

浅い円弧形切欠きを有する疲労試験片のねじり, 引張り,
曲げにおける応力集中*

西谷 弘信**, 野田 尚昭***

Stress Concentration of a Fatigue Test Specimen Having
a Partially-Circular Circumferential Notch under Torsion,
Tension or Bending

by Hironobu NISITANI and Nao-aki NODA

The body force method is applied to calculate stress concentration factors of partially-circular circumferential notched cylindrical specimens subjected to torsion, tension or bending. This type specimen is used frequently for fatigue tests. The stress field induced by a ring force in an infinite body is used to solve these problems. The fundamental solutions and calculation method developed here have a wide applicability for various kinds of axisymmetric notch problems under torsion, tension or bending. Through the comparison of the present result with Neuber's analytical solution for a deep hyperbolic notch, the Neuber's solution is found to give a sufficient accuracy for a blunt notch in engineering use.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Stress Concentration, Test Specimen, Partially-Circular Circumferential Notch, Torsion, Tension, Bending, Neuber's Solution

1. 緒 言

浅い円弧形切欠きを有する丸棒試験片(図1)は, 金属材料の疲労試験——(1)繰返しねじり, (2)引張り圧縮, (3)回転曲げ——において, しばしば用いられている。これらごく浅い切欠きの応力集中係数は, 厳密な解析が困難であるため, これまでノイバーの近似値⁽¹⁾がよく用いられてきた。しかしながら, 最近の実験技術の進歩に伴う疲労機構などの詳細な究明のためには, 正確な応力集中の状態を知ることが要求される。

著者らは, これまでに, 半だ円切欠きおよび60°V形切欠きを有する丸棒の応力集中問題を, 体積法による解析により, 考察を行ってきた^{(2)~(6)}。本論文では, 浅い円弧形切欠きを有する疲労試験片のねじり, 引張り, 曲げ問題を統一的に取扱う。円弧形切欠きについても, これまでいくつか計算はなされている⁽⁷⁾が, 実際に試験片としてよく用いられる切欠き半径 ρ が大きい場合については, 精度の高い解析が難しいので報

告されていない。なお, ここでは, ねじり, 引張り, 曲げ問題の基本解と数値計算の手順を統一的に表示し, 相互の関連を明らかにした。このことは, 体積法を種々の問題に適用していく際に有効であると思われる。

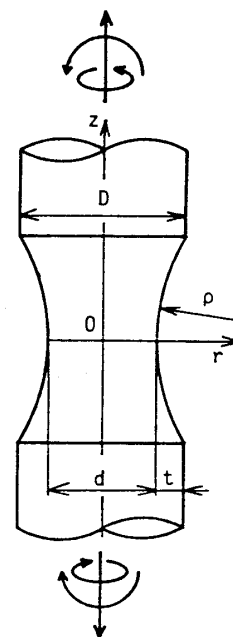


図1 浅い円弧形切欠きを有する疲労試験片のねじり, 引張り, 曲げ

* 昭和59年11月29日 第929回講演会において講演, 原稿受付 昭和59年4月27日

** 正員, 九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1).

*** 正員, 九州工業大学(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1).

2. 計算方法

体積法は1967年、西谷により二次元応力問題の電子計算機による解法として提案された⁽⁶⁾。発展の初期には多くの二次元問題が解かれた⁽⁹⁾ほか、最近では重要な三次元き裂問題も解析がなされ、解法の汎用性が高められている。体積法は最近活発に研究が行われるようになった境界要素法と本質的にはよく似ている⁽¹¹⁾。しかしながら、体積法は体積力の密度の定義の仕方など特別な工夫により計算精度を高めている。

体積法を三次元軸対称問題に適用する場合、無限体中の一円周上に作用する集中力の輪(図2, 3, 4)による任意の点の応力の式を基本解として使用する。具体的には、無限体中において、丸棒円筒面および円周切欠きとなるべき仮想境界上に集中力の輪を連続的に作用させ、 \ominus 境界⁽⁸⁾(力を作用させる点の内側で無限に近い点からなる境界)で境界条件を満足させる。

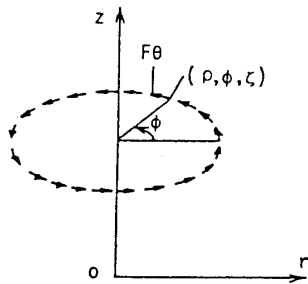
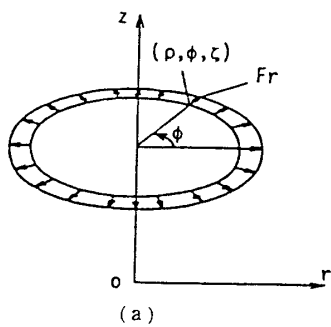
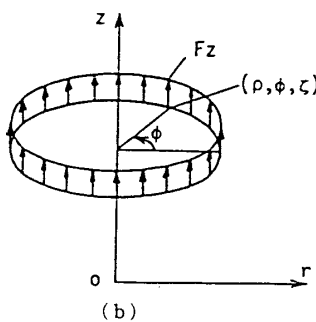


図2 ねじり問題における基本解



(a)

