

# 任意分布だ円形介在物の干渉効果の解析法†

野田 尚昭\* 松尾 忠利\*\* 福田 賢新\*\*\*

## Analysis of Interaction among Arbitrarily Distributed Elliptical Inclusions

by

Nao-Aki NODA\*, Tadatoshi MATSUO\*\* and Yoshichika FUKUDA\*\*\*

This paper deals with the numerical solutions of singular integral equations of the body force method in an interaction problem of arbitrarily distributed elliptical inclusions under general loading conditions. The problem is formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where the densities of body forces distributed in the  $x$ - and  $y$ -directions of infinite plates having the same elastic constants as those of the matrix and the inclusions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the inclusions, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are used. Then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The calculations are carried out for several arrangement of the inclusions, and it is found that the present method yields rapidly converging numerical results for arbitrarily distributed elliptical inclusions. The numerical results of weight functions and stress distributions along the boundaries are shown in figures to demonstrate the present solution.

**Key words :** Stress concentration, Inclusion, Interaction, Body force method, Numerical analysis, Singular integral equation

### 1 緒 言

介在物の応力集中に関する研究はこれまでもいくつが行われているが<sup>1)-4)</sup>、介在物の個数が複数個の場合の研究は少なく、特にだ円形介在物が任意に分布する場合の解析は見当たらないようである。介在物の個数が複数個の場合には、その干渉効果により最大応力の発生位置と大きさは、介在物の形状、位置および母材と介在物の弾性比により微妙に変化する。そのため、正確な解析には母材と介在物の境界上のなめらかな応力分布を求める必要がある。

著者らはこれまでに、体積力法の特異積分方程式を厳密に解析する方法を用いて、対称性または逆対称のある引張応力場およびせん断応力場における2だ円形介在物の干渉問題の解析を行った<sup>5)-8)</sup>。本研究では、より一般的な問題である任意に分布するだ円形介在物の干渉問題の数値解析法を考察する。そして介在物の形状、介在物間の距離を変化させたときの、母材と介在物の境界に沿った応力分布を図に示し、解析法の有効性を検証する。

### 2 解析方法

本解析法を Fig. 1 に示すような、無限板中の  $m$  個だ円形介在物 ( $x_i = a_i \cos \theta_i$ ,  $y_i = b_i \sin \theta_i$ ,  $i = 1 \sim m$ ) の干渉問題を例にとって説明する。ここで、無限板は  $x$  方向に  $\sigma_x^\infty$ ,  $y$  方向に  $\sigma_y^\infty$  を受けるものとする。この問題は重ね合せの原理に基づく体積力法の考え方により、無限板中の1点 ( $\xi_k, \eta_k$ ) ( $k = 1 \sim m$ ) に集中力が作用するときの

任意の点 ( $x_i, y_i$ ) ( $i = 1 \sim m$ ) の応力場と変位場の解を用いて解くことができる。ここで、 $x_i, y_i$  は  $i$  番目のだ円形介在物の表わす座標 (Fig. 1) である。また  $\phi_k$  は着目点を表わす角度 ( $\xi_k = a_k \cos \phi_k$ ,  $\eta_k = b_k \sin \phi_k$ ) で注目点を表わす角度  $\theta_i$  ( $x_i = a_i \cos \theta_i$ ,  $y_i = b_i \sin \theta_i$ ) と区別して用いる。このとき問題は母材 ( $E_M, \nu_M$ ) および介在物 ( $E_i, \nu_i$ ) と同じ弾性定数をもつ無限板 (無限板  $M$  と無限板  $I$ ) 中の仮想境界上に分布させた  $x_k, y_k$  方向の体積力密度  $\rho_{xM}^{k*}, \rho_{yM}^{k*}$  および  $\rho_{xI}^{k*}, \rho_{yI}^{k*}$  を未知関数とする特異積分方程式(1), (2)で表現される [これらは境界に沿った長さ当りの密度である (式(3))].

無限板  $M$  のだ円孔となる仮想境界に生じる応力と変位を  $\sigma_{nM}, \tau_{ntM}, U_M, V_M$  とし、無限板  $I$  のだ円形介在物となる仮想境界に生じる応力と変位を  $\sigma_{nI}, \tau_{ntI}, U_I, V_I$  とすると、式(1), (2)は母材と介在物の接合境界面上における境界条件  $\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0, \tau_{ntM} - \tau_{ntI} = 0, U_M - U_I = 0, V_M - V_I = 0$  に相当している。

$$\begin{aligned} & -(1/2) \{ \rho_{xM}^{i*}(\theta_i) \cos \theta_{i0} + \rho_{yM}^{i*}(\theta_i) \sin \theta_{i0} \} \\ & + (1/2) \{ \rho_{xI}^{i*}(\theta_i) \cos \theta_{i0} + \rho_{yI}^{i*}(\theta_i) \sin \theta_{i0} \} \\ & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^{k*}(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^{k*}(\phi_k) ds \\ & - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^{k*}(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^{k*}(\phi_k) ds \\ & = -\sigma_{nM}^\infty + \sigma_{nI}^\infty \\ & [ = -(\sigma_{xM}^\infty \cos^2 \theta_{i0} + \sigma_{yM}^\infty \sin^2 \theta_{i0}) + (\sigma_{xI}^\infty \cos^2 \theta_{i0} + \sigma_{yI}^\infty \sin^2 \theta_{i0}) ] \end{aligned} \quad (1-a)$$

