5 に示す。表 5 の例では、体積法による解析結果 (表 1) との比較から、応力集中係数が誤差 1% 以内の精度で求まっていることがわかる。実用上重要な $2t/D \leq 0.5$ の範囲ならば、体積法による計算を行っていない鋭い切欠き ($2\rho/D < 0.03$) についても、同程度の精度で応力集中係数が推定できるものと思われる。

表 6 は 60° V 形切欠きを有する丸棒の引張り問題における体積法による解析結果 (表 1) と半無限板にお

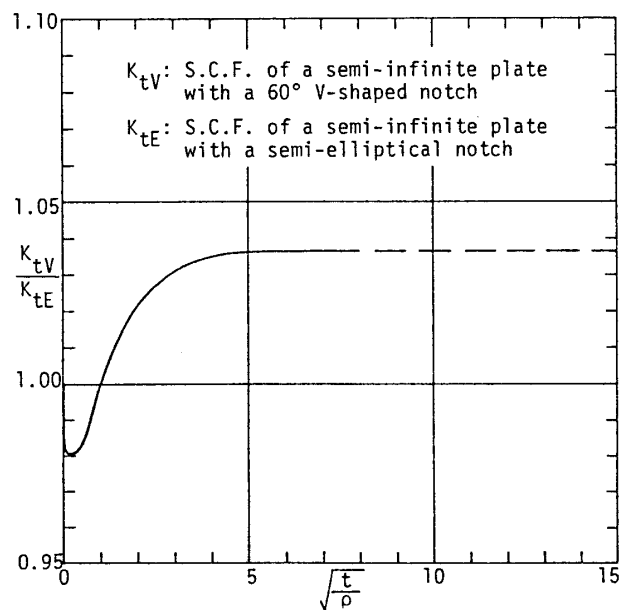


図 9 半無限板における 60° V 形切欠きと半だ円切欠きの応力集中係数の比 K_{tV}/K_{tE} と $\sqrt{t/\rho}$ の関係

表5 60°V形切欠きを有する丸棒の引張り(図1)における応力集中係数の推定値 K_{tV}

[K_{tV} : 二次元の K_t (図8) から推定して求めた K_t
 K_{tV} : 体積法による解析結果 (表1)
 K_{tN} : ノイバーの三角則によって求めた K_t]

2t/D	2ρ/D=0.03			2ρ/D=0.05		
	K_{tV}^*	K_{tV}	K_{tN}	K_{tV}^*	K_{tV}	K_{tN}
0.02	2.58	2.571	2.55	2.20	2.193	2.19
0.05	3.44	3.424	3.27	2.84	2.824	2.74
0.1	4.20	4.181	3.87	3.40	3.387	3.18
0.2	4.81	4.790	4.32	3.84	3.827	3.49
0.3	4.88	4.883	4.38	3.88	3.877	3.51
0.4	4.70	4.732	4.26	3.72	3.742	3.39
0.5	4.40	4.423	4.02	3.47	3.495	3.20

ける60°V形切欠きの応力集中係数(5・2節)とから、それぞれの切欠き形状において K_t/K_{t0} (三次元と二次元の応力集中係数の比) を求め、まとめたものである。表6によれば、実用上重要な切欠き深さの浅い切欠きでは、切欠き半径のかなり広い範囲について K_t/K_{t0} として円周き裂の場合の値を用いて評価できることがわかる。表6の結果は、本論文で述べた応力集中係数の推定法の適用範囲と誤差の程度を知るうえで有効であると思われる。

6. 結 言

本論文では60°V形切欠きを有する丸棒の引張り問題(図1)を中心に考察した。結果をまとめると次のようになる。

(1) 体積法による解析を行い、寸法比を系統的に変えて60°V形切欠きを有する丸棒の応力集中係数を計算した。得られた結果から、設計や研究用として応力集中係数表(表1)と線図(図4, 5)を作成した。

(2) K_t/K_{t0} [60°V形切欠きを有する丸棒(三次元)と60°V形切欠きを有する半無限板(二次元)の応力集

表6 60°V形切欠きを有する丸棒の引張り(図1)における応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0}

[太線の枠内は、き裂の K_t/K_{t0} の値と二次元のV形切欠きの応力集中係数とから K_t が誤差1%以内の精度で推定できる範囲を示す。]

2ρ/D	crack	2t/D					
2t/D		0.03	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.02	0.970	0.967	0.969	0.969	0.968	0.968	0.969
0.05	0.926	0.922	0.921	0.921	0.921	0.919	0.918
0.1	0.852	0.847	0.848	0.847	0.846	0.844	0.844
0.2	0.720	0.717	0.718	0.717	0.717	0.717	0.724
0.3	0.609	0.609	0.609	0.609	0.609	0.615	0.630
0.4	0.514	0.518	0.517	0.517	0.518	0.531	0.557
0.5	0.433	0.436	0.436	0.437	0.441	0.461	0.499
0.6	0.359	0.363	0.364	0.366	0.380	0.406	0.453
0.7	0.290	0.296	0.297	0.301	0.314	0.357	0.415
0.8	0.223	0.230	0.232	0.241	0.261	0.318	0.383
0.9	0.149	0.160	0.165	0.182	0.214	0.283	0.353