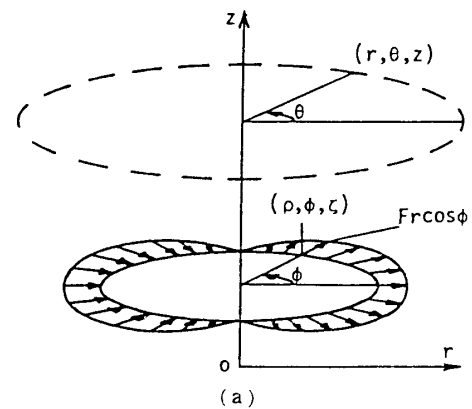


(b)

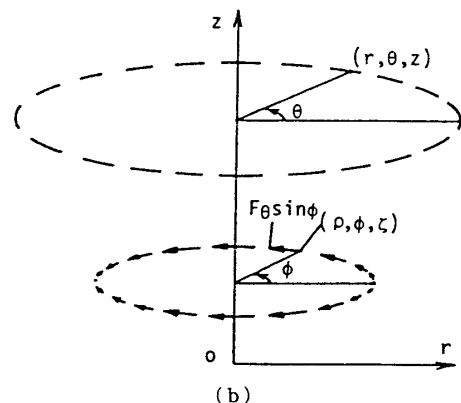
図3 引張り問題における基本解

円周切欠きを有する丸棒の引張り問題とねじり問題では、形状だけでなく応力場も軸対称となる。したがって、これらの問題では、一円周上に作用する軸対称な分布力が基本解となる。ねじり問題では、図2に示す周方向に作用する集中力の輪が、引張り問題では、図3に示す半径方向および軸方向に作用する集中力の輪が基本解となることは容易に理解できる。

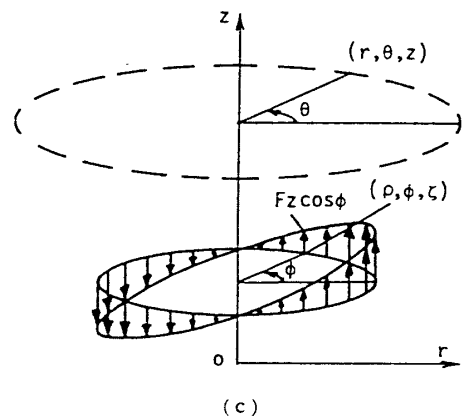
一方、曲げ問題では、曲げモーメントにより生じる応力場が非軸対称となるので、基本解は自明ではないが、満足すべき境界条件と、基本解によって生じる応力場の性質を考察することによって3種類の基本解{図4(a), (b), (c)}が決定される⁽⁶⁾。この場合の応力場は式(1)の形式で表される。



(a)



(b)



(c)

図4 曲げ問題における基本解

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f_1(r, \rho, z, \zeta) \cos \theta, & \sigma_\theta &= f_2(r, \rho, z, \zeta) \cos \theta, & \sigma_z &= f_3(r, \rho, z, \zeta) \cos \theta \\ \tau_{rz} &= f_4(r, \rho, z, \zeta) \cos \theta, & \tau_{r\theta} &= f_5(r, \rho, z, \zeta) \sin \theta, & \tau_{\theta z} &= f_6(r, \rho, z, \zeta) \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで, (r, θ, z) は注目点の円柱座標, (ρ, φ, ζ) は着力点の円柱座標である。

3. ねじり, 引張り, 曲げ問題の基本解

2章に示したねじり, 引張り, 曲げ問題における各基本解は, 無限体中の一点に作用する集中力による任意の点の応力の式を積分することによって求めることができる。それらは以下ようになる。

(1) ねじり問題における基本解(図2)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{r\theta}^{F\theta*} &= \frac{F_\theta \rho}{2\pi r_m^3} (-\rho I_0 - r I_1 + 2\rho I_2), & \tau_{\theta z}^{F\theta*} &= \frac{F_\theta \rho}{2\pi r_m^3} \bar{z} I_1 \\ (\sigma_r^{F\theta*} &= \sigma_\theta^{F\theta*} = \sigma_z^{F\theta*} = \tau_{rz}^{F\theta*} = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(2) 引張り問題における基本解(図3)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{F_r*} &= \frac{F_r \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-\rho I_0 - r I_1 + 2\rho I_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{r_m^2} \{r^2 \rho J_0 - r(r^2 + 2\rho^2) J_1 + \rho(2r^2 + \rho^2) J_2 - r\rho^2 J_3\} \right] \\ \sigma_\theta^{F_r*} &= \frac{F_r \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(\rho I_0 + r I_1 - 2\rho I_2) + \frac{3\rho^2}{r_m^2} (\rho J_0 - r J_1 - \rho J_2 + r J_3) \right] \\ \sigma_z^{F_r*} &= \frac{F_r \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-\rho I_0 + r I_1) + \frac{3\bar{z}^2}{r_m^2} (\rho J_0 - r J_1) \right] \\ \tau_{rz}^{F_r*} &= \frac{F_r \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(-I_1) + \frac{3\bar{z}}{r_m^2} \{r\rho J_0 - (r^2 + \rho^2) J_1 + r\rho J_2\} \right] \\ (\tau_{r\theta}^{F_r*} &= \tau_{\theta z}^{F_r*} = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{F_z*} &= \frac{F_z \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z} I_0 + \frac{3\bar{z}}{r_m^2} (-r^2 J_0 + 2r\rho J_1 - \rho^2 J_2) \right] \\ \sigma_\theta^{F_z*} &= \frac{F_z \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z} I_0 + \frac{3\bar{z}\rho^2}{r_m^2} (-J_0 + J_2) \right] \\ \sigma_z^{F_z*} &= \frac{F_z \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(-I_0) + \frac{3\bar{z}^3}{r_m^2} (-J_0) \right] \\ \tau_{rz}^{F_z*} &= \frac{F_z \rho}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-r I_0 + \rho I_1) + \frac{3\bar{z}^2}{r_m^2} (-r J_0 + \rho J_1) \right] \\ (\tau_{r\theta}^{F_z*} &= \tau_{\theta z}^{F_z*} = 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3 \cdot b)$$