† 原稿受理 平成8年2月26日 Received Feb. 26, 1996

\* 正会員 九州工業大学工学部設計生産工学科 〒804 北九州市戸畑区仙水町, Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804

\*\* 福島工業高等専門学校機械工学科 〒970 いわき市平上荒川字長尾, Fukushima National College of Tech., Tairakamiarakuwa, Iwaki, 970

\*\*\* 九州工業大学工学部設計生産工学科 〒804 北九州市戸畑区仙水町, Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804

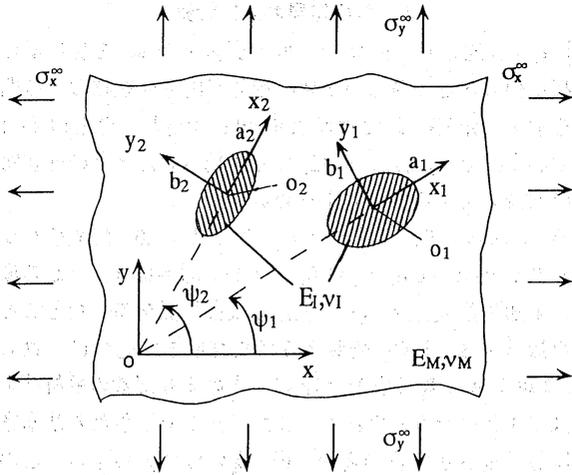


Fig. 1. Arbitrarily distributed elliptical inclusions.

$$\begin{aligned}
 & - (1/2) \{ -\rho_{xM}^{i*}(\theta_i) \sin \theta_{i0} + \rho_{yM}^{i*}(\theta_i) \cos \theta_{i0} \} \\
 & + (1/2) \{ -\rho_{xI}^{i*}(\theta_i) \sin \theta_{i0} + \rho_{yI}^{i*}(\theta_i) \cos \theta_{i0} \} \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^{k*}(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^{k*}(\phi_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^{k*}(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^{k*}(\phi_k) ds \\
 & = -\tau_{nM}^{\infty} + \tau_{nI}^{\infty} \\
 & [ = -(\sigma_{yM}^{\infty} - \sigma_{xM}^{\infty}) \sin \theta'_{i0} \cos \theta'_{i0} + (\sigma_{yI}^{\infty} - \sigma_{xI}^{\infty}) \sin \theta'_{i0} \cos \theta'_{i0} ] \quad (1-b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^{k*}(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{uM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^{k*}(\phi_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^{k*}(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{uI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^{k*}(\phi_k) ds \\
 & = -U_M^{\infty} + U_I^{\infty} \quad (2-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xM}^{k*}(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{vM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yM}^{k*}(\phi_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_{xI}^{k*}(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{vI}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_{yI}^{k*}(\phi_k) ds \\
 & = -V_M^{\infty} + V_I^{\infty} \quad (2-b)
 \end{aligned}$$

式(1)で、 $\theta'_{i0} = \theta_{i0} + \phi_i$  で、 $\theta_{i0}$  は  $i$  番目の介在物境界上の点  $(x_i, y_i)$  におけるだ円の外向き法線と  $x_i$  軸のなす角度、 $\phi_i$  は  $x_1$  軸と  $x$  軸のなす角度である。また、式(1)、(2)に含まれる被積分関数のうち、 $K_{nM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i)$  を例にとると、これは、孔のない無限板  $M$  の  $k$  番目のだ円となる仮想境界上の一点に  $x_k$  方向の単位大きさ集中力が作用するときの  $i$  番目のだ円となる境界上の点に生じる法線方向の応力  $\sigma_n$  を意味する。また、式(1)、(2)の右辺は遠方荷重によって無限板  $M$  および  $I$  の仮想境界上に生じる応力および変位である。式(1)はコーシー形、式(2)は対数形の特異性を有する項を含んでいる。

特異積分方程式(1)、(2)の未知関数  $\rho_{xM}^{k*} \sim \rho_{yI}^{k*}$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 \rho_{xM}^{k*} &= \frac{dF_{xM}^{k*}}{ds}, \quad \rho_{yM}^{k*} = \frac{dF_{yM}^{k*}}{ds} \\
 \rho_{xI}^{k*} &= \frac{dF_{xI}^{k*}}{ds}, \quad \rho_{yI}^{k*} = \frac{dF_{yI}^{k*}}{ds} \quad (3)
 \end{aligned}$$

ここで  $dF_{xM}^{k*}$  を例にとると、これは微小長さ  $ds$

$= \sqrt{(dx_k)^2 + (dy_k)^2}$  に作用する体積力の合力の  $x_k$  方向成分である。

式(1)、(2)の特異積分方程式を厳密に解析するために本解析では、未知関数である体積力密度を基本密度関数と重み関数の一次結合で表現する。

$x$  方向の体積力の基本密度関数  $w_x(\phi_k)$  および  $y$  方向の体積力の基本密度関数  $w_y(\phi_k)$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 w_{x1}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) / \cos \phi_k \\
 w_{x2}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \tan \phi_k \\
 w_{x3}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \\
 w_{x4}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \sin \phi_k \quad (4-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{y1}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) / \sin \phi_k \\
 w_{y2}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \\
 w_{y3}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cot \phi_k \\
 w_{y4}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cos \phi_k \quad (4-b)
 \end{aligned}$$

