

両縁に60°V形または円弧形切欠きを有する帯板の面内曲げ*

野田 尚 昭**, 西谷 弘 信***
深 迫 泉****, 原 田 昭 治**

In-Plane Bending of a Strip with Symmetric 60°V-Shaped or Partially-Circular Notches

by Nao-aki NODA, Hironobu NISITANI,
Izumi FUKASAKO, and Shoji HARADA

This paper deals with the stress concentration analysis of 60°V-shaped or partially-circular double edge notches in an infinite strip under remote in-plane bending. The stress field induced by a point force in a semi-infinite plate is used to solve these problems. The present results for semi-circular notch are in close agreement with other reports. The results calculated on the 60°V-shaped notches show that the Neuber formula gives an underestimated stress concentration factor in about 9% for a wide range of notch depth. However, in case of blunt notches, the Neuber solution of deep hyperbolic notches still gives a sufficient accuracy in engineering use. In addition, the stress concentration factors of 60°V-shaped notches are also represented by diagrams for wide use.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Test Specimen, Strip, In-Plane Bending, V-Shaped Notch, Partially-Circular Notch, Neuber's Formula

1. 緒 言

両縁に対称な切欠きを有する帯板の面内曲げにおける応力集中問題の解析は、これまでもいくつか試みられ、代表的なものとして、半円切欠きの問題を厳密に解析した石田⁽¹⁾、Ling⁽²⁾の研究、U形切欠きの応力集中係数を実験的に求めた Frocht⁽³⁾、菊川⁽⁴⁾らの研究がある。面内曲げは、金属材料の疲労試験にもよく用いられるが、引張問題と比べて解析した例は少ないようである。また、V形あるいは円弧形切欠きを有する帯板の面内曲げの問題を、切欠き形状寸法を変えて系統的に解析した研究は見当たらない。

以上の点を考慮して、本報では、両縁に60°V形あるいは円弧形切欠きを有する帯板が面内曲げを受ける場合の応力集中係数を計算した(図1)。計算には、半無限板問題のグリーン関数(半無限板の一点に集中力が作用する時、任意の点に生じる応力の式⁽⁵⁾)を基礎式とする体積力法⁽⁶⁾を用いた。

2. 解析方法

図2は本報で用いる解析方法の考え方を示した図である。図2(b)、(c)に示すような、帯板の自由縁となるべき境界 $\xi = \pm W/2$ をそれぞれの自由表面とする2枚の半無限板を考える。そして $\xi < 0$ の範囲では図2(b)、 $\xi > 0$ の範囲では図2(c)に示す半無限板のグリーン関数⁽⁵⁾を基本解として、それぞれの切欠き部および帯板縁となるべき境界上の条件を満足させる。結局、本報で取扱う問題は図2の半無限板に連続

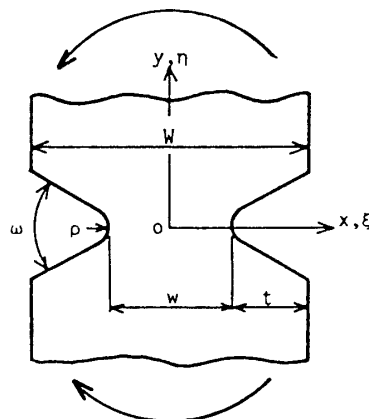


図1 両縁に60°V形切欠きを有する帯板の曲げ

* 昭和60年4月1日 第62期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和59年11月1日。

** 正員、九州工業大学(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*** 正員、九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

**** 学生員、九州工業大学大学院。

的に作用させるべき基本解の強さ, つまり体積力および表面力の密度を決定する問題に還元される。分布させるべき密度は閉じた形では求まらないので, 切欠きおよび帯板縁となるべき境界を分割し, 分割した各区間の中点(注目点)で境界条件を満足するよう各区間に分布させる密度を決定する。

微小要素 $ds = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2}$ に作用する体積力および表面力の合力の成分を dF_ξ, dF_η とする時密度 ρ_x, ρ_y を式(1), (2)で定義する [(ξ, η)は着点の座標]。

(i) 体積力の密度(切欠き部)

$$\rho_x = \frac{dF_\xi}{d\eta}, \rho_y = \frac{w}{2\xi} \frac{dF_\eta}{d\xi} \quad (1)$$

