

特異積分方程式による菱形介在物の干渉効果の解析\*

野田尚昭\*<sup>1</sup>, 川島裕二\*<sup>2</sup>, 小田和広\*<sup>3</sup>

Singular Integral Equation Method in the Analysis of Interaction between Diamond-Shaped Inclusions

Nao-Aki NODA, Yuuji KAWASHIMA and Kazuhiro ODA

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations in interaction problems of diamond shaped inclusions with angular corners under various loading conditions. The problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy type or logarithmic type singularities, where the unknown functions are the densities of body forces distributed in infinite plates having the same elastic constants as those of the matrix and inclusions. In order to analyze the problems accurately, the unknown functions of the body force densities are expressed as a linear combination of two types of fundamental density functions and power series, where the fundamental density functions are chosen to represent the symmetric stress singularity of  $1/r^{1-\lambda_1}$  and the skew-symmetric stress singularity of  $1/r^{1-\lambda_2}$ . Then, newly defined stress intensity factors of angular corners are systematically calculated for various shapes and spacings of two diamond shaped inclusions in a plate subjected to uniaxial tension, biaxial tension and in plane shear. The present method is found to yield rapidly converging numerical results for the interaction of diamond shaped inclusions.

**Key Words:** Elasticity, Body Force Method, Stress Intensity Factor, Angular Corner, Interaction Effect, Singular Integral Equation, Diamond Shaped Inclusions

1. 緒 言

複合材料の強度評価を行う際には、強化材と母材の異材角部での応力分布を知る必要がある。このような角部では応力特異性が生じるため、その把握が必要となる。このため、その特異応力に関する多数の研究がなされている<sup>(1)~(11)</sup>。き裂問題と異なり、異材接合角部の問題(図1)では、モードIとモードIIの変形モードに関係した異なる応力特異性の指数が混在している。すなわち、その角部近傍の特異応力場は、次式のように特異性の指数  $\lambda_1, \lambda_2$  および角部に拡張された応力拡大係数  $K_{I, \lambda_1}, K_{II, \lambda_2}$  によって記述されることが最近陳ら<sup>(1)</sup>によって明らかにされている [( $r, \theta$ )は図1に示す極座標であり、また、図1の( $x, y$ )は角部の二等分線を  $x$  方向とする直角座標である]。

$$\sigma_{ij} = \frac{K_{I, \lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II, \lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{ij}^{II}(\theta) \dots\dots\dots (1)$$

これまでの多くの研究では、式(1)で表現される独立な2種類の特異応力場の存在を十分考慮していないも

のがほとんどであり、今後二つの応力拡大係数に注目する研究が重要と考えられる。著者らはさきに体積法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いて、だ円形介在物<sup>(12)~(14)</sup>および回転だ円体状介在物<sup>(15)</sup>の干渉効果を議論したほか、さらに、この方法を接合角部の基礎的な問題である切欠角部の問題に応用し、その有効性を確認した<sup>(6)</sup>。そこで本研究では、このような体積法の特異積分方程式の数値解析を発展させて、図2に示すような無限板中に存在する2個の菱形介在物の角部の応力

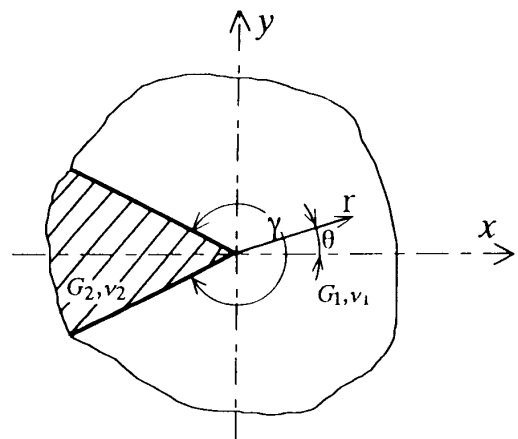


Fig. 1 Corner of two bonded wedges

\* 原稿受付 1995年8月14日。  
\*<sup>1</sup> 正員, 九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。  
\*<sup>2</sup> 学生員, 九州工業大学大学院。  
\*<sup>3</sup> 正員, 徳山工業高等専門学校 (〒745 徳山市久米高城3538)。

拡大係数の干渉効果を考察する。そして、介在物の剛性率と距離を系統的に変化させて介在物角部に関して定義された応力拡大係数の正確な値を求める。菱形孔<sup>(5)(6)(11)</sup>や菱形介在物<sup>(3)(7)(8)(10)</sup>の問題は、その特別な場合にき裂問題も含んでおり、通常の応力拡大係数との比較も容易であることから理解できるように、図2のモデルの解析結果は介在物の角部の応力拡大係数の干渉効果を考察する上で最も基本的なものである。しかし、角部の角度と荷重軸垂直方向の投影長さを揃えれば形状の異なる多角形介在物の応力拡大係数の評価にも応用可能である<sup>(3)</sup>。

2. 角部干渉問題の特異積分方程式による数値解析法

図2に示すような同一形状および寸法をもつ2個の菱形介在物を有する無限板を例にとり解析方法を説明する。ここで  $l_1, l_2$  は介在物寸法、 $d$  は距離のパラメータ、 $\theta_A, \theta_B$  は角 A, B の角度、 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$  は無限遠での応力である。また、母材と介在物のそれぞれの横弾性定数、ポアソン比を  $G_1, \nu_1$  および  $G_2, \nu_2$  とする。

本研究では、無限板中の仮想境界上に分布させるべき体積力を、2種類の形状の体積力分布の線形結合によって問題を表現する。それぞれの角部では、一般にモード I とモード II の二つの変形が生じるので、角部での上下の仮想境界上に分布させるべき法線方向( $\theta$ 方向)と接線方向( $r$ 方向)の体積力に対し、角部の二等分線に対して対称形(モード I)と逆対称形(モード II)の2種類の分布形式を採用する<sup>(5)(6)</sup>。このとき、角部 A と B では特異性の指数が異なるため、解析は辺の中央より二分割して行う。角部 A, A' および B, B' にそれぞれ2種類の形式の体積力を分布させ、その線