ここで、 $n_x, n_y$  は、仮想境界上の点  $(x_k, y_k)$  における単位外向き法線ベクトルの  $(x_k, y_k)$  座標成分  $(\cos \theta_{k0}, \sin \theta_{k0})$  であり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 n_x(\phi_k) &= \frac{b_k \cos \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} = \cos \theta_{k0} \\
 n_y(\phi_k) &= \frac{a_k \sin \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} = \sin \theta_{k0} \quad (5)
 \end{aligned}$$

式(4)で定義される基本密度関数の組み合わせによって、 $\rho_{xM}^{k*}(\phi_k), \rho_{yI}^{k*}(\phi_k)$  を次のように表現する。

$$\begin{aligned}
 \rho_{xM}^{k*}(\phi_k) &= (\rho_{x1M}^k(\phi_k) w_{x1}(\phi_k) + \rho_{x2M}^k(\phi_k) w_{x2}(\phi_k) \\
 & + \rho_{x3M}^k(\phi_k) w_{x3}(\phi_k) + \rho_{x4M}^k(\phi_k) w_{x4}(\phi_k)) \\
 \rho_{yM}^{k*}(\phi_k) &= (\rho_{y1M}^k(\phi_k) w_{y1}(\phi_k) + \rho_{y2M}^k(\phi_k) w_{y2}(\phi_k) \\
 & + \rho_{y3M}^k(\phi_k) w_{y3}(\phi_k) + \rho_{y4M}^k(\phi_k) w_{y4}(\phi_k)) \quad (6-a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{xI}^{k*}(\phi_k) &= (\rho_{x1I}^k(\phi_k) w_{x1}(\phi_k) + \rho_{x2I}^k(\phi_k) w_{x2}(\phi_k) \\
 & + \rho_{x3I}^k(\phi_k) w_{x3}(\phi_k) + \rho_{x4I}^k(\phi_k) w_{x4}(\phi_k)) \\
 \rho_{yI}^{k*}(\phi_k) &= (\rho_{y1I}^k(\phi_k) w_{y1}(\phi_k) + \rho_{y2I}^k(\phi_k) w_{y2}(\phi_k) \\
 & + \rho_{y3I}^k(\phi_k) w_{y3}(\phi_k) + \rho_{y4I}^k(\phi_k) w_{y4}(\phi_k)) \quad (6-b)
 \end{aligned}$$

$\rho_{x1M}^k(\phi) \sim \rho_{y4I}^k(\phi)$  は重み関数と呼ばれる。式(6)の表現を用いると式(1)、(2)の特異積分方程式は次式のように表現できる。

$$\begin{aligned}
 & - (1/2) [ \{ \rho_{x1M}^i(\theta_i) / \cos \theta_i + \rho_{x2M}^i(\theta_i) \tan \theta_i + \rho_{x3M}^i(\theta_i) \\
 & + \rho_{x4M}^i(\theta_i) \sin \theta_i \} \cos^2 \theta_{i0} \\
 & + \{ \rho_{y1M}^i(\theta_i) / \sin \theta_i + \rho_{y2M}^i(\theta_i) + \rho_{y3M}^i(\theta_i) \cot \theta_i \\
 & + \rho_{y4M}^i(\theta_i) \cos \theta_i \} \sin^2 \theta_{i0} ] \\
 & + (1/2) [ \{ \rho_{x1I}^i(\theta_i) / \cos \theta_i + \rho_{x2I}^i(\theta_i) \tan \theta_i + \rho_{x3I}^i(\theta_i) \\
 & + \rho_{x4I}^i(\theta_i) \sin \theta_i \} \cos^2 \theta_{i0} \\
 & + \{ \rho_{y1I}^i(\theta_i) / \sin \theta_i + \rho_{y2I}^i(\theta_i) + \rho_{y3I}^i(\theta_i) \cot \theta_i \\
 & + \rho_{y4I}^i(\theta_i) \cos \theta_i \} \sin^2 \theta_{i0} ] \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} [ K_{nM}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \{ \rho_{x1M}^k(\phi_k) / \cos \phi_k \\
 & + \rho_{x2M}^k(\phi_k) \tan \phi_k + \rho_{x3M}^k(\phi_k) \\
 & + \rho_{x4M}^k(\phi_k) \sin \phi_k \} b_k \cos \phi_k ] d\phi_k \\
 & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} [ K_{nM}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \{ \rho_{y1M}^k(\phi_k) / \sin \phi_k \\
 & + \rho_{y2M}^k(\phi_k) + \rho_{y3M}^k(\phi_k) \cot \phi_k \\
 & + \rho_{y4M}^k(\phi_k) \cos \phi_k \} a_k \sin \phi_k ] d\phi_k
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} [K_{nmi}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) |\rho_{x1i}^k(\phi_k) / \cos \phi_k \\
 & \quad + \rho_{x2i}^k(\phi_k) \tan \phi_k + \rho_{x3i}^k(\phi_k) \\
 & \quad + \rho_{x4i}^k(\phi_k) \sin \phi_k] b_k \cos \phi_k d\phi_k \\
 & - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} [K_{nmi}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) |\rho_{y1i}^k(\phi_k) / \sin \phi_k \\
 & \quad + \rho_{y2i}^k(\phi_k) + \rho_{y3i}^k(\phi_k) \cot \phi_k \\
 & \quad + \rho_{y4i}^k(\phi_k) \cos \phi_k] a_k \sin \phi_k d\phi_k \\
 & = -\sigma_{nm}^{\infty} + \sigma_{ni} \quad (i=1 \sim m) \quad (7)
 \end{aligned}$$

