

特異積分方程式による2個および多数個の  
斜め縁き裂の干渉効果の解析\*

野田尚昭\*<sup>1</sup>, 鶴元樹\*<sup>2</sup>, 小田和広\*<sup>3</sup>

Stress Intensity Factors of Double and Multiple Edge Cracks

Nao-Aki NODA, Motoki TSURU and Kazuhiro ODA

In this paper the interaction of multiple edge cracks in a semi-infinite plate is considered. The problem is formulated as a system of hypersingular integral equations using the stress field due to a force doublet as a fundamental solution. In the numerical calculations, unknown functions are approximated by fundamental density functions and Chebyshev polynomials. First, two edge cracks A and B having different crack lengths and inclination angles are analyzed and the effect of crack B upon crack A is investigated. The stress intensity factor (SIF) of crack A is found to be almost constant independent of inclination angle B if the tip of crack B is fixed. Second, periodic edge cracks are systematically analyzed varying the number, distance and angle of cracks. The interaction effect is found to occur mostly due to the distance independent of the angle. Analytical results are also shown when crack parameters are changed slightly from average values in almost equally spaced multiple edge cracks.

**Key Words:** Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Hypersingular Integral Equation Method, Multiple Edge Cracks, Interaction Effect

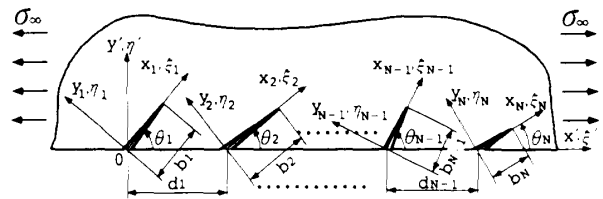
1. 緒言

構造材料の表面には、金属疲労や加工傷が原因となって多数の縁き裂が生じることがある。このため縁き裂が単独に存在する場合のみならず、多数個存在する場合の応力拡大係数を調べることは重要である。その最も基本的な場合である半無限板中の縁き裂の干渉効果に関する研究は、これまでもいくつかなされている<sup>(1)~(4)</sup>。西谷ら<sup>(1)(3)</sup>と石田<sup>(2)</sup>は、2個の縁き裂の解析を体積法で行っている。また、縁に直角な周期縁き裂について、その中央<sup>(1)</sup>ならびに両端<sup>(2)</sup>のき裂の応力拡大係数も解析されている。しかし、任意個の斜め縁き裂が存在するときの応力拡大係数や、き裂の位置、角度と干渉効果の関係といった詳しい考察は、これまでのところ見当たらないようである。

著者らは、さきに体積法の特異積分方程式を厳密に解析することによって二次元および三次元のき裂問題を考察し、未知関数である体積力密度を基本密度関数と級数の積で近似する方法の有効性を多くの問題で

確認した<sup>(5)~(7)</sup>。そこで本研究では、同様な手法により斜め縁き裂の干渉問題を考察する。

解析では、初めに、2個の斜め縁き裂の干渉問題を従来の研究よりき裂形状パラメータを種々に変化させて詳しく解析し、干渉効果がおもにどのようなき裂形状寸法で支配されているかを考察する。次に、多数個の斜め縁き裂が規則的に配列する場合ならびに、注目するき裂の位置形状パラメータが規則的な平均値からずれた場合の応力拡大係数への影響を調べる。すなわち、高精度の解析結果を基に、図1に示すような多数の縁き裂の種々の分布に対して、その応力拡大係数を考える上で参考となるいくつかの考察結果を述べる。



$$x_i = b \cos \theta_i + \sum_{k=1}^{i-1} d_k, \quad y_i = b \sin \theta_i \quad (i=1 \sim N)$$

$$\xi_k = b_k \cos \theta_k + \sum_{j=1}^{k-1} d_j, \quad \eta_k = b_k \sin \theta_k \quad (k=1 \sim N)$$

Fig. 1 A system of edge cracks in a semi-infinite plate

\* 原稿受付 1995年11月6日。

\*<sup>1</sup> 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

\*<sup>2</sup> 学生員、九州工業大学。

\*<sup>3</sup> 正員、徳山工業高等専門学校 (〒745 徳山市久米高城3538)。

2. 任意個の縁き裂の干渉問題の解析法

図1のように、遠方で一様引張応力  $\sigma_\infty$  が作用している半無限板の直線縁に斜めに入った  $N$  個のき裂の干渉問題を例にとって説明する。

問題は、 $i$  番めのき裂上下面の法線および接線方向の変位差、 $V_{1i}(\xi_i), V_{2i}(\xi_i)$  を未知関数とする式(1)に示すような積分方程式で表される。

$$\begin{aligned} \int_0^{b_i} \frac{V_{1i}(\xi_i)}{(\xi_i - x_i)} d\xi_i + \sum_{k=1, k \neq i}^N \left[ \int_0^{b_k} K_{11}(\xi_k, x_i) V_{1k}(\xi_k) d\xi_k + \int_0^{b_k} K_{12}(\xi_k, x_i) V_{2k}(\xi_k) d\xi_k \right] &= -\pi \frac{1+\kappa}{2G} \sigma_\infty \sin^2 \theta_i \\ \int_0^{b_i} \frac{V_{2i}(\xi_i)}{(\xi_i - x_i)} d\xi_i + \sum_{k=1, k \neq i}^N \left[ \int_0^{b_k} K_{21}(\xi_k, x_i) V_{1k}(\xi_k) d\xi_k + \int_0^{b_k} K_{22}(\xi_k, x_i) V_{2k}(\xi_k) d\xi_k \right] &= -\pi \frac{1+\kappa}{2G} \sigma_\infty \sin \theta_i \cos \theta_i \quad (i=1 \sim N) \end{aligned} \dots\dots\dots (1)$$