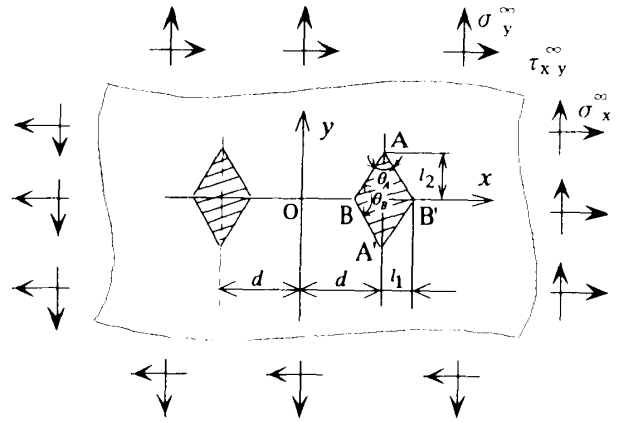


Fig. 2 Two diamond-shaped inclusions in an infinite plate

形結合によって境界条件を満足させる。また、この体積力は  $y$  軸に対して対称な位置にも同様の形式で分布させるものとする。このような体積力法の考えに基づいて、まず領域1(図2中の菱形  $AB'A'B$  の孔をもつ無限板)の境界変位と表面力との関係を求めるには、横弾性定数  $G_1$ 、ポアソン比  $\nu_1$  の均一な無限板(これを無限板 M とする)中の境界となるべき仮想境界上の  $\theta$  方向および  $r$  方向の体積力密度をそれぞれ  $F_{\theta M}(r) = F_{\theta M}^I(r) + F_{\theta M}^{II}(r)$ ,  $F_{rM}(r) = F_{rM}^I(r) + F_{rM}^{II}(r)$  (上付添字はモード I、モード II の分布形式に相当)とする。同様に、領域2(図2中の菱形  $AB'A'B$  の介在物)の境界変位と表面力との関係を求めるには、横弾性定数  $G_2$ 、ポアソン比  $\nu_2$  の均一な無限板(これを無限板 I とする)中の境界となるべき仮想境界上の  $\theta$  方向および  $r$  方向の体積力密度をそれぞれ  $F_{\theta I}(r) = F_{\theta I}^I(r) + F_{\theta I}^{II}(r)$ ,  $F_{rI}(r) = F_{rI}^I(r) + F_{rI}^{II}(r)$  とすれば、角部 A を含む境界での境界条件を表す特異積分方程式は次のように表される。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} F_{\theta M}(s) + \frac{1}{2} F_{\theta I}(s) + \int_0^{l_{AB}/2} h_{n\theta M}^{\theta_A}(r_A, s) F_{\theta AM}(r_A) dr_A + \int_0^{l_{A'B'}/2} h_{n\theta M}^{r_A}(r_A, s) F_{rAM}(r_A) dr_A \\
 & + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta M}^{\theta_{A'}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'M}(r_{A'}) dr_{A'} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{n\theta M}^{r_{A'}}(r_{A'}, s) F_{rA'M}(r_{A'}) dr_{A'} + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta M}^{\theta_B}(r_B, s) F_{\theta BM}(r_B) dr_B \\
 & + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta M}^{\theta_{B'}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'M}(r_{B'}) dr_{B'} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{n\theta M}^{r_{B'}}(r_{B'}, s) F_{rB'M}(r_{B'}) dr_{B'} \\
 & - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{\theta_A}(r_A, s) F_{\theta AI}(r_A) dr_A - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{r_A}(r_A, s) F_{rAI}(r_A) dr_A - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{\theta_{A'}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'I}(r_{A'}) dr_{A'} \\
 & - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{r_{A'}}(r_{A'}, s) F_{rA'I}(r_{A'}) dr_{A'} - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{\theta_B}(r_B, s) F_{\theta BI}(r_B) dr_B - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{r_B}(r_B, s) F_{rBI}(r_B) dr_B \\
 & - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{\theta_{B'}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'I}(r_{B'}) dr_{B'} - \int_0^{l_{AB'}/2} h_{n\theta I}^{r_{B'}}(r_{B'}, s) F_{rB'I}(r_{B'}) dr_{B'} = -\sigma_{nM}^\infty(s) + \sigma_{nI}^\infty(s) \\
 & -\frac{1}{2} F_{rM}(s) + \frac{1}{2} F_{rI}(s) + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{nrM}^{\theta_A}(r_A, s) F_{\theta AM}(r_A) dr_A + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{nrM}^{r_A}(r_A, s) F_{rAM}(r_A) dr_A \\
 & + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{nrM}^{\theta_{A'}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'M}(r_{A'}) dr_{A'} + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{nrM}^{r_{A'}}(r_{A'}, s) F_{rA'M}(r_{A'}) dr_{A'} + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{nrM}^{\theta_B}(r_B, s) F_{\theta BM}(r_B) dr_B \\
 & + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{nrM}^{\theta_{B'}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'M}(r_{B'}) dr_{B'} + \int_0^{l_{AB'}/2} h_{nrM}^{r_{B'}}(r_{B'}, s) F_{rB'M}(r_{B'}) dr_{B'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nIM}^{F_{rM}}(r_B, s) F_{rBM}(r_B) dr_B + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nIM}^{F_{rM}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'M}(r_{B'}) dr_{B'} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{nIM}^{F_{rM}}(r_{B'}, s) F_{rB'M}(r_{B'}) dr_{B'} \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rA}}(r_A, s) F_{\theta AI}(r_A) dr_A - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rA}}(r_A, s) F_{rAI}(r_A) dr_A - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rA}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'I}(r_{A'}) dr_{A'} \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rA}}(r_{A'}, s) F_{rA'I}(r_{A'}) dr_{A'} - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rB}}(r_B, s) F_{\theta BI}(r_B) dr_B \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rB}}(r_B, s) F_{rBI}(r_B) dr_B - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rB}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'I}(r_{B'}) dr_{B'} - \int_0^{l_{AB}/2} h_{nII}^{F_{rB}}(r_{B'}, s) F_{rB'I}(r_{B'}) dr_{B'} \\
 & = -\tau_{nIM}^\infty(s) + \tau_{nII}^\infty(s) \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{\theta M}}(r_A, s) F_{\theta AM}(r_A) dr_A + \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{rM}}(r_A, s) F_{rAM}(r_A) dr_A + \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{\theta M}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'M}(r_{A'}) dr_{A'} \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{rM}}(r_{A'}, s) F_{rA'M}(r_{A'}) dr_{A'} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{\theta M}}(r_B, s) F_{\theta BM}(r_B) dr_B + \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{rM}}(r_B, s) F_{rBM}(r_B) dr_B \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{\theta M}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'M}(r_{B'}) dr_{B'} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{uM}^{F_{rM}}(r_{B'}, s) F_{rB'M}(r_{B'}) dr_{B'} - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{\theta A}}(r_A, s) F_{\theta AI}(r_A) dr_A \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{rA}}(r_A, s) F_{rAI}(r_A) dr_A - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{\theta A'}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'I}(r_{A'}) dr_{A'} - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{rA'}}(r_{A'}, s) F_{rA'I}(r_{A'}) dr_{A'} \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{\theta B}}(r_B, s) F_{\theta BI}(r_B) dr_B - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{rB}}(r_B, s) F_{rBI}(r_B) dr_B - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{\theta B'}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'I}(r_{B'}) dr_{B'} \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{uI}^{F_{rB'}}(r_{B'}, s) F_{rB'I}(r_{B'}) dr_{B'} = -u_M^\infty + u_I^\infty \\
 & \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{\theta M}}(r_A, s) F_{\theta AM}(r_A) dr_A + \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{rM}}(r_A, s) F_{rAM}(r_A) dr_A + \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{\theta M}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'M}(r_{A'}) dr_{A'} \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{rM}}(r_{A'}, s) F_{rA'M}(r_{A'}) dr_{A'} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{\theta M}}(r_B, s) F_{\theta BM}(r_B) dr_B + \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{rM}}(r_B, s) F_{rBM}(r_B) dr_B \\
 & + \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{\theta M}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'M}(r_{B'}) dr_{B'} + \int_0^{l_{AB}/2} h_{vM}^{F_{rM}}(r_{B'}, s) F_{rB'M}(r_{B'}) dr_{B'} - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{\theta A}}(r_A, s) F_{\theta AI}(r_A) dr_A \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{rA}}(r_A, s) F_{rAI}(r_A) dr_A - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{\theta A'}}(r_{A'}, s) F_{\theta A'I}(r_{A'}) dr_{A'} - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{rA'}}(r_{A'}, s) F_{rA'I}(r_{A'}) dr_{A'} \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{\theta B}}(r_B, s) F_{\theta BI}(r_B) dr_B - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{rB}}(r_B, s) F_{rBI}(r_B) dr_B - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{\theta B'}}(r_{B'}, s) F_{\theta B'I}(r_{B'}) dr_{B'} \\
 & - \int_0^{l_{AB}/2} h_{vI}^{F_{rB'}}(r_{B'}, s) F_{rB'I}(r_{B'}) dr_{B'} = -v_M^\infty + v_I^\infty \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