(3) 曲げ問題における基本解(図4)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{F_r \cos \varphi*} &= \frac{F_r \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-\rho I_1 - r I_2 + 2\rho I_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{r_m^2} \{r^2 \rho J_1 - r(r^2 + 2\rho^2) J_2 + \rho(2r^2 + \rho^2) J_3 - r\rho^2 J_4\} \right] \\ \sigma_\theta^{F_r \cos \varphi*} &= \frac{F_r \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(\rho I_1 + r I_2 - 2\rho I_3) + \frac{3\rho^2}{r_m^2} (\rho J_1 - r J_2 - \rho J_3 + r J_4) \right] \\ \sigma_z^{F_r \cos \varphi*} &= \frac{F_r \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-\rho I_1 + r I_2) + \frac{3\bar{z}^2}{r_m^2} (\rho J_1 - r J_2) \right] \\ \tau_{rz}^{F_r \cos \varphi*} &= \frac{F_r \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(-I_2) + \frac{3\bar{z}}{r_m^2} \{r\rho J_1 - (r^2 + \rho^2) J_2 + r\rho J_3\} \right] \\ \tau_{r\theta}^{F_r \cos \varphi*} &= \frac{F_r \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(r I_0 - 2\rho I_1 - r I_2 + 2\rho I_3) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3\rho}{r_m^2} \{r\rho J_0 - (r^2 + \rho^2) J_1 + (r^2 + \rho^2) J_3 - r\rho J_4\} \right] \\ \tau_{\theta z}^{F_r \cos \varphi*} &= \frac{F_r \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(I_0 - I_1) + \frac{3\bar{z}\rho}{r_m^2} (\rho J_0 - r J_1 - \rho J_2 + r J_3) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r^{F\theta \sin \varphi^*} &= \frac{F_\theta \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(rI_0 - 2\rho I_1 - rI_2 + 2\rho I_3) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3\rho}{r_m^2} \{ r^2 J_0 - 2r\rho J_1 - (r^2 - \rho^2) J_2 + 2r\rho J_3 - \rho^2 J_4 \} \right] \\
 \sigma_\theta^{F\theta \sin \varphi^*} &= \frac{F_\theta \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-rI_0 + 2\rho I_1 + rI_2 - 2\rho I_3) + \frac{3r\rho^2}{r_m^2} (J_0 - 2J_2 + 4J_4) \right] \\
 \sigma_z^{F\theta \sin \varphi^*} &= \frac{F_\theta \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)r(-I_0 + I_2) + \frac{3r\bar{z}}{r_m^2} (J_0 - J_2) \right] \\
 \tau_{rz}^{F\theta \sin \varphi^*} &= \frac{F_\theta \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(I_0 - I_2) + \frac{3r\bar{z}}{r_m^2} (rJ_0 - \rho J_1 - rJ_2 + \rho J_3) \right] \\
 \tau_{r\theta}^{F\theta \sin \varphi^*} &= \frac{F_\theta \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-\rho I_1 - rI_2 + 2\rho I_3) + \frac{3r\rho}{r_m^2} (-rJ_1 + \rho J_2 + rJ_3 - \rho J_4) \right] \\
 \tau_{\theta z}^{F\theta \sin \varphi^*} &= \frac{F_\theta \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(-I_2) + \frac{3r\rho\bar{z}}{r_m^2} (-J_1 + J_3) \right] \\
 \sigma_r^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}I_1 + \frac{3\bar{z}}{r_m^2} (-r^2 J_1 + 2r\rho J_2 - \rho^2 J_3) \right] \\
 \sigma_\theta^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}I_1 + \frac{3\bar{z}\rho^2}{r_m^2} (-J_1 + J_3) \right] \\
 \sigma_z^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(-I_1) + \frac{3\bar{z}^3}{r_m^2} (-J_1) \right] \\
 \tau_{rz}^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-rI_1 + \rho I_2) + \frac{3\bar{z}^2}{r_m^2} (-rJ_1 + \rho J_2) \right] \\
 \tau_{r\theta}^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[\frac{3\rho\bar{z}}{r_m^2} (-rJ_0 + \rho J_1 + rJ_2 - \rho J_3) \right] \\
 \tau_{\theta z}^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\rho(-I_0 + I_2) + \frac{3\rho\bar{z}^2}{r_m^2} (-J_0 + J_2) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}I_1 + \frac{3\bar{z}}{r_m^2} (-r^2 J_1 + 2r\rho J_2 - \rho^2 J_3) \right] \\
 \sigma_\theta^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}I_1 + \frac{3\bar{z}\rho^2}{r_m^2} (-J_1 + J_3) \right] \\
 \sigma_z^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\bar{z}(-I_1) + \frac{3\bar{z}^3}{r_m^2} (-J_1) \right] \\
 \tau_{rz}^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \cos \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)(-rI_1 + \rho I_2) + \frac{3\bar{z}^2}{r_m^2} (-rJ_1 + \rho J_2) \right] \\
 \tau_{r\theta}^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[\frac{3\rho\bar{z}}{r_m^2} (-rJ_0 + \rho J_1 + rJ_2 - \rho J_3) \right] \\
 \tau_{\theta z}^{Fz \cos \varphi^*} &= \frac{F_z \rho \sin \theta}{4\pi(1-\nu)r_m^3} \left[(1-2\nu)\rho(-I_0 + I_2) + \frac{3\rho\bar{z}^2}{r_m^2} (-J_0 + J_2) \right]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4 \cdot c)$$