紙面の都合で省略するが、式(1)、(2)の残りの3式も式(7)と同様に表現できる。さらに、重み関数を連続関数として近似するために多項式を用いる。ここでは次のような表現を用いる。

$$\begin{aligned}
 \rho_{x1M}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^{M/4} a_{nM}^k t_n(\phi), \quad \rho_{x2M}^k(\phi) = \sum_{n=1}^{M/4} b_{nM}^k t_n(\phi), \\
 \rho_{x3M}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^{M/4} c_{nM}^k t_n(\phi), \quad \rho_{x4M}^k(\phi) = \sum_{n=1}^{M/4} d_{nM}^k t_n(\phi), \\
 \rho_{y1M}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^{M/4} e_{nM}^k t_n(\phi), \quad \rho_{y2M}^k(\phi) = \sum_{n=1}^{M/4} f_{nM}^k t_n(\phi), \\
 \rho_{y3M}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^{M/4} g_{nM}^k t_n(\phi), \quad \rho_{y4M}^k(\phi) = \sum_{n=1}^{M/4} h_{nM}^k t_n(\phi) \\
 (k=1 \sim m) & \quad (8)
 \end{aligned}$$

( $\rho_{x1i}^k(\phi) \sim \rho_{y4i}^k(\phi)$ も同様な形式で表現する。)

$$t_n(\phi) = \cos[2(n-1)\phi] \quad (9)$$

ここで、 $M$ は  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  の範囲の選点数である。式(8)、(9)で表わされる重み関数  $\rho_{x1M}^k(\phi)$  等は次のような周期性と対称性を有する。

$$\left. \begin{aligned}
 \rho(\phi + \pi) &= \rho(\phi) && \text{(周期性)} \\
 \rho(\phi) &= \rho(-\phi) \\
 \rho\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) &= \rho\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) && \text{(対称性)}
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

すなわち式(10)のような性質があるため、重み関数  $\rho_{x1M}^k(\phi) \sim \rho_{y4M}^k(\phi)$  は  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  で定義され  $\phi=0, \pi/2$  に対称な関数とみなすことができる。つまり、式(6)の表現によって未知関数の数は4倍になるが、各未知関数の定義域は1/4になる。

以上の離散化の方法により、式(7)は係数  $a_{nM}^k, b_{nM}^k, \dots, h_{nM}^k, a_{ni}^k, b_{ni}^k, \dots, h_{ni}^k (k=1 \sim m)$  についての  $4Mm$  元の連立方程式 [式(11)] に還元できる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{M/4} (a_{nM}^k A_{nM} + b_{nM}^k B_{nM} + c_{nM}^k C_{nM} + d_{nM}^k D_{nM} + e_{nM}^k E_{nM} \\
 & + f_{nM}^k F_{nM} + g_{nM}^k G_{nM} + h_{nM}^k H_{nM} + a_{ni}^k A_{ni} + b_{ni}^k B_{ni} \\
 & + c_{ni}^k C_{ni} + d_{ni}^k D_{ni} + e_{ni}^k E_{ni} + f_{ni}^k F_{ni} + g_{ni}^k G_{ni} + h_{ni}^k H_{ni}) \\
 & = -\sigma_{nm}^{\infty} + \sigma_{ni} \quad (11)
 \end{aligned}$$

(以下の3式省略)

したがって、問題を解くことは係数  $a_{nM}^k \sim h_{ni}^k (k=1 \sim m)$  を求めることに帰着される。 $m$ 個の円境界上で適当に選んだ  $M$ 個の点で境界条件を満足するように式(11)の連立方程式を解けば、任意の点の応力は係数と  $A_{nM}$  等の影響係数の一次結合で表現される。以上の解析方法により、一般的な荷重条件下での円形介在物の干渉効果を介在物の位置、寸法を変化させて調べる。

### 3 解析結果および考察

Fig. 2は遠方で一様な  $y$  方向の引張応力  $\sigma_y^{\infty}$  を受ける無限板中の大きさの等しい2個の剛体円形介在物の干渉問題を示す。介在物  $i=2$  は原点  $(0, 0)$  に固定し、介在物  $i=1$  の中心座標を  $(1, 2), (2, 2), (2, 1)$  と変化させたときの介在物  $i=1$  のまわりの応力分布を求める。

Fig. 2において、形状パラメータ  $a/b=1.0$ 、配置のパラメータが  $a/x_1=0.8, x_1=1.0, y_1=2.0, \sigma_x^{\infty}=0, \sigma_y^{\infty}=1.0$  の場合、未知関数  $\rho_{x1M}, \rho_{x2M}, \dots, \rho_{y4M}$  の収束状況を調べたところ、選点数  $M=8, 12$  で有効数字5けた程度まで完全に一致した。Fig. 3, 4は選点数  $M=12$  のときの未知関数の解析結果を図にまとめたものである。また、式(4)で示される基本密度関数は境界が円形の場合、Fig. 5の様に表わせる。この結果、体積力密度が式(6)で示されるように基本密度関数と重み関数の一次結合で表わされることから、連続関数である密度分布をうまく近似できていると考えられる。さらに、