ここで、無限板 M の菱形孔となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nM}$ ,  $\tau_{nIM}$ ,  $U_M$ ,  $V_M$  とし、無限板 I の菱形介在物となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nI}$ ,  $\tau_{nII}$ ,  $U_I$ ,  $V_I$  とすると、式(2), (3)は母材と介在物の接合境界上における、境界条件  $\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0$ ,  $\tau_{nIM} - \tau_{nII} = 0$ ,  $U_M - U_I = 0$ ,  $V_M - V_I = 0$  に相当している。式(2), (3)中の  $l_{AB}$  は AB 間の距離であり、式(2), (3)の右辺の  $\sigma_{nM}^\infty$ ,  $\tau_{nIM}^\infty$  等は無限板 M (または無限板 I) の介在物境界となるべき仮想境界上に生じる遠方荷重による応力および変位である(母材と介在物の角点の位置を一致させるため無限板 I にも遠方荷重を作用させる<sup>(6)(7)</sup>)。また、 $h_{nIM}^{F_{rM}}(r_A, s)$  等は、無限板 M の仮想境界上の点  $r_A$  に  $r$  方向または  $\theta$  方向の単位大きさの集中力(対称形および逆対称形)が作用するとき、菱形孔となる仮想境界上の任意の選点  $s$  に生じる応力である。また  $r_A, r_{A'}$ , および  $r_B, r_{B'}$  はそれぞれ角部 A, A' および B, B' を原点とする境界に沿う方向の局所座標であり、本研究では、未知関数である  $F_{\theta AM}$ ,  $F_{rAM}$ ,  $F_{\theta AI}$ ,  $F_{rAI}$  等を基本密度関数( $r_A^{A-1}$ ,  $r_A^{A'-1}$ )と重み関数( $W_{\theta AM}^I \sim W_{rAI}^I$ )で以下のように近似する<sup>(5)</sup>。

$$\left. \begin{aligned}
 F_{\theta M}(r_A) &= F_{\theta AM}^I(r_A) + F_{\theta AM}^{II}(r_A) = W_{\theta AM}^I(r_A) r_A^{A-1} + W_{\theta AM}^{II}(r_A) r_A^{A'-1} \\
 F_{rAM}(r_A) &= F_{rAM}^I(r_A) + F_{rAM}^{II}(r_A) = W_{rAM}^I(r_A) r_A^{A-1} + W_{rAM}^{II}(r_A) r_A^{A'-1} \\
 F_{\theta AI}(r_A) &= F_{\theta AI}^I(r_A) + F_{\theta AI}^{II}(r_A) = W_{\theta AI}^I(r_A) r_A^{A-1} + W_{\theta AI}^{II}(r_A) r_A^{A'-1} \\
 F_{rAI}(r_A) &= F_{rAI}^I(r_A) + F_{rAI}^{II}(r_A) = W_{rAI}^I(r_A) r_A^{A-1} + W_{rAI}^{II}(r_A) r_A^{A'-1}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned}
 W_{\theta AM}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M a_n r_A^{n-1}, \quad W_{rAM}^I(r_A) = \sum_{n=1}^M b_n r_A^{n-1}, \quad W_{\theta AM}^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M c_n r_A^{n-1}, \quad W_{rAM}^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M d_n r_A^{n-1} \\
 W_{\theta AI}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M e_n r_A^{n-1}, \quad W_{rAI}^I(r_A) = \sum_{n=1}^M f_n r_A^{n-1}, \quad W_{\theta AI}^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M g_n r_A^{n-1}, \quad W_{rAI}^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M h_n r_A^{n-1}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここで  $f_1^{-1}, f_2^{-1}$  は、菱形孔における切欠角部 A での特異応力場を表現するための基本密度関数であり、添字 I, II は、切欠きの二等分線に対して対称形および逆対称形の体積力を作用させることを意味する。式(4)に含まれる基本密度関数  $f_1^{-1}, f_2^{-1}$  は角部先端近傍についてのみ体積力密度の分布を精度よく表現するため、本解析では角部 A の先端近傍と先端近傍を除くその他の部分を別々の重み関数で近似した。

$\lambda_1, \lambda_2$  の値は、図1を例にとると、次の特性方程式の根として与えられる<sup>(1)</sup>(ここで  $\gamma$  は図1の材料1のコーナー角であり、図2では  $\gamma=2\pi-\theta_A$  または  $\gamma=2\pi-\theta_B$  となる)。

対称な場合の特性方程式

$$(\alpha - \beta)^2 \lambda_1^2 (1 - \cos 2\gamma) + 2\lambda_1(\alpha - \beta) \sin \gamma \times \{\sin \lambda_1 \gamma + \sin \lambda_1(2\pi - \gamma)\} + 2\lambda_1(\alpha - \beta) \beta \sin \gamma \times \{\sin \lambda_1(2\pi - \gamma) - \sin \lambda_1 \gamma\} + (1 - \alpha^2) - (1 - \beta^2) \cos 2\lambda_1 \pi + (\alpha^2 - \beta^2) \cos \{2\lambda_1(\gamma - \pi)\} = 0 \dots (6)$$