ここで、

$$r_m = \sqrt{2r\rho}, \quad \bar{z} = z - \zeta, \quad I_n = \int_0^\pi \frac{\cos^n \varphi}{(e - \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi, \quad J_n = \int_0^\pi \frac{\cos^n \varphi}{(e - \cos \varphi)^{5/2}} d\varphi$$

$$I_0 = \frac{1}{e^2 - 1} K_1, \quad I_1 = \frac{e}{e^2 - 1} K_1 - K_2, \quad I_2 = \frac{2e^2 - 1}{e^2 - 1} K_1 - 2eK_2$$

$$I_3 = \frac{e(8e^2 - 5)}{3(e^2 - 1)} K_1 - \frac{8e^2 + 1}{3} K_2, \quad J_0 = \frac{4e}{3(e^2 - 1)^2} K_1 - \frac{1}{3(e^2 - 1)} K_2$$

$$J_1 = \frac{e^2 + 3}{3(e^2 - 1)^2} K_1 - \frac{e}{3(e^2 - 1)} K_2, \quad J_2 = -\frac{2e(e^2 - 3)}{3(e^2 - 1)^2} K_1 + \frac{2e^2 - 3}{3(e^2 - 1)} K_2$$

$$J_3 = \frac{-8e^4 + 15e^2 - 3}{3(e^2 - 1)^2} K_1 + \frac{e(8e^2 - 9)}{3(e^2 - 1)} K_2$$

$$J_4 = \frac{4e(-4e^4 + 7e^2 - 2)}{3(e^2 - 1)^2} K_1 + \frac{16e^4 - 16e^2 - 1}{3(e^2 - 1)} K_2$$

$$K_1 = \int_0^\pi (e - \cos \varphi)^{1/2} d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{k} E(k), \quad K_2 = \int_0^\pi (e - \cos \varphi)^{-1/2} d\varphi = \sqrt{2} k K(k)$$

$K(k), E(k)$ は第 1 種および第 2 種の完全な円積分である。

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda, \quad k = \sqrt{\frac{2}{e+1}}, \quad e = 1 + \frac{(r-\rho)^2 + (z-\zeta)^2}{2r\rho}$$

..... (5)

4. 体積力の密度の定義

3章で示した基本解を用いれば、本解法は、無限体中に想定した丸棒円筒面や円周切欠きとなるべき仮想境界上に連続的に作用させるべき基本解の強さ、すなわち体積力の密度を決定する問題に還元される。面積 $\rho d\varphi ds$ ($ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (d\zeta)^2}$) の微小要素に働く体積力の合力の成分を dP_r, dP_θ, dP_z とするとき、体積力の密度 $\rho_r, \rho_\theta, \rho_z$ を次

のように定義する。

(1) ねじり問題

$$\rho_\theta = \frac{d}{2\rho} \frac{dP_\theta}{\rho d\varphi d\zeta} \quad (\text{切欠き部}) ; \rho_\theta = \frac{dP_\theta}{\rho d\varphi d\zeta} \quad (\text{丸棒円筒面}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

(2) 引張り問題

$$\rho_r = \frac{dP_r}{\rho d\varphi d\zeta}, \quad \rho_z = \frac{dP_z}{\rho d\rho d\varphi} \quad (\text{切欠き部}) ; \rho_r = \frac{dP_r}{\rho d\varphi d\zeta}, \quad \rho_z = \frac{dP_z}{\rho d\varphi d\zeta} \quad (\text{丸棒円筒面}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