(ii) 表面力の密度(帯板縁)

$$\rho_x = \frac{dF_\xi}{ds}, \rho_y = \frac{dF_\eta}{ds} \quad (2)$$

切欠き部となるべき仮想境界上に分布させる体積力密度 ρ_y については, 打消すべき無限遠での曲げ応力[式(3)]に対応して, 式(1)の定義を用いる。

$$\sigma_y^\infty = (2\xi/w)\sigma_0 \quad (3)$$

ここで, σ_0 は曲げモーメントの大きさを表す定数である。表1は, 密度 ρ_y の定義として式(1)を用いる場合と $\rho_y = dF_\eta/d\xi$ を用いた場合⁽⁶⁾とを比較したものである。表1に示した例では, 有限の分割数で計算した値から外そうして得られる, 分割数が無限大の場合の値

表1 2種類の体積力密度の定義による計算結果の例 ($2\rho/W=0.2, 2t/W=0.4$ の場合の応力集中係数)

n_1	n_2	n_3	$\rho_y = \frac{w}{2\xi} \frac{dF_\eta}{d\xi}$	$\rho_y = \frac{dF_\eta}{d\xi}$
6	6	24	1.850981	1.853084
8	8	32	1.850714	1.852267
12	12	48	1.850496	1.851514
∞ (6-8)			1.8499	1.8498
∞ (8-12)			1.8501	1.8500

n_1, n_2, n_3 はそれぞれ, 切欠き円弧部, 切欠き直線部, 帯板縁の分割数, また ∞ (6-8)などは $n_1=6$ と 8 から外そうして得た値を意味する。

表2 半円切欠きを有する帯板の曲げにおける応力集中係数 K_t

$2\rho/W$	Present analysis	Ling	Isida Neuber	
0.02	2.906	-	2.91	2.91
0.03	2.833	-	2.83	2.83
0.05	2.697	-	2.70	2.68
0.1	2.408	2.409	2.41	2.34
0.2	1.985	1.986	1.98	1.90
0.3	1.693	1.694	-	1.64
0.4	1.488	1.489	-	1.46
0.5	1.341	1.344	-	1.33
0.6	1.235	1.238	-	1.23
0.7	1.155	1.158	-	1.16
0.8	1.093	-	-	1.09
0.9	1.043	-	-	1.04

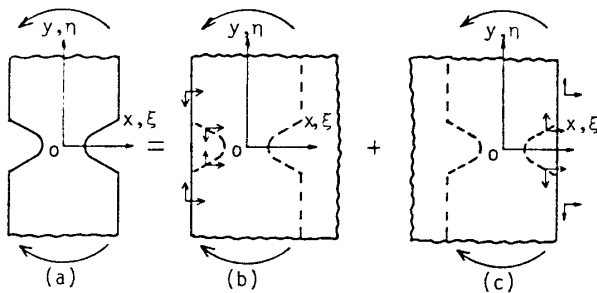
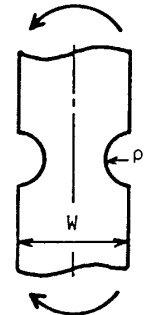


図2 半無限板の重ね合せによる帯板問題の解法

表3 疲労試験用の浅い円弧形切欠きを有する帯板の曲げにおける応力集中係数 K_t (最小断面の幅 $w=10$ mm)

W (mm)	11		12		15		20		∞
	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_{tH}
10	1.178	1.17	1.184	1.17	1.181	1.18	1.178	1.18	1.180
20	1.096	1.09	1.095	1.09	1.092	1.09	1.090	1.09	1.095
50	1.039	1.04	1.038	1.04	1.037	1.04	1.037	1.04	1.039
100	1.019	1.02	1.019	1.02	1.018	1.02	1.018	1.02	1.020