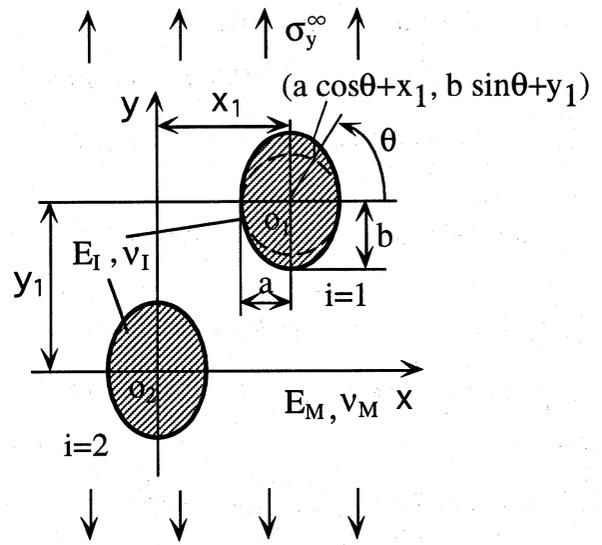


Fig. 2. Two equal elliptical inclusions ( $\sigma_y^{\infty}=1, \sigma_x^{\infty}=0, E_1/E_M=10^5, \nu_1=\nu_M=0.3$ ).

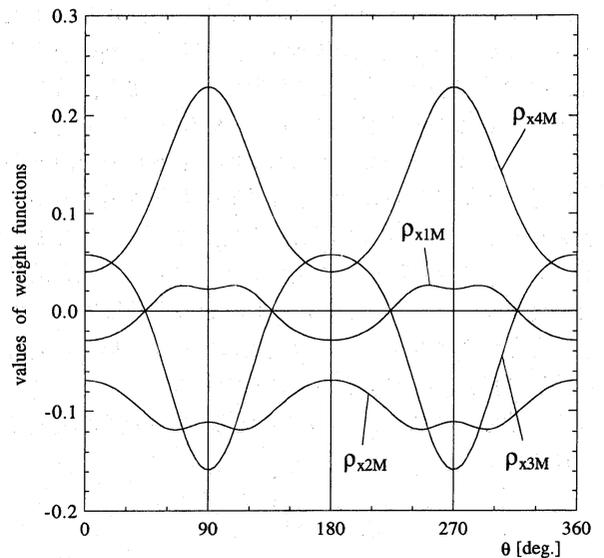


Fig. 3. Unknown functions of present analysis  $\rho_{x1M}, \rho_{x2M}, \rho_{x3M}, \rho_{x4M}$  when  $2b/y_1=0.8, x_1=1.0, \sigma_x^{\infty}=0, \sigma_y^{\infty}=1, E_1/E_M=10^5, \nu_1=\nu_M=0.3, a/b=1.0$ .

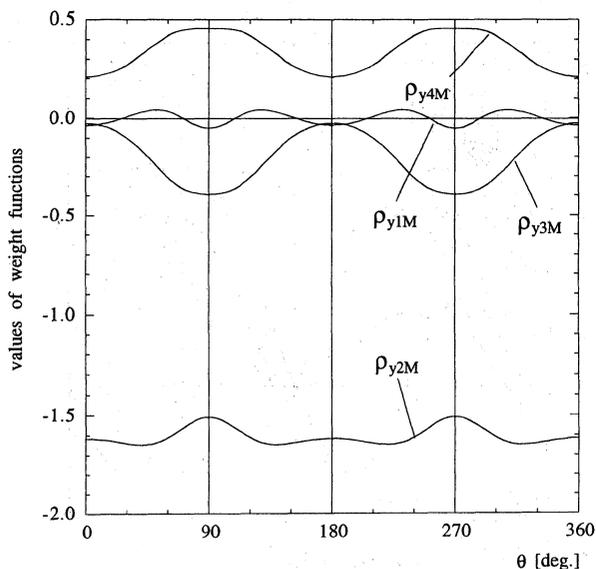


Fig. 4. Unknown functions of present analysis  $\rho_{y1M}, \rho_{y2M}, \rho_{y3M}, \rho_{y4M}$  when  $2b/y_1=0.8, x_1=1.0, \sigma_x^\infty=0, \sigma_y^\infty=1, E_1/E_M=10^5, \nu_1=\nu_M=0.3, a/b=1.0$ .

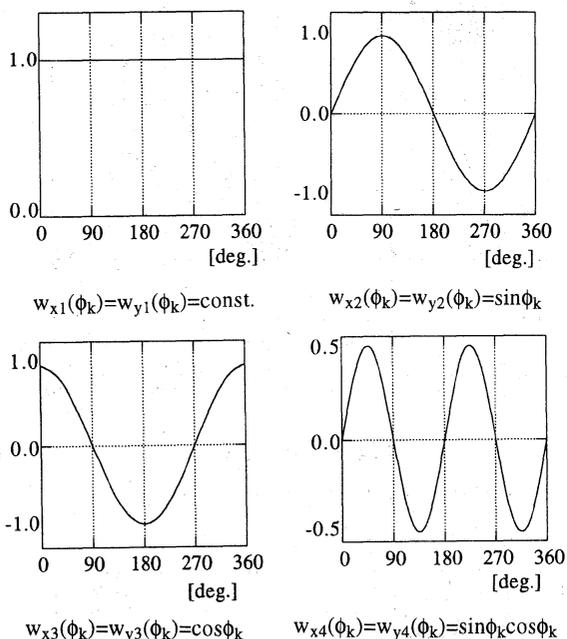


Fig. 5. Fundamental density functions for circular boundary.