(3) 曲げ問題

$$\left. \begin{aligned} \rho_r \cos \varphi &= \frac{dP_r}{\rho d\varphi d\zeta}, \quad \rho_\theta \sin \varphi = \frac{dP_\theta}{\rho d\varphi ds}, \quad \rho_z \cos \varphi = \frac{d}{2\rho} \frac{dP_z}{\rho d\varphi d\rho} \quad (\text{切欠き部}) \\ \rho_r \cos \varphi &= \frac{dP_r}{\rho d\varphi d\zeta}, \quad \rho_\theta \sin \varphi = \frac{dP_\theta}{\rho d\varphi d\zeta}, \quad \rho_z \cos \varphi = \frac{dP_z}{\rho d\varphi d\zeta} \quad (\text{丸棒円筒面}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

切欠き部における体積力の密度の定義で、ねじり問題における ρ_θ と曲げ問題における ρ_z については、打消すべき無限遠でのねじり応力 $\tau_{\theta z}^\infty$ と曲げ応力 σ_z^∞ に対応して、このような定義にすると精度向上のため都合がよい。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\theta z}^\infty &= \tau_0(2r/d) \quad (\tau_0 \text{ はねじりモーメントの大きさを表す定数}) \\ \sigma_z^\infty &= \sigma_0(2r/d)\cos \theta \quad (\sigma_0 \text{ は曲げモーメントの大きさを表す定数}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

体積力の密度は、一般に連続的に変化しているべきものであるから、それらを数値計算上階段状の分布で置き換える際には、なるべくそれらが一定になるような定義(隣り合う区間と区間の段の差がなるべく小さくなるような定義)が望ましい。この立場から、体積力法では問題に応じて体積力の密度の定義を工夫して計算精度を高めている。

5. 数値計算の具体的方法

図5は無窮体中に想定した体積力を分布させるべき仮想境界を示したものである。円筒面 $r=D/2$ に生じるせん断応力をあらかじめ小さくしておくため、切欠きとなるべき境界 BAB' のほかに $BA'B'$ にも同じ密度の体積力を分布させた。分布させるべき体積力の密度は閉じた形では求まらないので、切欠き部 AB を

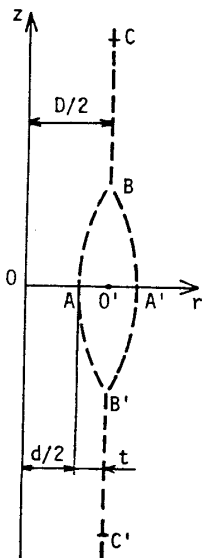


図5 無窮体中に想定した体積力を分布させるべき仮想境界

n_1 分割、丸棒円筒面 BC を n_2 分割して、分割した各区間の注目点(区間の中点)で境界条件を満たすよう各区間に分布させる体積力の密度を決定する。

分割した区間を A の側から B, C のほうへ番号をつける。問題の対称性から、境界条件は $z>0$ の範囲で満たせばよいから、 i 番めの注目点とは ABC 間にある i 番めの区間の中点を指すものとする。また、 i 番めの着力区間とは、切欠き部では、 $AB, AB', A'B, A'B'$ の対応する j 番めの区間を指し、丸棒円筒面では $BC, B'C'$ の対応する j 番めの区間を指すものと約束する。丸棒円筒面の分割は、切欠きに近いところでは細かい分割にして、切欠きから離れるにつれて分割をあらくした。

j 番めの区間に単位密度の体積力を分布させた時の i 番めの注目点における応力の式 $\sigma_i^{rj}, \sigma_i^{\theta j}, \sigma_i^{zj}$ (影響係数)は、3章で定義した集中力の輪による応力の式(式(2)~(4))を積分することによって求めることができる。

(1) ねじり問題

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^{\theta j} &= \int_j \sigma^{F\theta*} \Big|_{F\theta=1} \frac{2\rho}{d} d\rho \quad (j=1\sim n_1) \\ \sigma_i^{zj} &= \int_j \sigma^{Fz*} \Big|_{Fz=1} d\zeta \quad (j=n_1+1\sim n_1+n_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

(2) 引張り問題

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^{rj} &= \int_j \sigma^{Fr*} \Big|_{Fr=1} d\zeta \\ \sigma_i^{zj} &= \int_j \sigma^{Fz*} \Big|_{Fz=1} d\rho \end{aligned} \right\} (j=1\sim n_1) \\ \left. \begin{aligned} \sigma_i^{rj} &= \int_j \sigma^{Fr*} \Big|_{Fr=1} d\zeta \\ \sigma_i^{zj} &= \int_j \sigma^{Fz*} \Big|_{Fz=1} d\zeta \end{aligned} \right\} (j=n_1+1\sim n_1+n_2) \\ \dots\dots\dots (11)$$

(3) 曲げ問題

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i^{r'j} &= \int_j \sigma^{Fr \cos \varphi^*} \Big|_{Fr=1} d\zeta, \sigma_i^{\theta'j} = \int_j \sigma^{F\theta \sin \varphi^*} \Big|_{F\theta=1} ds \\ \sigma_i^{r'j} &= \int_j \sigma^{Fz \cos \varphi^*} \Big|_{Fz=1} \frac{2\rho}{d} d\rho \\ \sigma_i^{r'j} &= \int_j \sigma^{Fr \cos \varphi^*} \Big|_{Fr=1} d\zeta, \sigma_i^{\theta'j} = \int_j \sigma^{F\theta \sin \varphi^*} \Big|_{F\theta=1} d\zeta \\ \sigma_i^{r'j} &= \int_j \sigma^{Fz \cos \varphi^*} \Big|_{Fz=1} d\zeta \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (j=1 \sim n_1) \\ \dots\dots\dots (12) \\ (j=n_1+1 \sim n_1+n_2) \end{array}$$