ここで  $G$ : 横弾性係数,  $\kappa=3-4\nu$  (平面ひずみ),  $\nu$ : ポアソン比である。

き裂上下面の変位差は、単位食違い<sup>(8)</sup>を適当に分布させたものとみなすことができる。いま、単位食違いによる応力を  $\sigma_{u1}, \sigma_{u2}$  とし、単位大きさの引張りの標準形集中度による応力を  $\sigma_{pr}$ 、単位大きさのせん断の標準形集中度による応力を  $\sigma_{ps}$  とすれば以下のような関係がある<sup>(8)</sup>。

$$\sigma_{u1} = \frac{G(\kappa+1)}{\kappa-1} \sigma_{pr}, \quad \sigma_{u2} = G\sigma_{ps} \quad \left[ \text{すなわち, } V_{1i}(\xi_i) = \frac{\kappa-1}{G(\kappa+1)} P_{1i}(\xi_i), \quad V_{2i}(\xi_i) = \frac{1}{G} P_{2i}(\xi_i) \right] \dots\dots\dots (2)$$

式(2)の関係をを用いれば、この問題は、仮想き裂面上に分布させた標準形体積力対密度  $P_{1i}(\xi_i), P_{2i}(\xi_i)$  を未知関数とする積分方程式とみなすことができる。式(1)において、 $\sum_{k=1, k \neq i}^N$  は  $i$  番めのき裂を除いた  $N-1$  個の縁き裂となるべき仮想境界について標準形体積力対密度を積分することを意味する。つまり、式(1)は、き裂のない弾性体中に想定した仮想き裂面上に標準形体積力対を分布させた場合の  $i$  番めのき裂の境界条件式に相当する。 $K_{lm}(\xi_k, x_i)$  ( $l, m=1, 2$ ) は、き裂面以外の境界条件を満足させる関数である。そして、 $\int$  は発散積分の有限部分をとることを意味する。積分範囲を  $0 \sim 1$  とするため、変数  $r_i, s_i$  を次のように定義する。

$$r_i = \frac{\xi_i}{b_i}, \quad s_i = \frac{x_i}{b_i}, \quad f_{1i}(r_i) = \frac{P_{1i}(\xi_i)}{b_i}, \quad f_{2i}(r_i) = \frac{P_{2i}(\xi_i)}{b_i} \quad (i=1 \sim N) \dots\dots\dots (3)$$

未知関数となる  $f_{1i}(r_i), f_{2i}(r_i)$  は、基本密度関数  $w_1(r_i), w_2(r_i)$  と Chebyshev 多項式  $U_n(r_i)$  の積で近似する。

$$\begin{aligned} w_1(r_i) &= \frac{(1+\kappa)^2}{2(\kappa-1)} \sqrt{1-r_i^2}, \quad w_2(r_i) = \frac{\kappa+1}{2} \sqrt{1-r_i^2} \\ f_{1i}(r_i) &= F_{1i}(r_i)w_1(r_i), \quad F_{1i}(r_i) = \sum_{n=0}^{M_i-1} a_{ni}U_n(r_i), \quad f_{2i}(r_i) = F_{2i}(r_i)w_2(r_i), \quad F_{2i}(r_i) = \sum_{n=0}^{M_i-1} b_{ni}U_n(r_i) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

( $i=1 \sim N$ ) ( $M_i$ :  $i$  番めのき裂の選点数)

このような離散化手法によれば式(1)の発散積分は、Chebyshev 多項式の積分公式<sup>(9)</sup>を利用して評価できる。結局本解析では、係数  $a_{ni}, b_{ni}$  ( $n=0 \sim M_i-1, i$

$=1 \sim N$ ) についての  $2 \sum_{i=1}^N M_i$  元の連立方程式を解くことに帰着する。き裂の無次元化応力拡大係数  $F_{1i}, F_{2i}$  は、き裂先端での重み関数  $F_{1i}(1), F_{2i}(1)$  の値から求まる<sup>(5)</sup>。

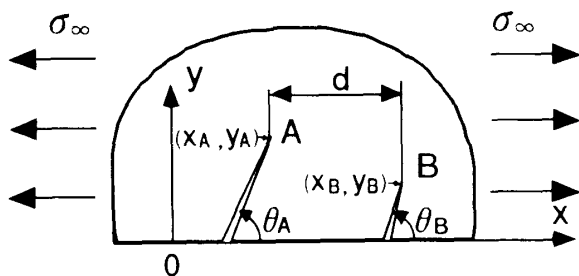


Fig. 2 Two edge cracks in a semi infinite plate

3. 解析結果および考察

3.1 半無限板の2個の縁き裂 まず、図2の半無限板中の2個の斜め縁き裂の干渉問題について解析を行った。表1, 2は、き裂の先端の座標  $(x_A, y_A), (x_B, y_B)$  を固定したとき、き裂Bの傾き角  $\theta_B$  の及ぼす、き裂Aの応力拡大係数への影響をまとめたものである。表1, 2で  $(\theta_A = \theta_B = 90^\circ)$  と  $(\theta_A = 135^\circ, \theta_B = 45^\circ)$  の