このときの境界条件の満足度を確かめるために、それらの値を Table I に示す。境界上で 0 であるべきこれらの値は選点数  $M=12$  程度で  $10^{-5}$  程度であり高い境界条件の満足度が確かめられた（このとき求められた境界上の応力分布を Fig. 7(a) に示す）。

$a/b=1.0$  で  $2b/y_1=0.5$  の場合の応力分布を Fig. 6(a), (b) に、 $a/b=1.0$  で  $2b/y_1=0.8$  の場合を Fig. 7(a), (b) に示す。(a), (b) はそれぞれ介在物  $i=1$  の中心座標が (1, 2), (2, 2) に対応する。介在物  $i=1$  の中心座標が (0, 2) の場合は前報<sup>(5),(6),(8)</sup>で解析した問題と同じになる。解析結果を比較した結果、有効数字 6 桁目程度の数値解析上の誤差をのぞき両

Table I. Compliance of the boundary conditions ( $a=b=0.8, x_1=1.0, y_1=2.0, \sigma_y^\infty=1.0, \sigma_x^\infty=0, E_1/E_M=10^5, \nu_1=\nu_M=0.3$ ).

$\theta$ (deg.)	M	$\sigma_{nM}-\sigma_{n1}$	$\tau_{nM}-\tau_{n1}$	$U_M-U_1$	$V_M-V_1$
40	8	$2.2 \times 10^{-3}$	$-1.5 \times 10^{-3}$	$-1.1 \times 10^{-11}$	$5.0 \times 10^{-11}$
	12	$-4.6 \times 10^{-6}$	$-5.0 \times 10^{-6}$	$8.7 \times 10^{-11}$	$8.6 \times 10^{-11}$
	16	$1.0 \times 10^{-7}$	$9.1 \times 10^{-8}$	$-3.7 \times 10^{-10}$	$-7.3 \times 10^{-11}$
80	8	$-4.1 \times 10^{-2}$	$-1.3 \times 10^{-2}$	$-1.5 \times 10^{-9}$	$-9.2 \times 10^{-10}$
	12	$1.9 \times 10^{-5}$	$5.2 \times 10^{-6}$	$-1.6 \times 10^{-10}$	$1.0 \times 10^{-10}$
	16	$4.1 \times 10^{-8}$	$-2.5 \times 10^{-8}$	$-2.7 \times 10^{-11}$	$1.7 \times 10^{-10}$
120	8	$-4.9 \times 10^{-2}$	$1.7 \times 10^{-2}$	$-1.3 \times 10^{-9}$	$-9.9 \times 10^{-10}$
	12	$-8.5 \times 10^{-5}$	$5.5 \times 10^{-5}$	$1.1 \times 10^{-11}$	$2.6 \times 10^{-10}$
	16	$1.9 \times 10^{-9}$	$7.7 \times 10^{-8}$	$-3.1 \times 10^{-10}$	$-2.8 \times 10^{-10}$
160	8	$6.1 \times 10^{-2}$	$-1.3 \times 10^{-1}$	$2.1 \times 10^{-9}$	$2.1 \times 10^{-9}$
	12	$1.4 \times 10^{-5}$	$-8.9 \times 10^{-5}$	$2.0 \times 10^{-10}$	$3.1 \times 10^{-11}$
	16	$-1.6 \times 10^{-8}$	$-3.9 \times 10^{-8}$	$-3.1 \times 10^{-10}$	$-3.8 \times 10^{-10}$
200	8	$-1.1 \times 10^{-1}$	$-2.2 \times 10^{-1}$	$1.9 \times 10^{-9}$	$1.9 \times 10^{-9}$
	12	$-9.7 \times 10^{-5}$	$-9.7 \times 10^{-5}$	$9.7 \times 10^{-11}$	$1.2 \times 10^{-10}$
	16	$-6.7 \times 10^{-8}$	$4.6 \times 10^{-8}$	$-1.8 \times 10^{-11}$	$-1.1 \times 10^{-10}$
240	8	$1.9 \times 10^{-1}$	$-1.4 \times 10^{-2}$	$8.8 \times 10^{-10}$	$-1.6 \times 10^{-9}$
	12	$2.2 \times 10^{-4}$	$-1.3 \times 10^{-4}$	$-2.2 \times 10^{-11}$	$1.7 \times 10^{-11}$
	16	$-1.9 \times 10^{-7}$	$-2.4 \times 10^{-7}$	$-2.3 \times 10^{-10}$	$-1.2 \times 10^{-10}$
280	8	$-5.4 \times 10^{-3}$	$-2.0 \times 10^{-1}$	$1.4 \times 10^{-10}$	$-2.6 \times 10^{-9}$
	12	$6.5 \times 10^{-5}$	$5.9 \times 10^{-5}$	$2.8 \times 10^{-11}$	$5.1 \times 10^{-11}$
	16	$4.2 \times 10^{-7}$	$-1.9 \times 10^{-7}$	$1.2 \times 10^{-11}$	$-1.1 \times 10^{-10}$
320	8	$2.0 \times 10^{-2}$	$5.8 \times 10^{-3}$	$9.3 \times 10^{-11}$	$-5.4 \times 10^{-11}$
	12	$5.7 \times 10^{-5}$	$-2.7 \times 10^{-5}$	$5.7 \times 10^{-11}$	$1.8 \times 10^{-11}$
	16	$-8.9 \times 10^{-8}$	$3.2 \times 10^{-7}$	$-8.3 \times 10^{-11}$	$-1.7 \times 10^{-10}$