逆対称な場合の特性方程式

$$(\alpha - \beta)^2 \lambda_2^2 (1 - \cos 2\gamma) - 2\lambda_2(\alpha - \beta) \sin \gamma \times \{\sin \lambda_2 \gamma + \sin \lambda_2(2\pi - \gamma)\} - 2\lambda_2(\alpha - \beta) \beta \sin \gamma \times \{\sin \lambda_2(2\pi - \gamma) - \sin \lambda_2 \gamma\} + (1 - \alpha^2) - (1 - \beta^2) \cos 2\lambda_2 \pi + (\alpha^2 - \beta^2) \cos \{2\lambda_2(\gamma - \pi)\} = 0 \dots (7)$$

式(6), (7)中の  $\alpha, \beta$  は Dundurs の複合パラメータ<sup>(9)</sup> で、材料1, 2の弾性定数により決まる。

$$\alpha = \frac{G_1(\nu_2 + 1) - G_2(\nu_1 + 1)}{G_1(\nu_2 + 1) + G_2(\nu_1 + 1)}, \quad \beta = \frac{G_1(\nu_2 - 1) - G_2(\nu_1 - 1)}{G_1(\nu_2 + 1) + G_2(\nu_1 + 1)}, \quad \nu_i = \begin{cases} (3 - \nu_i)/(1 + \nu_i) \\ 3 - 4\nu_i \end{cases} \quad (i=1, 2)$$

角部 B に分布させる体積力も同様の手法によって離散化を行う。以上のような離散化手法により、境界上に適当に選んだ点での境界条件から式(5)の係数  $a_n \sim h_n$  を決定すれば、特異積分方程式(2), (3)の解が得られる。そして、介在物の角部 A に関して定義された応力拡大係数<sup>(1)</sup>  $K_{I, \lambda_1}, K_{II, \lambda_2}$  は角部先端での重み関数の値 [式(5)]  $W_{\theta AM}^I(0), W_{\theta AM}^{II}(0), W_{\gamma AM}^I(0), W_{\gamma AM}^{II}(0)$  から次式により求められる<sup>(6)(10)</sup>。

$$K_{I, \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} [-2\sqrt{2\pi}(\alpha - \beta)(\nu_1 q_7 + \lambda_1 q_1)] W_{\theta AM}^I(0) / [2\{\lambda_1(\alpha - \beta)q_4 + (1 - \beta)q_2\}p_5 + \{(\lambda_1 + 1)(\alpha - \beta)q_3\}p_6](\nu_1 q_7 + \lambda_1 q_1) - [\{\lambda_1(\alpha - \beta)q_4 + (1 - \beta)q_2\}p_5 + \{(\lambda_1 - \nu_1)(\alpha - \beta)q_3\}p_6][(\nu_1 - 1)q_7 + (\nu_1 + 2\lambda_1 + 1)q_1] + [\{\lambda_1(\alpha - \beta)q_4 + (1 - \beta)q_2\}q_5 + \{(\lambda_1 + \nu_1)(\alpha - \beta)q_3\}q_6](\nu_1 + 1)(p_7 + p_1)]$$

$$K_{II, \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1} [-2\sqrt{2\pi}(\alpha - \beta)(\nu_1 q_7 + \lambda_1 q_1)] W_{\gamma AM}^I(0) / [2\{\lambda_1(\alpha - \beta)q_4 + (1 - \beta)q_2\}q_5 + \{(\lambda_1 - 1)(\alpha - \beta)q_3\}q_6](\nu_1 q_7 + \lambda_1 q_1) - [\{\lambda_1(\alpha - \beta)q_4 + (1 - \beta)q_2\}p_5 + \{(\lambda_1 - \nu_1)(\alpha - \beta)q_3\}p_6](\nu_1 + 1)(p_7 + p_1) + [\{\lambda_1(\alpha - \beta)q_4 + (1 - \beta)q_2\}q_5 + \{(\lambda_1 + \nu_1)(\alpha - \beta)q_3\}q_6][(1 - \nu_1)q_7 + (\nu_1 - 2\lambda_1 + 1)q_1]$$

$$\gamma = 2\pi - \theta_A$$

$$p_1 = \cos \gamma, \quad p_2 = \cos(\lambda_1 \pi), \quad p_3 = \cos[\lambda_1(\gamma - \pi)], \quad p_4 = \cos[\gamma - \lambda_1(\gamma - \pi)]$$

$$p_5 = \cos \frac{(\lambda_1 + 1)\gamma}{2}, \quad p_6 = \cos \frac{(\lambda_1 - 1)\gamma}{2}, \quad p_7 = \cos(2\lambda_1 \pi - \lambda_1 \gamma)$$

$$q_1 = \sin \gamma, \quad q_2 = \sin(\lambda_1 \pi), \quad q_3 = \sin[\lambda_1(\gamma - \pi)], \quad q_4 = \sin[\gamma - \lambda_1(\gamma - \pi)]$$

$$q_5 = \sin \frac{(\lambda_1 + 1)\gamma}{2}, \quad q_6 = \sin \frac{(\lambda_1 - 1)\gamma}{2}, \quad q_7 = \sin(2\lambda_1 \pi - \lambda_1 \gamma)$$

..... (8)

Table 1 Convergency of  $F_{I, \lambda_1}$  and  $F_{II, \lambda_2}$  at the corner A ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, l_2/d = 1/2, G_2/G_1 = 10^{-1}, \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty, \tau_{xy}^\infty = 0, \theta_A = 60^\circ$ , Plane strain state in Fig. 2)

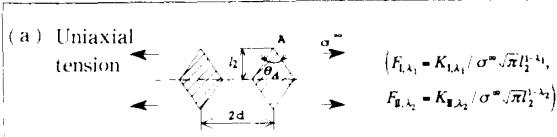
M	$F_{I, \lambda_1} (\lambda_1 = 0.6900333)$		$F_{II, \lambda_2} (\lambda_2 = 0.7940938)$	
	from $W_{\gamma AM}^I(0)$	from $W_{\theta AM}^I(0)$	from $W_{\gamma AM}^{II}(0)$	from $W_{\theta AM}^{II}(0)$
4	0.62575	0.62558	0.01699	0.01699
6	0.62611	0.62599	0.01701	0.01701
8	0.62622	0.62614	0.01702	0.01702
10	0.62626	0.62621	0.01703	0.01703
12	0.62627	0.62623	0.01704	0.01705