Table 1 Effect of crack B on the stress intensity factors of crack A

$$F_{IA} = K_{IA}/\sigma_\infty\sqrt{\pi y_A} \operatorname{cosec} \theta_A, F_{IIA} = K_{IIA}/\sigma_\infty\sqrt{\pi y_A} \operatorname{cosec} \theta_A$$

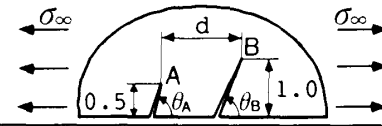
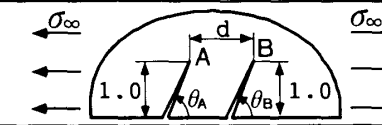
						$y_A=0.5$ $y_B=1.0$ $x_B-x_A=d$		
			$F_{IA} [ ( ) : F_{IA}/F_{IA}  _{\theta_B=90^\circ} ]$			$F_{IIA} [ ( ) : F_{IIA}/F_{IIA}  _{\theta_B=90^\circ} ]$		
$d/y_A$	$d/y_B$	$\theta_A / \theta_B$	45°	90°	135°	45°	90°	135°
1.0	0.5	45°	—	—	—	—	—	—
		63.4°	—	0.1438(1.21)	—	—	0.0749(0.77)	—
		90°	-0.0091(1.00)	0.1182(1.00)	0.1437(1.00)	0.0821(1.00)	0.0969(1.00)	-0.0110(1.00)
2.0	1.0	135°	-0.0682(7.49)	0.0813(0.69)	0.1382(0.96)	0.0973(1.19)	0.1308(1.35)	0.0049(-0.45)
		45°	0.1753(1.34)	0.4247(1.02)	—	0.1808(0.84)	0.1137(0.79)	—
		63.4°	—	—	0.3637(1.01)	—	—	-0.1085(1.06)
3.0	1.5	90°	0.1313(1.00)	0.4181(1.00)	0.3605(1.00)	0.2146(1.00)	0.1438(1.00)	-0.1023(1.00)
		135°	0.1075(0.82)	0.4065(0.97)	0.3620(1.00)	0.2227(1.04)	0.1599(1.11)	-0.0971(0.95)
		45°	0.2913(1.05)	0.6144(1.01)	0.4610(1.00)	0.2546(0.97)	0.1063(0.91)	-0.1733(1.01)
4.0	2.0	90°	0.2765(1.00)	0.6092(1.00)	0.4632(1.00)	0.2616(1.00)	0.1166(1.00)	-0.1723(1.00)
		135°	0.2700(0.98)	0.6061(1.00)	0.4643(1.00)	0.2636(1.01)	0.1213(1.04)	-0.1706(0.99)
		45°	0.3892(1.00)	0.7363(1.00)	0.5228(1.00)	0.2821(1.00)	0.0819(1.00)	-0.2201(1.00)
$\infty$	$\infty$	90°	0.3902(1.00)	0.7383(1.00)	0.5221(1.00)	0.2830(1.00)	0.0822(1.00)	-0.2209(1.00)
		135°	0.3889(1.00)	0.7381(1.00)	0.5206(1.00)	0.2836(1.00)	0.0834(1.01)	-0.2206(1.00)
		45°	0.7049(1.00)	1.1215(1.00)	0.7049(1.00)	0.3645(1.00)	0.0000(—)	-0.3645(1.00)
$\infty$	$\infty$	90°	0.7049(1.00)	1.1215(1.00)	0.7049(1.00)	0.3645(1.00)	0.0000(—)	-0.3645(1.00)
		135°	0.7049(1.00)	1.1215(1.00)	0.7049(1.00)	0.3645(1.00)	0.0000(—)	-0.3645(1.00)

Table 2 Effect of crack B on the stress intensity factors of crack A

$$F_{IA} = K_{IA}/\sigma_\infty\sqrt{\pi y_A} \operatorname{cosec} \theta_A, F_{IIA} = K_{IIA}/\sigma_\infty\sqrt{\pi y_A} \operatorname{cosec} \theta_A$$