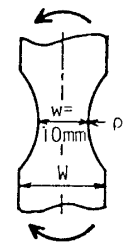


表4 両縁に 60°V 形切欠きを有する帯板の曲げにおける応力集中係数 K_t

$2t/W$	$2\rho/W=0.02$		$2\rho/W=0.03$		$2\rho/W=0.05$		$2\rho/W=0.1$		$2\rho/W=0.2$		$2\rho/W=0.5$		$2\rho/W=1.0$	
	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}
0.02	2.905	2.86	2.522	2.51	2.143	2.16	1.772	1.81	1.520	1.56	1.303	1.33	1.198	1.21
0.05	3.850	3.67	3.269	3.15	2.696	2.64	2.130	2.12	1.744	1.75	1.417	1.42	1.260	1.26
0.1	4.613	4.27	3.870	3.63	3.135	2.98	2.407	2.33	1.908	1.87	1.487	1.46	1.290	1.27
0.2	5.127	4.66	4.269	3.91	3.413	3.16	2.565	2.42	1.984	1.90	1.499	1.46	1.281	1.26
0.3	5.123	4.66	4.253	3.89	3.386	3.13	2.527	2.37	1.940	1.85	1.459	1.43	1.249	1.24
0.4	4.895	4.49	4.060	3.74	3.228	3.00	2.407	2.27	1.850	1.78	1.402	1.38	1.213	1.21
0.5	4.546	4.21	3.771	3.51	3.002	2.82	2.245	2.14	1.739	1.69	1.340	1.33	1.178	1.18
0.6	4.114	3.85	3.418	3.22	2.730	2.59	2.058	1.98	1.616	1.58	1.277	1.27	1.143	1.15
0.7	3.607	3.42	3.008	2.86	2.418	2.32	1.849	1.80	1.483	1.47	1.213	1.21	1.109	1.11
0.8	3.007	2.88	2.526	2.43	2.056	2.00	1.614	1.59	1.340	1.33	1.146	1.15	1.073	1.08
0.9	2.244	2.18	1.920	1.87	1.614	1.59	1.340	1.33	1.182	1.18	1.075	1.08	1.037	1.04

には、ほとんど差はない。しかしながら、有限の分割数で計算した値は、式(1)で定義される密度を用いた場合の値のほうが、わずかではあるが精度がよいことがわかる。このような検討から、以下に示す結果はすべて式(1)、(2)の定義を用いて得られたものである。

3. 計算結果および考察

3.1 両縁に半円切欠きを有する帯板の曲げ 半円切欠きの問題については、精度がよい解が得られており、本解析の精度を確認することができる。表2は両縁に半円切欠きを有する帯板の応力集中係数を、石田⁽¹⁾、Ling⁽²⁾、Neuber⁽⁷⁾ (浅い切欠きの解として3.065を使用)の結果と比較してまとめたものである。石田およびLingの結果は本結果とよく一致している。

3.2 疲労試験用の浅い円弧形切欠きを有する帯板の曲げ 表3は両縁に浅い円弧形切欠きを有する帯

板($w=10\text{ mm}$)の応力集中係数 K_t をノイバーの三角則による値 K_{tN} と比較してまとめたものである。 ρ と w を一定とし、 W を増加させた場合、 K_t と K_{tN} とでは変化の傾向に違いがある⁽⁴⁾。切欠きが浅く、切欠き半径が小さい場合を除き、ノイバーの深い双曲線切欠きの値 K_{tH} が精度のよい近似値となることがわかる。

3.3 両縁に60°V形切欠きを有する帯板の曲げ

表4は両縁に60°V形切欠きを有する帯板の応力集中係数 K_t をまとめたものである。また、図3、4に表4に示す値を線図にしたものを示す。両縁に60°V形切欠きを有する帯板の応力集中係数をノイバーの三角則を用いて評価する場合、本報で計算した範囲($2\rho/W \geq 0.02$)で最大9%程度の危険側の誤差がある。また、危険側の誤差の存在範囲はかなり広い。