者の間には差が見られなかったもので、紙面の都合により結果を図示することを省略した。座標 (0, 2) のとき、2つの介在物が最も近づく  $\theta=270^\circ$  近傍で、最大応力は介在物が単独の場合と比べて、 $2b/y_1=0.5$  のとき 14.8%、 $2b/y_1=0.8$  のとき 73.5% 増加している。

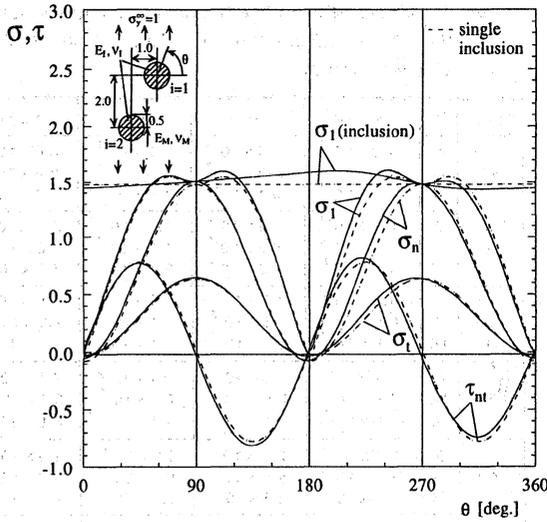
Fig. 6, 7 中の実線は、介在物 ( $i=1$ ) 境界上の母材の応力分布であるが、主応力  $\sigma_1$  については境界上の介在物の分布も示す。破線は、無限板中の 1 個の剛体介在物の境界上での母材の応力分布である。Fig. 6, 7 において、座標 (1, 2) のようにとると干渉効果により最大応力の発生位置は変化し、 $\theta=240^\circ$  近傍になり、この場合も 2つの介在物が最も近づく付近で最大応力が生じていることがわかる。Fig. 6, 7 で (a), (b) を比較すると、介在物間の距離が離れるにしたがい、干渉効果は小さくなり、1 個の介在物の応力分布に近づいていくことがわかる。

Fig. 8 には遠方で一様な  $y$  方向の引張応力  $\sigma_y^\infty$  を受ける無限板中の 2 個の剛体だ円形介在物の干渉問題を示す。介在物の形状比は  $a/b=0.8$  とし、介在物  $i=1$  の中心座標を (2, 2), (2, 1) と変化させたときの介在物  $i=1$  のまわりの応力分布を計算した。座標を (2, 1) のとき、干渉効果による介在物まわりの応力の変化は  $\theta=210^\circ$  付近で顕著になり、だ円形介在物の場合でも、2つの介在物が最も近くなる位置付近で、干渉効果が大きく表れることがわかる。

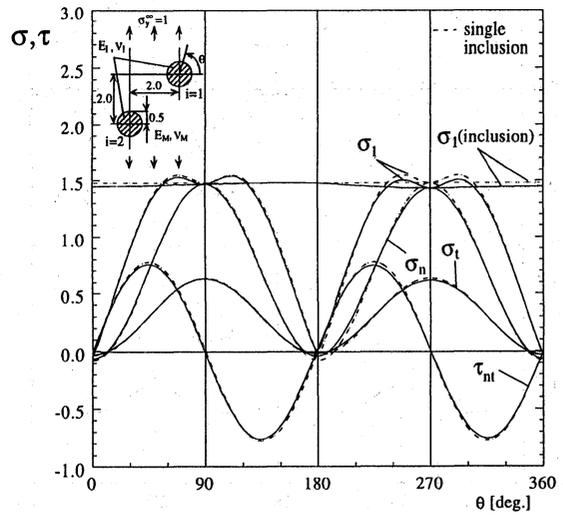
#### 4 結 言

本研究では、これまで解析がなされていない任意に分布するだ円形介在物の応力集中係数の解析法を考察した。その結果、以下のような結論が得られた。

(1) 体積法の特異積分方程式を 8 種類の基本密度関数と重み関数の線形結合で近似する方法によって、良好

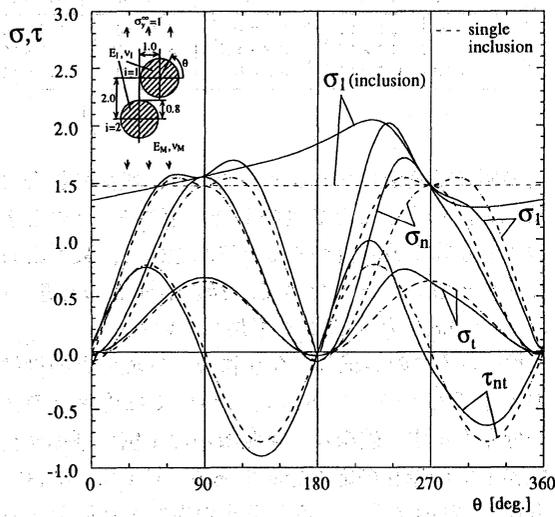


(a)  $x_1=1.0$  in Fig. 2.

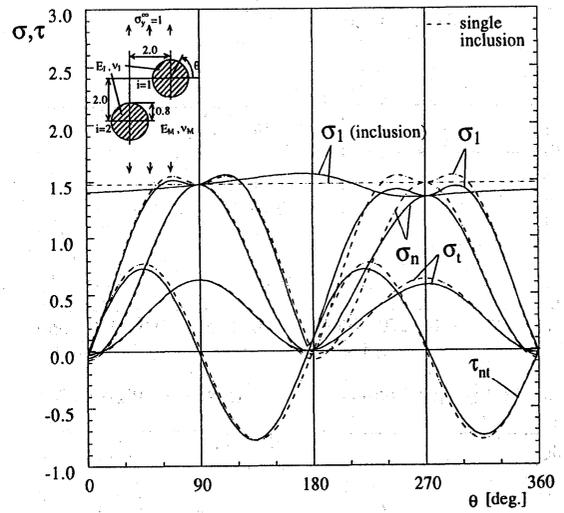


(b)  $x_1=2.0$  in Fig. 2.