						$y_A=1.0$ $y_B=1.0$ $x_B-x_A=d$		
			$F_{IA} [ ( ) : F_{IA}/F_{IA}  _{\theta_B=90^\circ} ]$			$F_{IIA} [ ( ) : F_{IIA}/F_{IIA}  _{\theta_B=90^\circ} ]$		
$d/y_A$	$d/y_B$	$\theta_A / \theta_B$	45°	90°	135°	45°	90°	135°
0.5	0.5	45°	0.4014(1.07)	—	—	0.3148(0.91)	—	—
		63.4°	—	0.8208(1.00)	—	—	0.1505(0.94)	—
		90°	0.3737(1.00)	0.8172(1.00)	—	0.3450(1.00)	0.1594(1.00)	—
		116.6°	—	—	0.6185(1.00)	—	—	-0.2344(1.00)
1.0	1.0	135°	0.3726(1.00)	0.8229(1.01)	0.6187(1.00)	0.3595(1.04)	0.1626(1.02)	-0.2344(1.00)
		45°	0.4389(1.06)	0.8588(1.01)	—	0.3320(0.92)	0.1177(0.88)	—
		90°	0.4123(1.00)	0.8543(1.00)	0.6201(1.00)	0.3609(1.00)	0.1331(1.00)	-0.2533(1.00)
		135°	0.4088(0.99)	0.8583(1.01)	0.6212(1.00)	0.3702(1.03)	0.1370(1.03)	-0.2538(1.00)
1.5	1.5	45°	0.4685(1.05)	0.8889(1.01)	—	0.3442(0.96)	0.0996(0.89)	—
		63.4°	—	—	0.6253(1.00)	—	—	-0.2695(1.00)
		90°	0.4471(1.00)	0.8838(1.00)	0.6251(1.00)	0.3604(1.00)	0.1123(1.00)	-0.2685(1.00)
		135°	0.4450(1.00)	0.8854(1.00)	0.6262(1.00)	0.3639(1.01)	0.1147(1.02)	-0.2689(1.00)
2.0	2.0	45°	0.4962(1.02)	0.9155(1.01)	0.6309(1.00)	0.3481(0.99)	0.0844(0.93)	-0.2822(1.00)
		90°	0.4855(1.00)	0.9111(1.00)	0.6309(1.00)	0.3531(1.00)	0.0909(1.00)	-0.2812(1.00)
		135°	0.4849(1.00)	0.9118(1.00)	0.6317(1.00)	0.3542(1.00)	0.0918(1.01)	-0.2815(1.00)
		45°	0.5267(1.01)	0.9404(1.00)	0.6369(1.00)	0.3461(1.00)	0.0687(0.97)	-0.2932(1.00)
2.5	2.5	90°	0.5232(1.00)	0.9384(1.00)	0.6369(1.00)	0.3471(1.00)	0.0708(1.00)	-0.2925(1.00)
		135°	0.5233(1.00)	0.9390(1.00)	0.6373(1.00)	0.3474(1.00)	0.0710(1.00)	-0.2927(1.00)
		45°	0.7049(1.00)	1.1215(1.00)	0.7049(1.00)	0.3645(1.00)	0.0000(—)	-0.3645(1.00)
		90°	0.7049(1.00)	1.1215(1.00)	0.7049(1.00)	0.3645(1.00)	0.0000(—)	-0.3645(1.00)
$\infty$	$\infty$	135°	0.7049(1.00)	1.1215(1.00)	0.7049(1.00)	0.3645(1.00)	0.0000(—)	-0.3645(1.00)

部については、石田<sup>(2)</sup>の解析結果があり、 $\theta_A = \theta_B = 45^\circ$ ,  $\theta_A = \theta_B = 90^\circ$ の一部についても西谷・尾田<sup>(3)</sup>の解析結果があるがこれらは、本解析結果とよく一致している。表1は、き裂Aの投影長さがき裂Bの投影長さより小さく  $y_B/y_A = 2.0$  の場合、表2は、き裂Aの投影長さがき裂Bの投影長さと等しく  $y_B/y_A = 1.0$  の場合である。表1, 2の( )の値は、比較のため  $\theta_B = 90^\circ$  の値を1としたときの相対値  $F_{IA}/F_{IA|\theta_B=90^\circ}$  および  $F_{IIA}/F_{IIA|\theta_B=90^\circ}$  を示した(ただし、表2の  $d = 0.5$  において  $\theta_A = 135^\circ$  のとき  $\theta_B = 90^\circ$  では、き裂が重なるため解析結果が得られないので  $\theta_B = 116.4^\circ$  のときの値を基準とした)。

表1, 2よりき裂Aの傾き角  $\theta_A$  が一定のとき、き裂Bの傾き角  $\theta_B$  が  $\theta_B = 45^\circ \sim 135^\circ$  と大きく変化してもき裂Bの先端の座標が一定であれば、き裂A, Bがごく近い場合を除き一般に応力拡大係数  $F_{IA}$ ,  $F_{IIA}$  の変化は小さく、多くの場合で数%程度以内である。このように、き裂Bの傾き角  $\theta_B$  に依存せず、き裂Bの先端の座標のみによって、き裂Aの応力拡大係数  $F_{IA}$ ,  $F_{IIA}$  が決定されるためのき裂先端間の距離  $d$  に関する条件は、表1, 2を比較すれば明らかなようにき裂Bの寸法に依存する。すなわち、き裂Bが小さければ先

端間の距離  $d$  も小さくてよい。一般に  $d/y_B \geq 2$  であれば、ほとんでき裂Bの先端の座標のみによって、き裂Aの応力拡大係数が決まるようである(ほとんどの場合で変化は、1%程度以内である)。また、表1, 2で  $\theta_A = 45^\circ$  と  $\theta_A = 135^\circ$  の場合は、距離  $d \rightarrow \infty$  で両者の応力拡大係数は、同値となるので干渉効果を比較する上で都合がよい。いま、 $d$  が同じ有限値をとる場合を比較すると、 $F_{IA}$  は、つねに  $\theta_A = 135^\circ$  のときが大きく、 $F_{IIA}$  は、つねに  $\theta_A = 45^\circ$  のときが大きく、破壊にモードIの応力拡大係数がより重要であることを考えれば  $\theta_A = 135^\circ$  の場合(つまりき裂Aの自由表面と交わる点がき裂Bに近い場合)のほうが干渉の影響をあまり受けず危険であると言える。