3.4 切欠き形状と応力集中係数の関係について

表5は両縁に60°V形切欠きを有する帯板の応力集中係数 K_t と、その帯板と同一形状の切欠きを有する

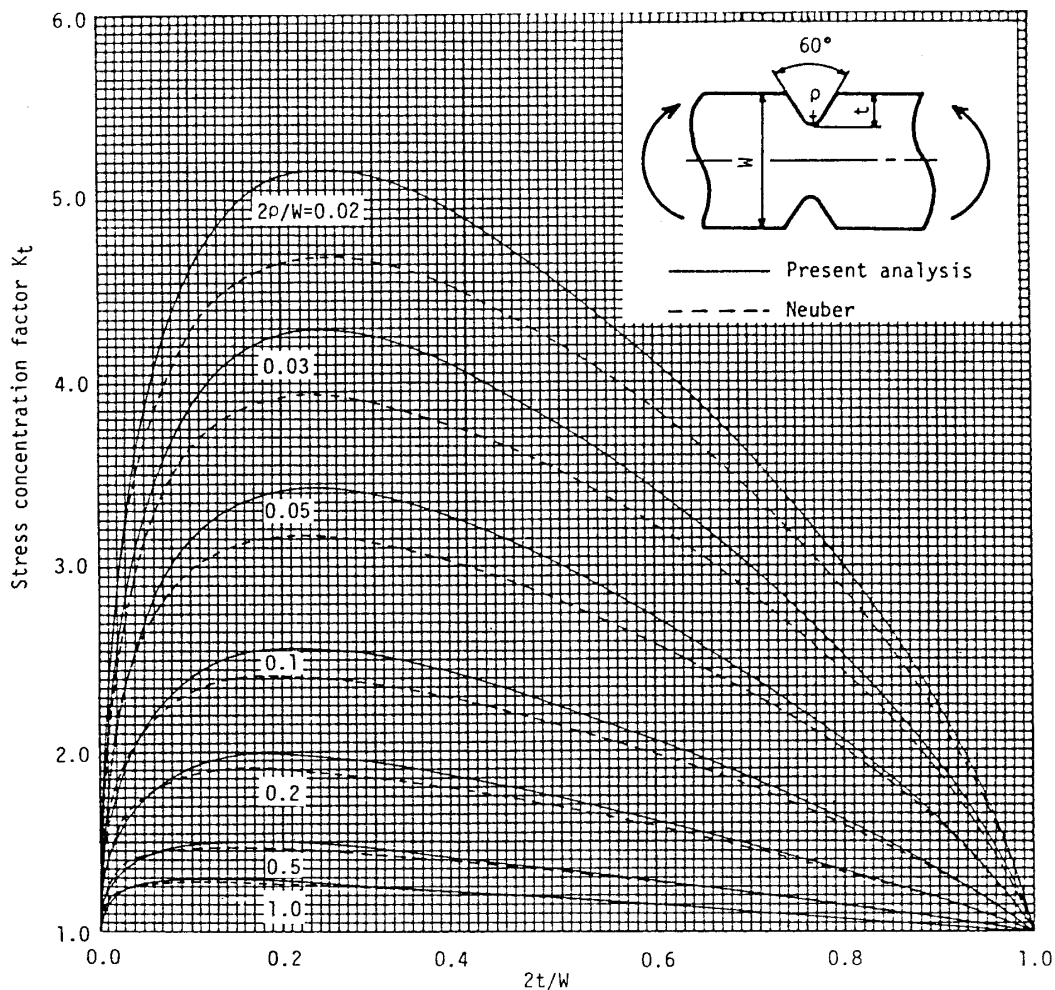


図3 両縁に60°V形切欠きを有する帯板の曲げにおける応力集中係数 K_t

*1 浅い切欠きの解として円孔を有する無限板の解、深い切欠きの解として双曲線切欠きの解を使用。

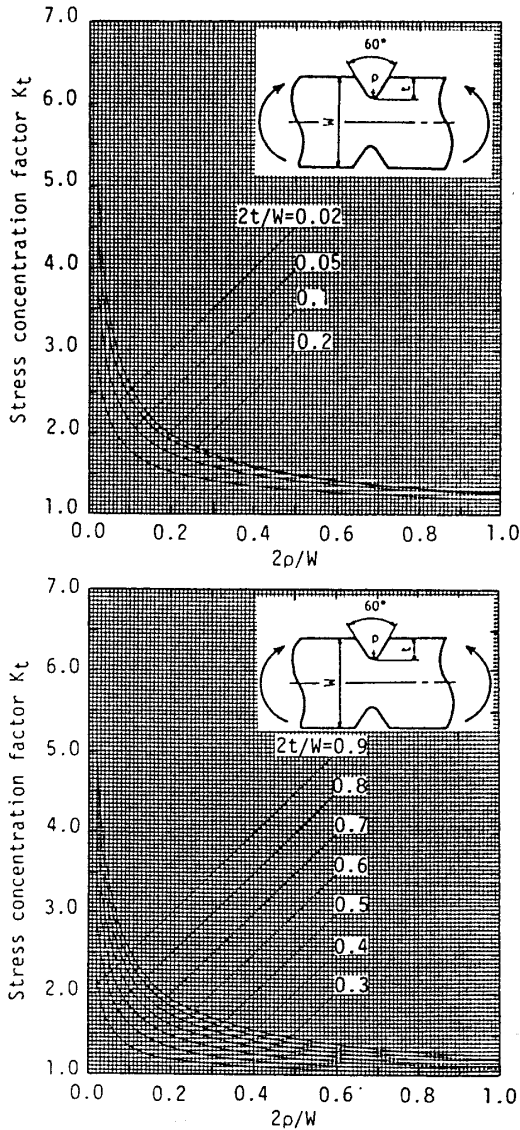


図 4 60°V 形切欠きを有する帯板の曲げにおける応力集中係数 K_t

半無限板の応力集中係数 K_{t0} との比 K_t/K_{t0} を示したものである。表 5 より、切欠きが浅い場合は切欠き半径 ρ に無関係に K_t/K_{t0} の値はほぼ切欠き深さ $2t/W$ のみによって決まっていることがわかる。この性質を利用すれば、60°V 形切欠きを有する半無限板の解⁽⁸⁾を利用することにより、本報で解析していない鋭い切欠き ($2\rho/W < 0.02$) を両縁に有する帯板の応力集中係数が推定できる⁽⁸⁾。

4. 結 言

本報では両縁に対称な切欠きを有する帯板の面内曲

表 5 応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0}

$2\rho/W$	$2t/W$						
	0.02	0.03	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.02	0.948	0.948	0.947	0.946	0.946	0.948	0.951
0.05	0.881	0.879	0.880	0.879	0.879	0.882	0.886
0.1	0.785	0.784	0.785	0.785	0.787	0.793	0.803
0.2	0.640	0.639	0.640	0.642	0.647	0.662	0.684
0.3	0.530	0.531	0.532	0.536	0.544	0.568	0.599
0.4	0.443	0.444	0.446	0.452	0.463	0.495	0.536
0.5	0.370	0.372	0.375	0.382	0.398	0.437	0.486
0.6	0.308	0.310	0.313	0.323	0.343	0.391	0.445
0.7	0.251	0.253	0.258	0.271	0.295	0.349	0.410
0.8	0.196	0.200	0.207	0.223	0.251	0.314	0.379