式(10)~(12)において、 \int_j は区間 j における積分を表す(この積分は数値積分によって求めた)。

i 番めの注目点(区間の中点)における境界条件は次のように表される(n は i 番めの注目点における法線方向、 t は接線方向、 ψ_i は法線と r 軸とのなす角度、 r_i は注目点の r 座標である)。

(1) ねじり問題

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \rho_{\theta j} \tau_{n\theta}^{\rho_{\theta j}} + \tau_0 \frac{2r_i}{d} \sin \psi_i &= 0 \quad \text{[切欠き部の条件 } (i=1 \sim n_1)] \\ \{\tau_{\theta z} = \tau_0(2r_i/d) \text{ は無限遠でのねじり応力}\} \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} \rho_{\theta j} \tau_{r\theta}^{\rho_{\theta j}} &= 0 \quad \text{[丸棒円筒面の条件 } (i=n_1+1 \sim n_1+n_2)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(2) 引張り問題

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \sigma_n^{r'j} + \rho_{zj} \sigma_n^{\theta'j}) + \sigma_z^{\infty} \cos^2 \psi_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \tau_{nt}^{\rho_{rj}} + \rho_{zj} \tau_{nt}^{\rho_{zj}}) + \sigma_z^{\infty} \sin \psi_i \cos \psi_i &= 0 \quad \text{[切欠き部の条件 } (i=1 \sim n_1)] \\ (\sigma_z^{\infty} \text{ は無限遠での引張応力}) \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \sigma_r^{r'j} + \rho_{zj} \sigma_r^{\theta'j}) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \tau_{rz}^{\rho_{rj}} + \rho_{zj} \tau_{rz}^{\rho_{zj}}) &= 0 \quad \text{[丸棒円筒面の条件 } (i=n_1+1 \sim n_1+n_2)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

(3) 曲げ問題

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \sigma_{ni}^{\rho_{rj}} + \rho_{\theta j} \sigma_{ni}^{\rho_{\theta j}} + \rho_{zj} \sigma_{ni}^{\rho_{zj}}) + \sigma_0 \frac{2r_i}{d} \cos^2 \psi_i &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \tau_{n\theta}^{\rho_{rj}} + \rho_{\theta j} \tau_{n\theta}^{\rho_{\theta j}} + \rho_{zj} \tau_{n\theta}^{\rho_{zj}}) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \tau_{nt}^{\rho_{rj}} + \rho_{\theta j} \tau_{nt}^{\rho_{\theta j}} + \rho_{zj} \tau_{nt}^{\rho_{zj}}) + \sigma_0 \frac{2r_i}{d} \sin \psi_i \cos \psi_i &= 0 \\ \{\sigma_z^{\infty} = \sigma_0(2r_i/d) \text{ は無限遠での曲げ応力}\} \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \sigma_r^{r'j} + \rho_{\theta j} \sigma_r^{\rho_{\theta j}} + \rho_{zj} \sigma_r^{\rho_{zj}}) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \tau_{r\theta}^{\rho_{rj}} + \rho_{\theta j} \tau_{r\theta}^{\rho_{\theta j}} + \rho_{zj} \tau_{r\theta}^{\rho_{zj}}) &= 0 \quad \text{[丸棒円筒面の条件 } (i=n_1+1 \sim n_1+n_2)] \\ \sum_{j=1}^{n_1+n_2} (\rho_{rj} \tau_{rz}^{\rho_{rj}} + \rho_{\theta j} \tau_{rz}^{\rho_{\theta j}} + \rho_{zj} \tau_{rz}^{\rho_{zj}}) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

境界の総分割数を $n_t (= n_1 + n_2)$ とすると、式(13)~(15)に示すように、ねじり問題、引張り問題、曲げ問題のそれぞれにおいて、 $n_t, 2n_t, 3n_t$ 元の連立一次方程式を解けば、各区間の密度が決定される。各区間の密度 $\rho_{rj}, \rho_{\theta j}, \rho_{zj}$ が求まれば、任意の点における応力はそれらと影響係数との一次結合の形で計算することができる。なお、以上の議論において、注目点が着力区間に含まれる時(すなわち $i=j$ の時)と、切欠き底近傍に分布させた体積力の最大応力に及ぼす効果を求める際、式(10)~(12)の被積分関数は特異性をもつので特別な配慮が必要である⁽¹⁰⁾。計算によって得られる応力集中係数は、分割数 n_t が有限であるための誤差を含むが、その誤差はほぼ $1/n_t$ に比例するので、外そうによって $n_t \rightarrow \infty$ の時の値を求めた。ポアソン比は 0.3 として計算した。

6. 計算結果

ねじり, 引張り, 曲げ問題のそれぞれにおいて, 切欠き底に生じる最大応力を σ_{max} とする時, 応力集中係数 K_t を次のように定義する.

$$K_t = \sigma_{max} / \sigma_n \dots\dots\dots (16)$$

ここで, σ_n は(1)のねじり問題, (2)引張り問題, (3)曲げ問題のそれぞれにおいて次式で表される.

$$(1) \sigma_n = 16T / (\pi d^3), (2) \sigma_n = 4P / (\pi d^2), (3) \sigma_n = 32M / (\pi d^3) \dots\dots\dots (17)$$

(T, P, M は, 丸棒に作用するねじりモーメント, 引張り力, 曲げモーメントを意味する).