3.2 半無限板の任意個の周期傾斜縁き裂

村上らは半無限板の縁に垂直な周期縁き裂の解が、疲労強度に及ぼす表面粗さの幾何学的パラメータとして利用できることを示している<sup>(9)</sup>。そこで本論文では、これまで解析例の見当たらない周期傾斜縁き裂およびき裂の各種寸法が平均的な値から変化する場合の応力拡大係数への影響を考察する。図3は、各き裂の投影長さ  $a_i$  と傾き角  $\theta_i$  が一定( $a_i = a$ ,  $\theta_i = \theta = 45^\circ$ )である  $N$  個の傾斜縁き裂群を示す。このとき、き裂長さ  $a/d$  を変化させたときの最も外側のき裂A, Cおよび中央の

Table 3  $F_i$  in Fig. 3 ( $\theta = 45^\circ$ )  
 $F_i = K_i/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta$

$F_i$ N		a/d				
		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$F_{IA}$	10	0.6770	0.6094	0.5383	0.4848	0.4503
	11	0.6769	0.6088	0.5376	0.4840	0.4493
	12	0.6767	0.6085	0.5370	0.4833	0.4485
	13	0.6766	0.6082	0.5366	0.4827	0.4478
	$\infty(11-12)$	0.6756	0.6052	0.5304	0.4756	0.4397
$\infty(12-13)$	0.6754	0.6046	0.5305	0.4755	0.4394	
$F_{IB}$	7	0.6612	0.5678	0.4809	0.4197	0.3809
	9	0.6591	0.5628	0.4736	0.4114	0.3717
	11	0.6580	0.5596	0.4691	0.4060	0.3657
	13	0.6571	0.5573	0.4658	0.4022	0.3614
	$\infty(9-11)$	0.6531	0.5452	0.4489	0.3817	0.3387
$\infty(11-13)$	0.6522	0.5447	0.4477	0.3813	0.3378	
$F_{IC}$	10	0.6830	0.6442	0.6147	0.5962	0.5844
	11	0.6829	0.6438	0.6139	0.5953	0.5834
	12	0.6827	0.6434	0.6132	0.5945	0.5825
	13	0.6826	0.6431	0.6127	0.5939	0.5816
	$\infty(11-12)$	0.6805	0.6390	0.6055	0.5857	0.5726
$\infty(12-13)$	0.6814	0.6395	0.6054	0.5854	0.5721	

Table 4  $F_i, F_{II}$  in Fig. 3 ( $\theta = 45^\circ$  and  $\theta = 90^\circ$ )  
 $F_i = K_i/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta$ ,  $F_{II} = K_{II}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta$

a/d	$\theta$	$F_{I \infty}$			$F_{II} = F_{II \infty} / F_{I \infty}$			①+② 2
		A	B	C	A①	B	C②	
0.0	45°	0.7049	0.7049	0.7049	1.000	1.000	1.000	1.000
	90°	1.1215	1.1215	1.1215	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	45°	0.675	0.652	0.681	0.958	0.925	0.966	0.962
	90°	1.079	1.039	1.079	0.962	0.926	0.962	0.962
0.2	45°	0.605	0.545	0.639	0.858	0.773	0.907	0.883
	90°	0.991	0.872	0.991	0.884	0.778	0.884	0.884
0.3	45°	0.530	0.448	0.606	0.752	0.636	0.860	0.806
	90°	0.913	0.727	0.913	0.814	0.648	0.814	0.814
0.4	45°	0.476	0.381	0.586	0.675	0.541	0.831	0.753
	90°	0.856	0.627	0.856	0.763	0.559	0.763	0.763
0.5	45°	0.439	0.338	0.573	0.623	0.480	0.813	0.718
	90°	0.817	0.560	0.817	0.728	0.499	0.728	0.728
a/d	$\theta$	$F_{II \infty}$			$F_{II} = F_{II \infty} / F_{II \infty}$			①+② 2
		A	B	C	A①	B	C②	
0.0	45°	0.3645	0.3645	0.3645	1.000	1.000	1.000	1.000
	90°	0.0000	0.0000	0.0000	—	—	—	—
0.1	45°	0.352	0.338	0.349	0.966	0.927	0.957	0.962
	90°	0.004	0.000	-0.004	—	—	—	—
0.2	45°	0.333	0.288	0.317	0.914	0.790	0.870	0.892
	90°	0.021	0.000	-0.021	—	—	—	—
0.3	45°	0.321	0.250	0.286	0.881	0.686	0.785	0.833
	90°	0.047	0.000	-0.047	—	—	—	—
0.4	45°	0.317	0.227	0.264	0.870	0.623	0.724	0.797
	90°	0.069	0.000	-0.069	—	—	—	—
0.5	45°	0.313	0.210	0.248	0.859	0.576	0.680	0.770
	90°	0.087	0.000	-0.087	—	—	—	—

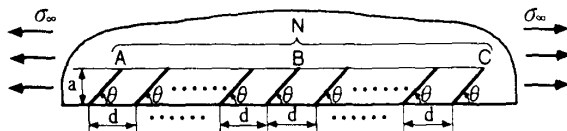


Fig. 3 Periodic inclined edge cracks

き裂Bの応力拡大係数  $F_I$  の値を表3に示す。表3で  $\infty$ (11-12)等は点A, B, Cの応力拡大係数が  $1/N$  にほぼ比例する<sup>(2)(4)</sup> ことを利用して  $N \rightarrow \infty$  の場合を外挿によって求めた値である。 $\infty$ (11-12)と  $\infty$ (12-13)等がほぼ一致することから  $N \rightarrow \infty$  のときの応力拡大係数  $F_{I|N \rightarrow \infty}$  が十分正確に求められているものと考えられる ( $F_{II|N \rightarrow \infty}$  も同様)。