Table 2 Convergency of  $F_{I, \lambda_1}$  and  $F_{II, \lambda_2}$  at the corner A ( $\nu_1 = \nu_2 = 0.3, l_2/d = 1/2, G_2/G_1 = 10^{-1}, \sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 0, \tau_{xy}^\infty = \tau^\infty, \theta_A = 60^\circ$ , Plane strain state in Fig. 2)


M	$F_{I, \lambda_1} (\lambda_1 = 0.6900333)$		$F_{II, \lambda_2} (\lambda_2 = 0.7940938)$	
	from $W_{\gamma AM}^I(0)$	from $W_{\theta AM}^I(0)$	from $W_{\gamma AM}^{II}(0)$	from $W_{\theta AM}^{II}(0)$
4	0.02197	0.02204	1.53979	1.53979
6	0.02195	0.02199	1.54003	1.54003
8	0.02195	0.02198	1.54012	1.54012
10	0.02195	0.02197	1.54014	1.54014
12	0.02195	0.02196	1.54019	1.54019

Table 3  $F_{I,\lambda_1}$  and  $F_{II,\lambda_2}$  for two diamond shaped inclusions at the corner A under various loading conditions (Plane strain state  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

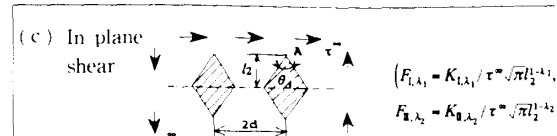
(a) Uniaxial tension



(b) Biaxial tension



(c) In plane shear



$\theta_A$	$l_2/d$	$G_2/G_1$	$G_2/G_1$						
			$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	
30°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.042	0.909	0.747	-0.160	-0.174	-0.177
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.999	0.000	0.878	0.735	-0.161	-0.175	-0.179
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.008	0.008	0.004	0.004	0.009	0.009	0.009
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.960	0.060	0.848	0.725	-0.162	-0.176	-0.180
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.026	0.022	0.011	0.011	0.022	0.022	0.022
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.923	0.082	0.820	0.715	-0.162	-0.176	-0.181
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 0.048	0.042	0.020	0.020	0.035	0.035	0.035	
60°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.148	1.054	0.717	-0.154	-0.173	-0.177
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.096	0.018	0.878	0.735	-0.159	-0.175	-0.179
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.018	0.017	0.010	0.010	0.004	0.004	0.004
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.049	0.049	0.970	0.681	-0.161	-0.175	-0.178
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.049	0.045	0.028	0.028	0.012	0.012	0.012
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.006	0.096	0.933	0.666	-0.161	-0.176	-0.179
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 0.088	0.082	0.052	0.052	0.023	0.023	0.023	
90°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.293	1.223	0.858	-0.131	-0.148	-0.152
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.228	0.067	1.163	0.828	-0.145	-0.159	-0.161
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.067	0.065	0.051	0.051	0.003	0.003	0.003
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.172	0.177	1.113	0.803	-0.147	-0.161	-0.164
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.177	0.171	0.138	0.138	0.011	0.011	0.011
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.125	0.305	1.070	0.781	-0.146	-0.160	-0.165
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 0.305	0.297	0.244	0.244	0.026	0.026	0.026	

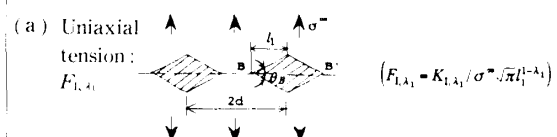
$\theta_A$	$l_2/d$	$G_2/G_1$	$G_2/G_1$						
			$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	
30°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.014	0.889	0.749	0.214	0.244	0.251
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.977	0.008	0.862	0.740	0.213	0.243	0.249
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.008	0.007	0.003	0.003	0.002	0.002	0.002
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.944	0.022	0.837	0.732	0.212	0.242	0.248
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.022	0.019	0.008	0.008	0.003	0.003	0.003
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.911	0.042	0.813	0.724	0.211	0.240	0.246
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 0.042	0.036	0.016	0.016	0.004	0.004	0.004	
60°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.034	0.950	0.648	0.283	0.310	0.313
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.998	0.012	0.920	0.637	0.281	0.307	0.311
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.012	0.011	0.006	0.006	0.002	0.002	0.002
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.966	0.033	0.893	0.626	0.279	0.305	0.308
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.033	0.030	0.017	0.017	0.007	0.007	0.007
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.935	0.061	0.866	0.616	0.276	0.301	0.306
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 0.061	0.056	0.032	0.032	0.019	0.019	0.019	
90°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.010	0.952	0.654	0.427	0.447	0.453
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.982	0.028	0.926	0.641	0.422	0.442	0.445
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.028	0.027	0.020	0.020	0.001	0.001	0.001
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.955	0.076	0.901	0.628	0.418	0.436	0.439
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 0.076	0.074	0.058	0.058	0.006	0.006	0.005
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 0.923	0.152	0.872	0.613	0.414	0.431	0.433
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 0.152	0.147	0.118	0.118	0.016	0.015	0.013	

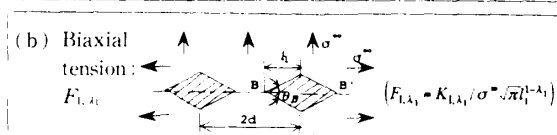
$\theta_A$	$l_2/d$	$G_2/G_1$	$G_2/G_1$						
			$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	
30°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.154	1.126	1.026	0.000	0.000	0.000
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.008	0.008	1.007	1.035	0.001	0.001	0.002
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.008	1.007	1.142	1.035	0.001	0.001	-0.609
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.023	0.023	1.021	1.042	0.001	0.002	0.006
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.023	1.024	1.154	1.042	0.001	0.002	-0.596
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.048	0.048	1.043	1.046	0.003	0.003	0.012
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 1.048	1.046	1.162	1.046	0.003	0.003	-0.579	
60°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	1.599	1.586	1.507	0.000	0.000	0.000
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.629	0.012	1.611	1.526	0.002	0.002	0.004
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.629	1.629	1.613	1.526	0.002	0.002	-0.628
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.650	0.038	1.635	1.540	0.005	0.006	0.010
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.650	1.634	1.634	1.540	0.005	0.006	-0.607
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.662	0.080	1.662	1.547	0.009	0.011	0.018
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 1.662	1.646	1.646	1.547	0.009	0.011	-0.585	
90°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 0.000	4.279	4.318	4.723	0.000	0.000	0.000
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 4.390	0.026	4.024	4.816	-0.972	-0.972	-0.975
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 4.390	4.390	4.426	4.816	-0.972	-0.972	-0.975
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 4.435	0.083	4.078	4.868	-0.965	-0.965	-0.974
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 4.435	4.430	4.490	4.868	-0.965	-0.965	-0.974
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 4.436	0.188	4.175	4.849	-0.968	-0.968	-0.975
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 4.436	4.471	4.849	4.849	-0.968	-0.968	-0.975	