Fig. 6. Stress distribution along boundary  $i=1$  ( $\sigma_x^\infty=0$ ,  $\sigma_y^\infty=1$ ,  $2b/y_1=0.5$ ,  $E_I/E_M=10^5$ ,  $\nu_I=\nu_M=0.3$ ,  $a/b=1.0$ ).

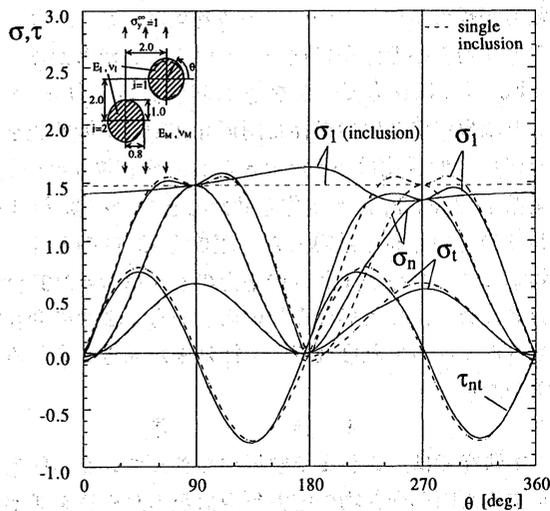


(a)  $x_1=1.0$  in Fig. 2.

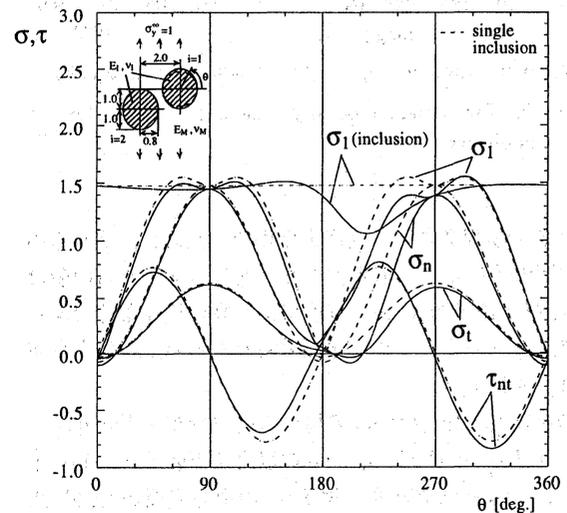


(b)  $x_1=2.0$  in Fig. 2.

Fig. 7. Stress distribution along boundary  $i=1$  ( $\sigma_x^\infty=0$ ,  $\sigma_y^\infty=1$ ,  $2b/y_1=0.8$ ,  $E_I/E_M=10^5$ ,  $\nu_I=\nu_M=0.3$ ,  $a/b=1.0$ ).



(a)  $y_1=2.0$  in Fig. 2.



(b)  $y_1=1.0$  in Fig. 2.

Fig. 8. Stress distribution along boundary  $i=1$  ( $\sigma_x^\infty=0$ ,  $\sigma_y^\infty=1$ ,  $2a/x_1=0.8$ ,  $E_I/E_M=10^5$ ,  $\nu_I=\nu_M=0.3$ ,  $a/b=0.8$ ).

な未知関数の収束性 (Fig. 3, 4) と高い境界条件の満足度 (Table I) が得られた。

(2) 2個の等大剛体円形介在物および2個の等大剛体だ円形介在物が一軸引張りを受ける問題 (Fig. 2) を解析し、境界上のなめらかな応力分布を図示した (Fig. 6, 7, 8)。介在物の寸法比や配置を変えて計算を行い、その応力分布を介在物が1個の場合と比較して検討した結果、2つの介在物が最も接近する点付近で干渉効果が大きく表れることが明らかになった。

(3) 上述のような検討から、本解析法は計算時間の制約を除けば、多数個のだ円形介在物が任意に分布している問題へ応用が可能な有力な解析法であると考えられる。

#### 参 考 文 献

- 1) 西谷弘信, 日本機械学会誌, **70**, 627 (1967).
- 2) 内山幸彦, 八田正俊, 村上敬宜, 日本複合材料学会誌, **11**, 275 (1985).
- 3) J. N. Goodier, Concentration of Stress around Spherical and Cylindrical Inclusions and Flaws, T. A. S. M. E., **55**, 39 (1933).
- 4) 塩谷駿介, 日本機械学会論文集, **36**, 886 (1970).
- 5) 野田尚昭, 松尾忠利, 日本機械学会論文集, A-**58**, 2179 (1992).
- 6) 野田尚昭, 松尾忠利, 日本機械学会論文集, A-**59**, 785 (1993).
- 7) 野田尚昭, 松尾忠利, 藤田淳也, 日本機械学会論文集, A-**60**, 798 (1994).
- 8) 野田尚昭, 松尾忠利, 日本機械学会論文集, A-**60**, 2411 (1994).
- 9) 西谷弘信, 陳 玳珩, “体積力法 (重ね合わせの原理による数値解析法)” (1987) 培風館.