図3の傾き角が  $\theta = 45^\circ, 90^\circ$  の場合において、き裂の間隔  $d$  を変化させたときの、き裂A, B, Cの応力拡大係数  $F_{I|N \rightarrow \infty}$  および  $F_{II|N \rightarrow \infty}$  を表4に示す。傾き角  $\theta = 90^\circ$  のとき、西谷<sup>(1)</sup>、石田<sup>(2)</sup>らの結果と表4の結果は、最大誤差0.4%以内で一致する。表4では比較のため、き裂の個数  $N=1$  のときの結果<sup>(5)</sup>(表6)から、 $F_{I|N=1}$  および  $F_{II|N=1}$  の値を基準としたときの各き裂A, B, Cの応力拡大係数の相対値  $F_{I0}, F_{II0}$  (=

$F_{I|N \rightarrow \infty}/F_{I|N=1}$  および  $F_{II|N \rightarrow \infty}/F_{II|N=1}$ )、ならびに、き裂A, Cの  $F_{I0}, F_{II0}$  の平均値も示した。表4に示すように、き裂Bの  $F_{I0}$  の値は、 $a/d$  が一定であれば傾き角  $\theta$  が  $45^\circ$  から  $90^\circ$  に変化してもほぼ一定である。また、き裂A, Cの  $F_{I0}$  の平均値も  $\theta$  によらずほぼ一定である。よって、表4において、 $a/d$  が一定であれば傾き角  $\theta$  が変化しても、き裂Bの  $F_{I0}, F_{II0}$  の値と、き裂A, Cの  $F_{I0}, F_{II0}$  の平均値は、ほぼ不変であると考えられる。確認のため、表5は、 $a/d=0.5$  の場合を例にとり、傾き角  $\theta$  を  $30^\circ$  から  $90^\circ$  まで変化させて示したものである。表5に示すように、き裂Bの  $F_{I0}, F_{II0}$  の値は、傾き角  $\theta$  によらずほぼ一定であり、周期傾斜き裂群の中央のき裂において、干渉効果に  $\theta$  があまり影響しないことがわかる。表4, 表5の結果を利用すれば、1個の斜め縁き裂の結果(表6)を利用して、図3の周期傾斜縁き裂群の中央のき裂の応力拡大係数を推定可能である。

Table 5  $F_I, F_{II}$  in Fig. 3 ( $a/d=0.5$ )

$$F_I = K_I/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta, F_{II} = K_{II}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta$$

$\theta$	$F_{I N \rightarrow \infty}$			$F_{I0} = F_{I N \rightarrow \infty}/F_{I N=1}$			①+② 2
	A	B	C	A①	B	C②	
30°	0.265	0.213	0.388	0.573	0.461	0.839	0.706
45°	0.439	0.338	0.573	0.623	0.480	0.813	0.718
60°	0.612	0.453	0.722	0.665	0.492	0.785	0.725
75°	0.747	0.533	0.809	0.699	0.499	0.757	0.728
85°	0.802	0.557	0.824	0.719	0.499	0.739	0.729
90°	0.817	0.560	0.817	0.728	0.499	0.728	0.728

$\theta$	$F_{II N \rightarrow \infty}$			$F_{II0} = F_{II N \rightarrow \infty}/F_{II N=1}$			①+② 2
	A	B	C	A①	B	C②	
30°	0.257	0.189	0.265	0.764	0.562	0.788	0.776
45°	0.313	0.210	0.248	0.859	0.576	0.680	0.770
60°	0.295	0.176	0.176	0.965	0.576	0.576	0.770
75°	0.213	0.100	0.054	1.226	0.575	0.311	0.768
85°	0.131	0.034	-0.036	2.180	0.569	-0.599	0.790
90°	0.087	0.000	-0.087	—	—	—	—

Table 6  $F_I, F_{II}$  of single crack<sup>(5)</sup> in Fig. 3 ( $N=1$ )

$$F_I = K_I/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta, F_{II} = K_{II}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta$$

$\theta$	$F_I$	$F_{II}$	$\theta$	$F_I$	$F_{II}$
10°	0.1621	0.1734	50°	0.7817	0.3543
15°	0.2318	0.2261	60°	0.9201	0.3058
20°	0.3054	0.2710	67.5°	1.0048	0.2474
22.5°	0.3436	0.2905	70°	1.0286	0.2243
30°	0.4625	0.3362	75°	1.0686	0.1738
37.5°	0.5845	0.3613	80°	1.0978	0.1186
40°	0.6251	0.3648	85°	1.1155	0.0601
45°	0.7049	0.3645	90°	1.1215	0.0000