Table 4  $F_{I,\lambda_1}$  or  $F_{II,\lambda_2}$  for two diamond shaped inclusion at the corner B and B' under various loading conditions (Plane strain state  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

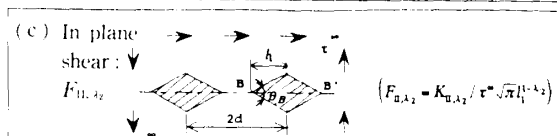
(a) Uniaxial tension



(b) Biaxial tension



(c) In plane shear



$\theta_B$	$h/d$	$G_2/G_1$	$G_2/G_1$					
			$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^1$	$10^2$	$10^3$
30°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 1.042	0.909	0.747	-0.160	-0.174	-0.177
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.062	0.925	0.755	-0.165	-0.179	-0.184
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.057	0.921	0.754	-0.164	-0.178	-0.181
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.092	0.947	0.764	-0.169	-0.185	-0.193
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.072	0.932	0.757	-0.166	-0.180	-0.183
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.156	0.996	0.783	-0.179	-0.199	-0.204
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 1.096	0.948	0.761	-0.168	-0.184	-0.189	
60°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 1.148	1.054	0.717	-0.154	-0.173	-0.175
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.164	1.068	0.722	-0.154	-0.175	-0.178
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.160	1.065	0.721	-0.152	-0.172	-0.175
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.190	1.090	0.731	-0.162	-0.185	-0.187
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.174	1.076	0.725	-0.155	-0.176	-0.181
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.252	1.143	0.753	-0.178	-0.206	-0.208
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 1.197	1.095	0.730	-0.159	-0.181	-0.186	
90°	0	B, B'	$F_{I,\lambda_1}$ 1.293	1.223	0.858	-0.131	-0.148	-0.152
	1/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.299	1.228	0.860	-0.149	-0.165	-0.170
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.310	1.229	0.860	-0.144	-0.158	-0.161
	1/2	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.317	1.244	0.867	-0.167	-0.188	-0.189
		B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.313	1.240	0.865	-0.149	-0.163	-0.168
	2/3	B	$F_{I,\lambda_1}$ 1.374	1.296	0.893	-0.201	-0.231	-0.221
B'		$F_{II,\lambda_2}$ 1.336	1.262	0.873	-0.154	-0.169	-0.175	

$\theta_B$	$h/d$	$G_2/G_1$	$G_2/G_1$					
			$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^1$	$10^2$	$10^3$
30°	0	B, B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.014	0.889	0.749	0.214	0.244	0.251
	1/3	B	$F_{II,\lambda_2}$ 1.036	0.904	0.752	0.213	0.247	0.254
		B'	$F_{I,\lambda_1}$ 1.031	0.900	0.750	0.215	0.245	0.251
	1/2	B	$F_{II,\lambda_2}$ 1.067	0.928	0.763	0.219	0.254	0.266
		B'	$F_{I,\lambda_1}$ 1.046	0.912	0.754	0.216	0.247	0.253
	2/3	B	$F_{II,\lambda_2}$ 1.133	0.979	0.783	0.230	0.273	0.295
B'		$F_{I,\lambda_1}$ 1.071	0.929	0.758	0.218	0.254	0.256	
60°	0	B, B'	$F_{II,\lambda_2}$ 1.034	0.950	0.648	0.283	0.310	0.313
	1/3	B	$F_{II,\lambda_2}$ 1.057	0.970	0.656	0.283	0.312	0.315
		B'	$F_{I,\lambda_1}$ 1.051	0.964	0.6			