表1は金属材料の疲労試験においてよく用いられている, 最小断面の直径 $d=10$ mm の試験片の応力集中係数を計算した結果をまとめたものである. 参考のため, ノイバーの三角則による値 K_{tN} {式(18)} と, 深い双曲線切欠きの解 K_{tH} {式(19)} をあわせて示した.

$$K_{tN} = \frac{(K_{tE}-1)(K_{tH}-1)}{\sqrt{(K_{tE}-1)^2 + (K_{tH}-1)^2}} + 1 \dots\dots\dots (18)$$

(1) ねじり問題

$$K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho}, K_{tH} = (3/4)(1 + \sqrt{d/2\rho + 1})^2 / (1 + 2\sqrt{d/2\rho + 1})$$

(2) 引張り問題

$$K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho}$$

$$K_{tH} = (1/N) \{ (d/2\rho)\sqrt{d/2\rho + 1} + (0.5 + \nu)(d/2\rho) + (1 + \nu)(\sqrt{d/2\rho + 1} + 1) \}$$

$$N = d/2\rho + 2\nu\sqrt{d/2\rho + 1} + 2$$

(3) 曲げ問題

$$K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho}, K_{tH} = (1/N)(3/4)(\sqrt{d/2\rho + 1} + 1) \{ 3d/2\rho - (1 - 2\nu)\sqrt{d/2\rho + 1} + 4 + \nu \}$$

$$N = 3(d/2\rho + 1) + (1 + 4\nu)\sqrt{d/2\rho + 1} + (1 + \nu) / (1 + \sqrt{d/2\rho + 1})$$

..... (19)

表1において, ρ と d を一定にして D を増加させる場合, 引張り問題と曲げ問題では, K_t は減少する傾向にあり, ノイバー式 {式(18)} の傾向とは異なる. このことは, 菊川らも実験によりすでに指摘している⁽¹²⁾. 表1の結果から, 疲労試験片用の円弧形切欠きを有する丸棒の応力集中係数は, 切欠き深さがごく浅く切欠き半径が小さい場合を除き, 深い双曲線切欠きの解 K_{tH} (ρ と d のみによって決まる) が, かなりよい

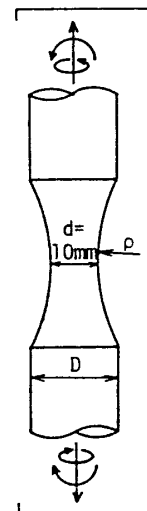
近似値を与えることがわかる(表1の範囲で, 誤差は最大でも2%程度).

7. 結論

本論文では, 金属材料の疲労試験においてしばしば用いられる, 浅い円弧形切欠きを有する丸棒試験片のねじり, 引張り, 曲げにおける応力集中問題を考察した. 解析方法は体積法を用い, 無限体中の一円周上

表1 最小断面の直径 $d=10$ mm の試験片のねじり, 引張り, 曲げにおける応力集中係数 K_t
(K_{tN} : ノイバーの三角則による応力集中係数,
 K_{tH} : 深い双曲線切欠きの応力集中係数)

D [mm] \ \rho [mm]		11		12		15		20		∞
		K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	
10	TORSION	1.073	1.072	1.077	1.074	1.078	1.075	1.078	1.076	1.076
	TENSION	1.222	1.188	1.233	1.197	1.222	1.203	1.209	1.205	1.207
	BENDING	1.146	1.133	1.144	1.136	1.139	1.138	1.139	1.138	1.139
20	TORSION	1.039	1.039	1.040	1.039	1.040	1.040	1.040	1.040	1.040
	TENSION	1.121	1.101	1.118	1.104	1.108	1.106	1.105	1.106	1.107
	BENDING	1.075	1.070	1.071	1.071	1.069	1.071	1.069	1.071	1.072
50	TORSION	1.016	1.016	1.016	1.016	1.016	1.016	1.016	1.016	1.016
	TENSION	1.048	1.043	1.044	1.043	1.043	1.043	1.043	1.044	1.044
	BENDING	1.028	1.029	1.028	1.029	1.027	1.029	1.027	1.029	1.029
100	TORSION	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008
	TENSION	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022	1.022
	BENDING	1.013	1.015	1.013	1.015	1.013	1.015	1.013	1.015	1.015