0.9	0.138	0.144	0.154	0.175	0.211	0.281	0.351

げ問題を、基本解として半無限板問題のグリーン関数を用いる体積力法⁽⁶⁾により、考察した。結果をまとめると以下ようになる。

(1) 60°V 形切欠きの応力集中係数を系統的に計算した結果、ノイバーの三角則でこの場合の応力集中係数を評価した場合、本報で計算した範囲 ($2\rho/W \geq 0.02$) で、最大 9% 程度の危険側の誤差を含む場合があることがわかった。得られた結果より、応力集中係数表と線図 (表 4 および図 3, 4) を作成した。

(2) 帯板と半無限板における、同一形状の 60°V 形切欠きの応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0} は、切欠きが鋭い場合にはほぼ切欠き深さ ($2t/W$) のみによって決まる (表 5)。この性質を利用すれば、半無限板の解⁽⁸⁾を利用して帯板の応力集中が評価できる。

(3) 疲労試験用の円弧形切欠きを有する帯板の応力集中係数は、切欠きが浅く切欠き半径が小さい場合を除き、ノイバーの深い双曲線切欠きの解によりかなり精度よく評価できる。

本研究の遂行に際して、九州工業大学 遠藤達雄教授には貴重なご助言をいただいた。記して謝意を表す。なお、計算には九州工業大学情報処理教育センターと九州大学大形計算機センターを利用した。

文 献

- (1) 石田, 機論, 19-87 (昭 28), 94.
- (2) Ling, C. B., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 19-2 (1952), 141, Ling, C. B., *Trans. ASME, Ser. E*, 35-4 (1968), 833.
- (3) Frocht, M. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 57-A (1935), 67.
- (4) 菊川・佐藤, 機論, 38-311 (昭 47), 1663.
- (5) 西谷, 機誌, 70-580, (昭 42), 627.
- (6) 西谷・ほか 3 名, 第 62 期通常総会講演会講演予定.
- (7) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (第 1 版), (1937); (第 2 版), (1957), 9, Springer-Verlag.
- (8) 西谷・野田, 機論, 51-461, A (昭 60), 54.