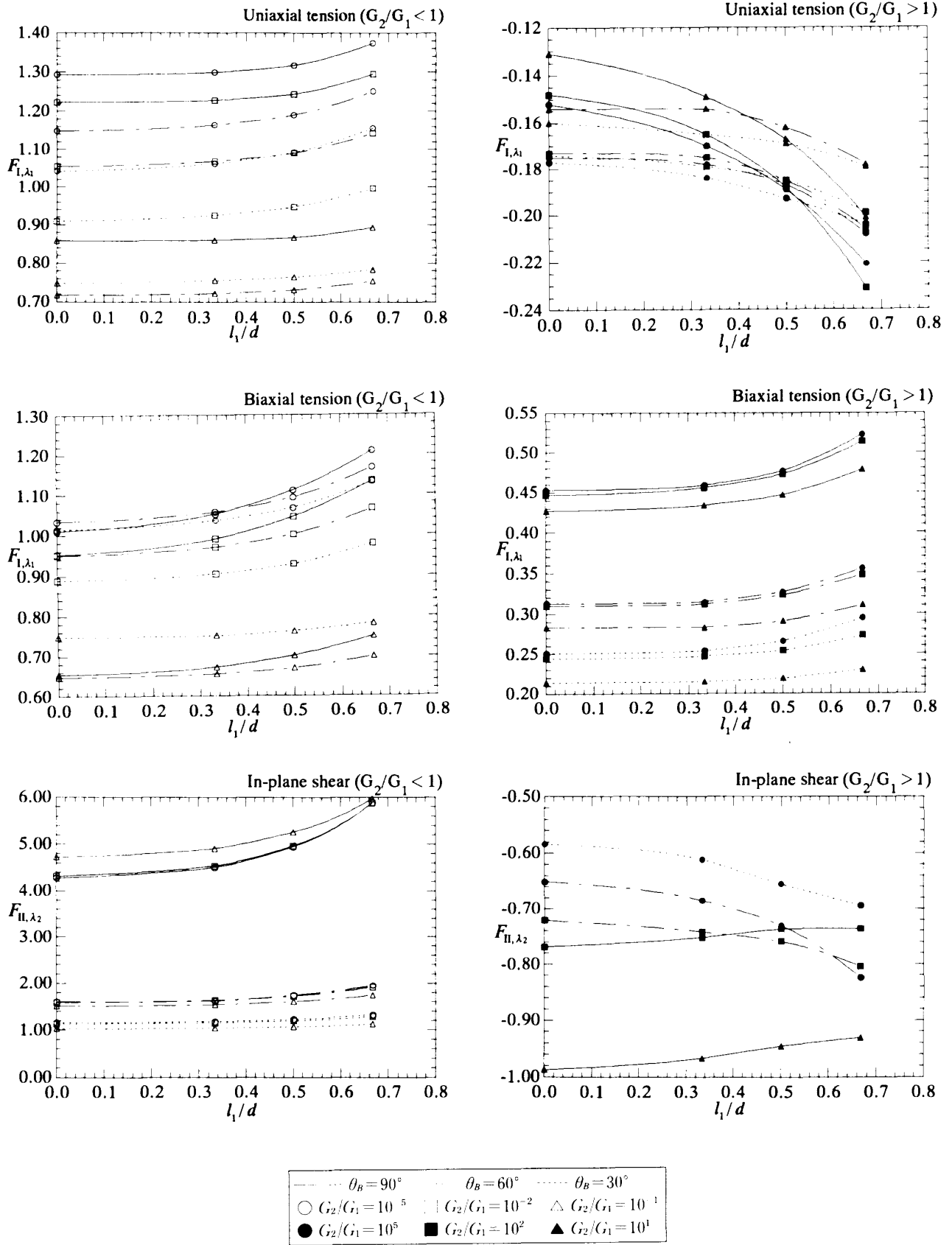


Fig. 3 Interaction of  $F_{I,\lambda_1}$  or  $F_{II,\lambda_2}$  for two diamond shaped inclusions at the corner B under various loading conditions (Plane strain state  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ )

$$\begin{aligned}
 K_{11, \lambda_2} &= \frac{1}{\lambda_2} [2\sqrt{2\pi}(\alpha - \beta)(\alpha_1 q_{13} - \lambda_2 q_1) W_{\theta AM}^{II}(0) / \\
 &\quad [2\{[\lambda_2(\alpha - \beta)q_{10} - (1 - \beta)q_8]q_{11} + \{(\lambda_2 + 1)(\alpha - \beta)q_9\}q_{12}\}(\alpha_1 q_{13} - \lambda_2 q_1) \\
 &\quad - \{[\lambda_2(\alpha - \beta)q_{10} - (1 - \beta)q_8]q_{11} + \{(\lambda_2 - \alpha_1)(\alpha - \beta)q_9\}q_{12}\}[(1 - \alpha_1)q_{13} + (\alpha_1 + 2\lambda_2 + 1)q_1] \\
 &\quad + \{[\lambda_2(\alpha - \beta)q_{10} - (1 - \beta)q_8\}p_{11} + \{(\lambda_2 + \alpha_1)(\alpha - \beta)q_9\}p_{12}\}(\alpha_1 + 1)(p_{13} - p_1)] \\
 K_{11, \lambda_2} &= \frac{1}{\lambda_2} [2\sqrt{2\pi}(\alpha - \beta)(\alpha_1 q_{13} - \lambda_2 q_1) W_{\gamma AM}^{II}(0) / \\
 &\quad [2\{[\lambda_2(\alpha - \beta)q_{10} - (1 - \beta)q_8]p_{11} + \{(\lambda_2 - 1)(\alpha - \beta)q_9\}p_{12}\}(\alpha_1 q_{13} - \lambda_2 q_1) \\
 &\quad + \{[\lambda_2(\alpha - \beta)q_{10} - (1 - \beta)q_8]q_{11} + \{(\lambda_2 - \alpha_1)(\alpha - \beta)q_9\}q_{12}\}(\alpha_1 + 1)(p_{13} + p_1) \\
 &\quad + \{[\lambda_2(\alpha - \beta)q_{10} - (1 - \beta)q_8\}p_{11} + \{(\lambda_2 + \alpha_1)(\alpha - \beta)q_9\}p_{12}\}[(\alpha_1 - 1)q_{13} + (\alpha_1 - 2\lambda_2 + 1)q_1] \\
 \gamma &= 2\pi - \theta_A \\
 p_1 &= \cos \gamma, \quad p_8 = \cos(\lambda_2 \pi), \quad p_9 = \cos[\lambda_2(\gamma - \pi)], \quad p_{10} = \cos[\gamma - \lambda_2(\gamma - \pi)] \\
 p_{11} &= \cos \frac{(\lambda_2 + 1)\gamma}{2}, \quad p_{12} = \cos \frac{(\lambda_2 - 1)\gamma}{2}, \quad p_{13} = \cos(2\lambda_2 \pi - \lambda_2 \gamma) \\
 q_1 &= \sin \gamma, \quad q_8 = \sin(\lambda_2 \pi), \quad q_9 = \sin[\lambda_2(\gamma - \pi)], \quad q_{10} = \sin[\gamma - \lambda_2(\gamma - \pi)] \\
 q_{11} &= \sin \frac{(\lambda_2 + 1)\gamma}{2}, \quad q_{12} = \sin \frac{(\lambda_2 - 1)\gamma}{2}, \quad q_{13} = \sin(2\lambda_2 \pi - \lambda_2 \gamma) \\
 &\dots\dots\dots (9)
 \end{aligned}$$

3. 解析結果および考察

図2に示す無限板中の2個の菱形介在物角部の干渉問題において、角部Aの角度 $\theta_A$ 、角部Bの角度 $\theta_B$ 、寸法比 $l_1/d$ 、または $l_2/d$ さらに介在物の剛性率 $G_2/G_1$ を系統的に変えて角部の応力拡大係数 $K_{I, \lambda_1}$ 、 $K_{II, \lambda_2}$ の解析を行った。まず、このような角部の干渉問題における本法の解析精度について検討を行う。角部先端の応力拡大係数は、 $K_{I, \lambda_1}$ については $W_{\theta AM}^I(0)$ 、 $W_{\gamma AM}^I(0)$ より、 $K_{II, \lambda_2}$ については $W_{\theta AM}^{II}(0)$ 、 $W_{\gamma AM}^{II}(0)$ からそれぞれ求められる。 $\theta$ 方向と $r$ 方向の重みより求められる $K_{I, \lambda_1}$ 、 $K_{II, \lambda_2}$ の値は、数値解析の誤差を除けばそれぞれ一致する。例として、図2において $\theta_A = 60^\circ$ 、 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 、 $l_2/d = 1/2$ 、 $G_2/G_1 = 10^{-1}$ の条件で、 $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = \sigma^\infty$ 、 $\tau_{xy}^\infty = 0$ の両軸引張荷重(平面ひずみ)と、 $\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = 0$ 、 $\tau_{xy}^\infty = \tau^\infty$ のせん断荷重(平面ひずみ)の場合、角部Aについて式(10)、(11)を用いて得られる $F_{I, \lambda_1}$ 、 $F_{II, \lambda_2}$ の収束状況を表1、2に示す。

$$F_{I, \lambda_1} = K_{I, \lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_1}, \quad F_{II, \lambda_2} = K_{II, \lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_2} \dots\dots\dots (10)$$

$$F_{I, \lambda_1} = K_{I, \lambda_1} / \tau^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_1}, \quad F_{II, \lambda_2} = K_{II, \lambda_2} / \tau^\infty \sqrt{\pi} l_2^{-\lambda_2} \dots\dots\dots (11)$$