に作用する集中力の輪による応力場を基本解として考え、ねじり、引張り、曲げの各問題を統一的に取扱った。最小断面の直径 $d=10$ mm の試験片の応力集中係数を系統的に計算した結果、円弧形切欠きを有する丸棒の応力集中係数は、切欠き深さがごく浅く切欠き半径が小さい場合を除き、ノイバーの深い双曲線切欠きの解により、かなり精度よく評価できることが明らかとなった。本論文で統一的に表示した基本解と数値計算の手順は他の軸対称形状体のねじり、引張り、曲げ問題の解析にも有効であると思われる。

文 献

- (1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (第1版), (1937); (第2版), (1958), 9. Springer-Verlag.
- (2) 西谷・野田, 機論, 50-457, A (昭59), 1592.
- (3) 西谷・ほか2名, 機論, 48-441, A (昭59), 602.
- (4) 西谷・野田, 機講論, No. 840-1 (昭59-3), 23.
- (5) 村上・ほか2名, 機論, 48-427, A (昭57), 312.
- (6) 村上・ほか2名, 機論, 48-430, A (昭57), 800.
- (7) 長谷川, 機論, 49-440, A (昭58), 512.
- (8) 西谷, 機誌, 70-580, (昭42), 627.
- (9) Nisitani, H. (Sih, G.C. 編), *Mechanics of Fracture*, 5 (1978), Noordhoff Int. Pub.
- (10) 西谷・野田, 機講論, No. 830-1 (昭58-3), 105.
- (11) 西谷・陳, 機講論, No. 840-1 (昭59-3), 65.
- (12) 菊川・佐藤, 機論, 38-311 (昭47), 1673.

討 論

〔質問〕 長谷川 久夫 [明治大学工学部]

(1) 浅い円弧形切欠きをもつ丸棒の応力集中のご研究、興味深く拝読させていただいた。表1の結果を見ると、引張りと曲げの場合には、 K_t は D の増加につれて減少しその後わずかながら増加しているが、これは法則か誤差によるものか。

(2) 解の収束に必要な分割数 n_t の値並びに収束性はねじり、引張り、曲げの三つの場合ともほぼ同じか。

(3) 本結果を求めるのに用いられた n_t の値はどの程度か。

(4) 表1の結果を無次元表示して求めなかった特別の理由があるのか。

〔回答〕 (1) 切欠半径 ρ および最小断面の直径 d を一定にして、外径 D を d から ∞ まで増加させる増合、ノイバーの三角則 [式(18)] によって得られる応力集中係数 K_{tN} は、 $K_{tN}=1$ から単調に増加して回転双曲面切欠きの解に近づく。それに対して、実際の応力集中係数 K_t は $K_t=1$ から増加して、ある有限は寸法 $D=D'$ で最大値をとり、以後わずかながら減少する場合があることが報告されており⁽¹²⁾、本報の結果もそのような傾向を示している (例えば、表1において $\rho=10$ mm の引張りの場合は、 $D \cong 12$ mm 付近で K_t が最大となっている)。

ご質問の内容は、表1で $D=\infty$ の場合の応力集中係数とした回転双曲面切欠きの解 K_{tH} が、 D が有限の場合の K_{tN} と比較して、むしろ大きい場合があることを指摘されたものと思われるが、これは本論文で解析した切欠きの形状が円弧形であるため、双曲線の解と比較して形状に違いがあることによるものと考え

られる (表1に示した K_t の値は、現在のところ小数点以下3けた程度まで有効であると考えている)。

(2) 分割数の変化による計算結果の変化の例を付表1に示す。付表1に示すように、一般に、同じ程度の精度の解を得るために必要な分割数 n_t の値は、ねじり、引張り、曲げの順に大きくなる傾向がある。これは、満足すべき境界条件の個数がねじり問題に対して、引張問題、曲げ問題でそれぞれ2倍、3倍となることから、引張りや曲げ問題ではそれだけ境界条件が満たされにくくなるためと考えられる。

(3) 付表1の例に示すように、 $n_t=16 \sim 64$ 程度の分割数で、多くの場合にかなりよい精度が得られるが、本論文では特に実際に疲労試験に用いられる切欠半径 ρ が大きい場合 ($\rho=100$ mm) も解析の対象としたので、最大の場合で $n_t=120$ 程度の分割数による計算も行った。

付表1. 分割数 $n_t (=n_1+n_2)$ を変えた時の計算結果の変化の例
($\rho=10$ mm, $D=12$ mm の場合)

{ ∞ 4-6などは $n_1=4$ と6の結果から外そうして得た値であることを意味する}

n_1	n_2	TORSION	TENSION	BENDING
4	12	1.076496	—	—
6	18	1.076608	1.236804	—
8	24	1.076640	1.235856	1.145212
12	36	—	1.234939	1.144748
16	48	—	—	1.144617
∞	4-6	1.076832	—	—
∞	6-8	1.076736	1.233012	—
∞	8-12	—	1.233105	1.143820
∞	12-16	—	—	1.144224

(4) 疲労試験片としてよく用いられる表1で計算した範囲の切欠形状では、切欠半径が小さく切欠きがごく浅い場合を除き、ノイバーの回転双曲面切欠きの

解 K_{tm} (式(19)) を使用すれば実用上十分な精度で、試験片の応力集中の評価が可能であることが明らかとなったので、本論文では特に他の整理は行わなかった。