3.3 半無限板の任意傾斜き裂群におけるき裂の投影長さ、傾き角、先端間距離の変化の影響

図4は、半無限板中の任意傾斜縁き裂群を示す。図4で、き裂の個数  $N=11$ 、各き裂の投影長さ  $a=1.0$  および、き裂の先端間距離  $d=2.0$  と固定して、き裂の傾き角を変化させる。まず、中央のき裂Bの傾き角  $\theta_6$  を固定したとき、周辺のき裂の傾き角  $\theta_1 \sim \theta_5$  および  $\theta_7 \sim \theta_{11}$  を変化させたときのき裂Bの応力拡大係数への影響を表7(a)に示す。また、左端のき裂Aの傾き角  $\theta_1$  を固定し、 $\theta_2 \sim \theta_{11}$  を変化させたときのき裂Aの応力拡大係数への影響を表7(b)に、右端のき裂Cの傾き角

Table 7 Effect of other cracks on the stress intensity factors in question

$$F_I = K_I/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta, F_{II} = K_{II}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a} \operatorname{cosec} \theta$$

(a)  $\theta_6$  is fixed (b)  $\theta_1$  is fixed

$\theta_6$	$\theta_1 \sim \theta_5$ $\theta_7 \sim \theta_{11}$	$F_{IB}$	$F_{IIB}$	$\theta_1$	$\theta_2 \sim \theta_{11}$	$F_{IA}$	$F_{IIA}$
45°	45°	0.3657	0.2270	45°	45°	0.4493	0.3190
	90°	0.3593	0.2301		90°	0.4421	0.3227
60°	60°	0.4900	0.1904	(c) $\theta_{11}$ is fixed			
	90°	0.4860	0.1930	$\theta_{11}$	$\theta_1 \sim \theta_{10}$	$F_{IC}$	$F_{IIC}$
75°	75°	0.5757	0.1079	45°	45°	0.5834	0.2538
	90°	0.5746	0.1097		90°	0.5829	0.2539

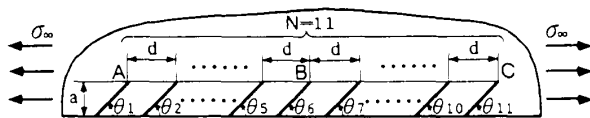


Fig. 4 Multiple edge cracks ( $a=1.0, d=2.0$ )

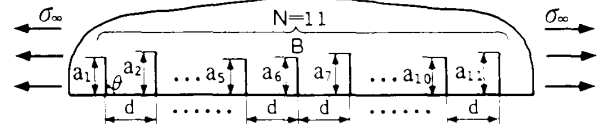


Fig. 5 Multiple edge cracks ( $\theta=90^\circ, d=2.0$ )

Table 8 Effect of crack length  $a_i$  on  $F_I, F_{II}$  in Fig. 5 ( $\theta = 90^\circ, d = 2.0$ )

$$F_{IB} = K_{IB}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a_i}, F_{IIB} = K_{IIB}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a_i}$$

(a)  $a_i$  ( $i \neq 6$ ) is fixed

$a_1 \sim a_5$ $a_7 \sim a_{11}$	$a_6$	$F_{IB}$	$F_{IIB}$
1.0	0.80	0.5100	0.0000
	0.90	0.5586	0.0000
	0.95	0.5826	0.0000
	1.00	0.6063	0.0000
	1.05	0.6294	0.0000
	1.10	0.6523	0.0000
	1.20	0.6959	0.0000

(b)  $\bar{a} = \sum_{i=1}^{11} a_i / 11 = 1.0$

$a_1, a_5, a_9$	$a_2, a_4, a_6$ $a_8, a_{10}$	$a_3, a_7, a_{11}$	$F_{IB}$	$F_{IIB}$
1.00	1.00	1.00	0.6063	0.0000
1.05		0.95	0.6050	-0.0095
1.10		0.90	0.6013	-0.0189
1.10		0.80	0.5862	-0.0369
1.20		0.80	0.5862	-0.0369

$\theta_{11}$  を固定し、 $\theta_1 \sim \theta_{10}$  を変化させた場合を表7(c)に示す。表7(a)~(c)より、縁き裂群の先端の位置が固定されていれば、周辺のき裂の傾き角  $\theta$  の変化が及ぼす、注目するき裂の応力拡大係数への影響は小さいことがわかる。また、これらは、3・1節の議論とも一致する。そこで以下では、 $\theta_i = 90^\circ$  と固定してき裂先端の座標を変化させた場合の影響を調べる。

図5は、任意傾斜縁き裂群において、き裂の個数  $N = 11$ 、き裂の先端間距離  $d = 2.0$  および傾き角  $\theta_i = 90^\circ$  に固定した図である。まず、中央のき裂B以外のき裂の長さを  $a_i = 1.0$  に固定し、き裂Bの長さ  $a_6$  を変化させたときの、き裂Bの応力拡大係数の値を表8(a)に示す。表8(a)では、き裂長さ  $\pm 10\%$  の変化に対して  $F_I$  の値も  $10\%$  程度変化することがわかる。次に、表8(b)は、図5において平均き裂長さ  $\bar{a} = 1.0$  と固定し、各き裂長さを変化させた場合のき裂Bの  $F_I, F_{II}$  への影響を調べたものである。表8(b)より、平均き裂長さが一定であれば、き裂Bの  $F_I, F_{II}$  への影響は小さいことがわかる。