なお、表1、2で $M$ は角部A等の先端近傍の選点数であり、総選点数は $8M$ 、未知関数を決定する連立方程式の元数は $32M$ である。表1、2の結果は良好な収束性を示している。また、表1、2に示す以外の形状でも検討した結果、本解析法では $M = 12$ 程度で $\theta$ 方向と $r$ 方向の重みから得られた $F_{I, \lambda_1}$ 、 $F_{II, \lambda_2}$ の値が有効数字4けた程度まで一致し収束しており、良好な収束性

を示すことが確認された。以下では、このようにして得られた菱形介在物角部の応力拡大係数を、介在物の剛性率と距離を系統的に変化させて正確に計算した。

表3は $\theta_A \leq 90^\circ$ のとき、角部Aについて得られた一軸引張り( $x$ 方向)、両軸引張りおよびせん断荷重下での $F_{I, \lambda_1}$ 、 $F_{II, \lambda_2}$ の値を示したものである。また、表4は $\theta_B \leq 90^\circ$ のとき、角部BおよびB'について得られた一軸引張り( $y$ 方向)および両軸引張りの場合の $F_{I, \lambda_1}$ 、せん断荷重下での $F_{II, \lambda_2}$ の値を示したものである。これらの表で $l_1/d = 0$ および $l_2/d = 0$ で $G_2/G_1 = 10^{-5}$ と $G_2/G_1 = 10^5$ の結果は菱形孔または菱形剛体介在物が単独に存在する場合に相当しており、これらについては陳らの解析結果<sup>(10)</sup>と有効数字4けたまで完全に一致している。

図3は、 $l_2/d = 0, 1/3, 1/2, 2/3$ のときの $\theta_B \leq 90^\circ$ で角部Bについて得られた(a)一軸引張り( $y$ 方向)、(b)両軸引張り、(c)せん断荷重下での $F_{I, \lambda_1}$ 、 $F_{II, \lambda_2}$ を図示したものである。図3から特に角部の応力拡大係数の干渉効果が大きく現れているのは、角部Bの角度が $90^\circ$ で $G_2/G_1 > 1$ のときの $y$ 方向一軸引張りのときであり、 $l_1/d = 2/3$ で5割程度応力拡大係数が大きくなっている(ただし応力拡大係数の値そのものは小さい)。また角部Bが $90^\circ$ で $G_2/G_1 < 1$ の面内せん断のときにも、 $l_1/d = 2/3$ で4割程度の干渉効果が現れている(このときは応力拡大係数の値も大きい)。本研究で解析した $l_1/d \leq 2/3, l_2/d \leq 2/3$ の範囲では、上述の場合を除いて介在物が1個の場合と比べて、干渉効果はそれほど大きく現れておらず、多くの場合で最大でも2割程度である。

## 4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を利用して無限板中に存在する2個の菱形介在物の応力拡大係数  $K_{I, A_1}$ ,  $K_{II, A_2}$  の干渉効果を、介在物の剛性率と距離を系統的に変化させ厳密に解析した。得られた結果をまとめると以下ようになる。

(1) 特異積分方程式の数値解析には、未知関数である体積力密度を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法を用いた。その結果、介在物の寸法比・剛性比が変化しても角部先端近傍の選点数  $M=12$  (総選点数96) 程度で有効数字4けた程度収束した結果が得られ、解法の有効性が確認された(表1, 2)。

(2) 介在物の寸法比  $l_1/d \leq 2/3$ ,  $l_2/d \leq 2/3$  の範囲で、遠方での荷重条件として(i)一軸引張り、(ii)両軸引張り、(iii)面内せん断の3種類について干渉効果を考察した(表3, 4, 図3)。その結果干渉効果が大きく現れたのは、角部Bの角度が  $90^\circ$  で  $G_2/G_1 \geq 10$  のときの  $y$  方向一軸引張り(5割程度)と、 $G_2/G_1 \leq 10^{-1}$  の面内せん断(4割程度)のときであった。その他の場合では、角部の応力拡大係数の干渉効果は最大でも2割程度であった。

## 文 献

- (1) 陳玳珩・西谷弘信, 接合異材の角部近傍での応力場, 機論, 57-534, A(1991), 366-372.
- (2) Theocaris, P. S., The Order of Singularity at a Multi-Wedge Corner of a Composite Plate, *Int. J. Engng.*

- Sci.*, 12(1969), 107-120.
- (3) 陳玳珩・西谷弘信, 介在物の角部における特異応力場の数値解析, 機論, 57-542, A(1991), 2504-2508.
- (4) 服部敏雄・坂田莊司・初田俊雄・村上元, 応力特異場パラメータを用いた接着境界面強度評価, 機論, 54-499, A(1988), 597-603.
- (5) 野田高昭・小田和広・樋口健・田中篤, 体積力法の特異積分方程式の数値解析による界面き裂および角部の応力拡大係数の解析, 機論, 60-578, A(1994), 2213-2219.
- (6) 陳玳珩・西谷弘信, 半無限板のV形切欠先端における特異応力場, 機論, 57-538, A(1991), 1406-1411.
- (7) 陳玳珩・西谷弘信, 短繊維端における特異応力場の強さ解析(第1報, 解析方法), 機論, 58-554, A(1992), 1834-1838.
- (8) 西谷弘信・陳玳珩・柴戸明, 面外せん断による菱形介在物角部の特異応力場, 機論, 59-561, A(1993), 1191-1195.
- (9) Dundurs, J., Discussion of Edge bonded Dissimilar Orthogonal Elastic Wedges Under Normal and Shear Loading, *J. appl. Mech.*, 36(1969), 650-652.
- (10) Chen, D. H. and Nisitani, H. (Fujitani, Y., ほか2名編), *Singular Stress Field at Inclusion Corner, Modelling, Computation and Analysis in Fracture Mechanics*, (1994), 93-113, Kinokuniya.
- (11) 野田高昭・小田和広・井上隆行, 角部の応力拡大係数の干渉効果の解析, 機論, 61-589, A(1995), 2052-2059.
- (12) 野田高昭・松尾忠利, 特異積分方程式によるだ円形介在物の干渉効果の解析, 機論, 60-578, A(1994), 2411-2417.
- (13) 野田高昭・松尾忠利, せん断応力場におけるだ円形介在物の干渉効果の解析(体積力法の特異積分方程式の数値解析法), 機論, 60-580, A(1994), 2767-2773.
- (14) 野田高昭・松尾忠利・石井秀雄, 任意個の1列だ円形介在物をもつ板の引張り, 機論, 61-581, A(1995), 106-113.
- (15) 野田高昭・松尾忠利・原田昭治・中村資生, 特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析, 機論, 61-581, A(1995), 965-973.