中係数の比] を、それぞれの切欠き形状について求めると、 K_t/K_{t0} の値は切欠きが鋭い場合にはほとんど切欠き深さ(2t/D)のみによって決まる(表6)。この事実を利用すれば、二次元問題におけるV形切欠きの応力集中係数(図8)から、解析が困難な鋭いV形切欠きを有する丸棒の応力集中係数(三次元)が推定できる。

文 献

- (1) Nevber, H., *Kerbspannung Slehre*, (第1版), (1937); (第2版), (1957), 9, Springer-Verlag.
- (2) 西谷, 機誌, 70-580, (昭42), 627.
- (3) Nisitani, H. (Sih, G. C. 編), *Mechanics of Fracture*, 5 (1978), Noordhoff Int. Pub.
- (4) 西谷・ほか2名, 機論, 49-441, A (昭58), 602.
- (5) 村上・ほか2名, 機論, 48-427, A (昭57), 312.
- (6) 村上・ほか2名, 機論, 48-430, A (昭57), 800.
- (7) 西谷・野田, 機論, 50-457, A (昭59), 1592.
- (8) 西谷・野田, 機講論, No. 830-1 (昭58-3), 105.
- (9) 西谷・野田, 機論, 50-453, A (昭59), 847.

討 論

〔質問〕 長谷川 久夫 (明治大学工学部)

(1) 応力集中係数についての深いご考察, 興味深く拝読させていただいた。本論文のV形切欠きの結果は、切欠き面に沿う境界条件の満足度をどの程度の目安にして得られたものか。また、本結果の精度の推定は何%くらいか。付表1は表1の結果と質問者の結果(かっこ内)(付1)を比較したもので、最大で1.5%程度の差があるが、かっこ内の値の精度は1%くらいと推定している。

(2) 表3と表6の相対値はかなり近い値でき裂の

場合は一致しているが、必ずしも一致していない。これは切欠きの形の相違によるものか、計算精度によるものか。

(3) 本解法では、応力集中係数と応力拡大係数のどちらの方が求めやすい(解法と精度)のか。

〔回答〕 (1) 境界条件の満足度については、本研究で直接検討していないが、これまでの経験などから表1に示した数値については、現在のところほぼ小数点以下三けたまで有効であると考えている。

付表1で比較していただいた質問者の円弧形切欠き

付表 1 応力集中係数

$\frac{2\rho/D}{2t/D}$	0.1	0.2	0.5
0.1	2.596 (2.593)	2.050 (2.063)	1.582 (1.558)
0.2		2.196 (2.191)	1.624 (1.642)
0.3			1.581 (1.583)
0.4			1.503 (1.504)
0.5			1.414 (1.411)

の結果(付1)は、切欠きが極端に浅い場合を除き、本論文の結果とかなりよく一致していると思う。(ただし、厳密には $t > \rho/2$ の場合には、60°V 形と円弧形の切欠き形状の違いがごくわずかながら影響する場合がある)。

参考のため分割数 (n_1, n_2, n_3) を変化させた時の応力集中係数の変化の例を付表 2 に示す。この例に示すように総分割数 $n_t (= n_1 + n_2 + n_3)$ が有限であるための誤差がほぼ $1/n_t$ に比例していることを確認して、最終的な結果 (n_t が無限大の場合) を外そうによって求めている。

(2), (3) 開き角 60° の円周き裂を有する丸棒の問題については本論文では解析を行っていない。表 6 のき裂の場合は文献(9)の開き角 0° の円周き裂の結果を引用したものである。

(付1) 長谷川, 機論, 49-440, A (昭58), 512.

付表 2 分割数を変化させた時の応力集中係数の変化の例

$2\rho/D$	$2t/D$	notch shape	n_1	n_2	n_3	K_t
0.1	0.1	60° V-shaped notch	2	1	12	2.616568
			4	2	24	2.606876
			6	3	36	2.603321
			∞_{2-4}			2.597
			∞_{4-6}			2.596
0.1	0.1	Semi-circular notch	4		24	2.589401
			6	-	36	2.593076
			8		48	2.595048
			∞_{4-6}			2.600
		[Ref. (4)]	∞_{6-8}			2.601
0.5	0.1	Circular-arc notch	8		40	1.591000
			12	-	60	1.588207
			16		80	1.586746
			∞_{8-12}			1.583
			∞_{12-16}			1.582

[∞_{2-4} などは $n_1=2$ と $n_1=4$ の結果から外そうして得た値であることを意味する。]

ご指摘のように表 3 (半だ円) と表 6 (60°V) の応力集中係数の相対値はわずかながら違いがあるが、これは主として切欠き形状の相違によるものと考えている。したがって、鋭い 60°V 形切欠き ($2\rho/D < 0.03$) の応力集中係数を本論文中に示した方法により推定する増分、厳密には開き角 60° の円周き裂の解析を行うことが望ましいわけである。

しかしながら、両者の差はさほど大きくないので、表 6 に示したように、開き角 0° のき裂の結果を用いても切欠き形状の広い範囲について精度 1% 程度以内で応力集中係数を推定することができる。