図6は、任意傾斜縁き裂群で、き裂の個数  $N = 11$ 、各き裂の長さ  $a = 1.0$  および傾き角  $\theta = 90^\circ$  に固定した図である。表9は、図6においてき裂間距離  $d_i$  が一定の場合に対し、き裂間距離の平均値  $d = 2.0$  と固定して、各き裂間距離を  $10\%$  程度変化させたときの中央のき裂Bの  $F_I, F_{II}$  への影響を調べたものである。case 1 はき裂群が等間隔の場合、case 2 は中央のき裂のみが左に1割ずれた場合、case 3 はき裂間距離  $d_1 \sim d_5$  がき裂間距離  $d_6 \sim d_{10}$  に対して2割ほど小さい場合、

Table 9 Effect of crack distance  $d_i$  on  $F_I, F_{II}$  in Fig. 6

$$(a = 1.0, \theta = 90^\circ) \quad d = \sum_{i=1}^{10} d_i / 10 = 2.0$$

$$F_{IB} = K_{IB}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a}, F_{IIB} = K_{IIB}/\sigma_\infty \sqrt{\pi a}$$

	d	$F_{IB}$	$F_{IIB}$
case1	$d_1 \sim d_{10} = 2.0$	0.6063	0.0000
case2	$d_1 \sim d_4 = 2.0, d_5 = 1.8$ $d_7 \sim d_{10} = 2.0, d_6 = 2.2$	0.6061	-0.0140
case3	$d_1 \sim d_5 = 1.8$ $d_6 \sim d_{10} = 2.2$	0.6060	-0.0139
case4	$d_1, d_3, d_5, d_7, d_9 = 2.2$ $d_2, d_4, d_6, d_8, d_{10} = 1.8$	0.6064	0.0141

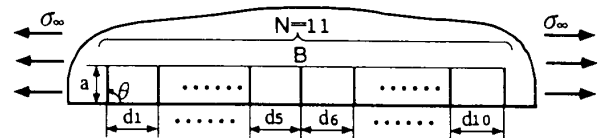


Fig. 6 Multiple edge cracks ( $a = 1.0, \theta = 90^\circ$ )

case 4 はき裂間距離の長短が交互に生じる場合である。いずれもこの程度の変化であれば、中央のき裂Bの応力拡大係数の変化は小さいことがわかる。

#### 4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を精度よく解析する方法を用いて、半無限板中の任意個の斜め縁き裂の干渉効果を解析した。また、解析結果からき裂の投影長さ、傾き角およびき裂間隔が及ぼす応力拡大係数への影響を調べた。得られた結果を表にしてまとめたほか、以下のようなことが明らかとなった。

(1) 2個の斜め縁き裂の干渉問題(図2)において、き裂Aに注目する場合、き裂Bが存在することによるき裂Aの応力拡大係数  $F_{IA}, F_{IIA}$  への影響は、主としてき裂Bの先端の座標のみによって決まる。特に  $(x_B - x_A)/y_B \geq 2$  であればき裂Bの傾き角が広範囲に変化しても  $F_{IA}, F_{IIA}$  の変化は最大でも数%以内であり、多くの場合で1%以下であった(表1, 2)。

(2) き裂の投影長さ、傾き角とき裂間隔の等しい周期傾斜縁き裂問題(図3)の干渉効果(き裂が単独に存在する場合との応力拡大係数の比)は、き裂群の傾斜角によらず、ほぼき裂の投影長さとき裂の間隔の比のみによって決まる(表4, 5)。

(3) 多数個の縁き裂(図4)においても、2個の場合と同様、き裂先端間の距離  $d$  と、き裂の投影長さ  $a$  の関係が  $d/a \geq 2$  であれば、周辺のき裂の傾き角の変化が及ぼす、注目するき裂の応力拡大係数への影響は、小さいことがわかった(表7)。また、き裂長さ、き裂間距離が平均的な値から変化する場合の応力拡大係数へ

の影響を調べた(表8, 9)。

研究テーマを与えていただいた九州大学村上敬宜先生に深くお礼申し上げます。

### 文 献

- (1) Nisitani, H. (Sih, G. C. and Chow, C. L.編), Interference Effect Among Cracks or Notches in Two Dimensional Problem, *Proc. Int. Conf. on Fracture Mechanics and Technology*, (1977), 1127-1142.
- (2) 石田誠, 半無限板におけるき裂群, 分岐き裂および鋭い切欠きからのき裂の解析, *機論*, **45**, 392, A(1979), 306-317.
- (3) 西谷弘信・尾田安司, 半無限板におけるき裂と切欠き(き裂)の干渉効果, *機論*, **46**, 407, A(1980), 745-755.
- (4) Isida, M. and Igawa, H., Some asymptotic behavior and formulae of stress intensity factors for collinear and parallel cracks under various loadings, *Int. J. Fract.*, **65**(1994), 247-259.
- (5) 野田高昭・小田和広・陳玳珩, 超越特異積分方程式法による混同モードき裂の解析, *機論*, **56**, 532, A(1990), 2405-2410.
- (6) 野田高昭・小田和広・増田親泰, 超越特異積分方程式法による屈折き裂・分岐き裂の解析, *機論*, **57**, 542, A(1991), 2332-2337.
- (7) 野田高昭・三好伸介, 特異積分方程式法による半円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, *機論*, **61**, 586, A(1995), 1232-1240.
- (8) 西谷弘信・陳玳珩, 体積法, (1987), 9, 培風館.
- (9) 村上敬宜・堤一也・藤島正博, 疲労強度におよぼす表面粗さの影響の定量的評価, *機論*, **62**, 597, A(1996), 1124-1131.