

面外せん断の応力集中問題における 体積力法の特異積分方程式の数値解析法*

野田尚昭*¹, 有田卓司*², 松尾忠利*³

Numerical Solution of Singular Integral Equations of the Body Force Method in Stress Concentration Problems for Longitudinal Shear Loading

Nao-Aki NODA, Takuji ARITA and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations in stress concentration problems for longitudinal shear loading. The body force method is used to formulate the problems as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities, where unknowns are the densities of body forces distributed in the longitudinal direction of an infinite body. In order to satisfy the boundary conditions along elliptical boundaries, four kinds of fundamental density functions are newly introduced. Then the body force densities are approximated by a linear combination of those fundamental density functions and polynomials. The calculations are carried out for several arrangements of elliptical holes, and it is found that the present method yields rapidly converging numerical results. The body force densities and stress distributions along the boundaries are shown in figures to demonstrate the accuracy of the present solutions.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Body Force Method, Longitudinal Shear, Interaction, Numerical Analysis, Singular Integral Equation

1. 緒言

著者らはさきに、応力集中問題における体積力法⁽¹⁾の特異積分方程式の数値解析法を考察し、従来の体積力法の問題点として、

- (1) 未知関数である体積力密度が分割数を増加させても収束しない場合があること⁽²⁾,
 - (2) 境界条件を完全には満足させることができない場合があること⁽³⁾,
 - (3) 重み関数(未知関数)の近似に階段関数を用いているため境界上の滑らかな応力分布が求めにくいこと⁽²⁾,
 - (4) 引張応力場の解析が主になされており、面内せん断応力場の解析がなされていないこと⁽⁴⁾,
- 等を指摘した。さらに、これらの問題点を解決するための数値解析法として、

- (1) 新しい8種類の基本密度関数を用いること⁽²⁾,
- (2) 重み関数の近似に多項式を用いること⁽²⁾⁽³⁾,

(3) 体積力密度を基本密度関数と重み関数の一次結合で表現すること⁽²⁾⁽⁴⁾,

を提案し、このような方法で上述の問題点がすべて解決できることを示した⁽²⁾⁻⁽⁶⁾。さらにこれらの方法を応用して、二次元平面問題と三次元問題⁽⁹⁾⁽⁶⁾を取り扱った。

本研究では、面外せん断問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法を考察する。この問題も従来の体積力法による取り扱いがなされている⁽⁷⁾が、基本密度関数を1種類しか使用していないため、例えば任意に分布するだ円孔の問題を解く場合、著者がさきに指摘した問題点(1)~(3)が同様に生じるものと考えられる。本論文では面外せん断問題の体積力法による厳密な一般的解析方法を示すほか、だ円孔の干渉の具体的問題を考察し、解法の有効性を実証する。

2. 解析方法

2.1 体積力法の特異積分方程式 本解析法を図1に示すような、無限遠で τ_{xz}^{∞} , τ_{yz}^{∞} を受ける無限体中のm個のだ円孔の干渉問題を例として説明する。この

* 原稿受付 1997年1月6日。

¹ 正員, 九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

² 学生員, 九州工業大学学部生。

³ 正員, 福島工業高等専門学校(〒970 いわき市平上荒川字長尾30)。

問題は重ね合せの原理に基づく体積力法の考え方により、無限体中の1点 \$(\xi_k, \eta_k)\$ にz方向の集中力が作用するときの任意の点 \$(x_i, y_i)\$ の応力場の解を用いて解くことができる。このとき問題はだ円孔となるべき仮想境界上に分布させたz方向の体積力密度 \$\rho_z^*(\phi_k)\$ (\$k=1, \dots, m\$) を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される。ここで、\$\phi_k\$ (\$\xi_k = a_k \cos \phi_k, \eta_k = b_k \sin \phi_k\$) は着力点を表わす角度で注目点を表わす角度 \$\theta_i\$ (\$x_i = a_i \cos \theta_i, y_i = b_i \sin \theta_i\$) と区別して用いる。

$$(-1/2)\rho_z^*(\theta_i) + \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} K_{nz}^{F_z}(\phi_k, \theta_i) \rho_z^*(\phi_k) ds = -(\tau_{xz}^\infty \cos \theta_{i0} + \tau_{yz}^\infty \sin \theta_{i0}) \quad i=1 \sim m, \quad 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \quad (1)$$

式(1)はi番目におけるだ円孔縁 \$\Gamma_k\$ の境界条件 \$\tau_{nz} = 0\$ に相当している。式(1)で、\$\theta_{i0} = \theta_{i0} + \psi_i\$ で、\$\theta_{i0}\$ は点 \$(x_i, y_i)\$ におけるi番目のだ円の外向き法線と \$x_1\$ 軸のなす角度、\$\psi_i\$ は \$x_1\$ 軸と \$x\$ 軸のなす角度である。また、式(1)に含まれる被積分関数 \$K_{nz}^{F_z}(\phi_k, \theta_i)\$ は、孔のない無限体の \$k\$ 番目のだ円となる仮想境界上の一点に単位大きさ集中力 (z方向) が作用するときのi番目のだ円となる境界上の点に生じる応力 \$\tau_{nz}\$ を意味する。式(1)は \$\phi_k = \theta_i, i=k\$ のときコーシー型の特異性を有する。その場合には積分のコーシーの主値をとるものとする。特異積分方程式(1)の未知関数である体積力密度 \$\rho_z^*(\phi_k)\$ は次式で定義される。

$$\rho_z^*(\phi_k) = \frac{dF_z^*}{ds} \quad (k=1, \dots, m) \quad (2)$$

ここで、\$dF_z^*\$ は微小長さ \$ds = \sqrt{(dx_k)^2 + (dy_k)^2}\$ に作用する体積力のz方向合力である。

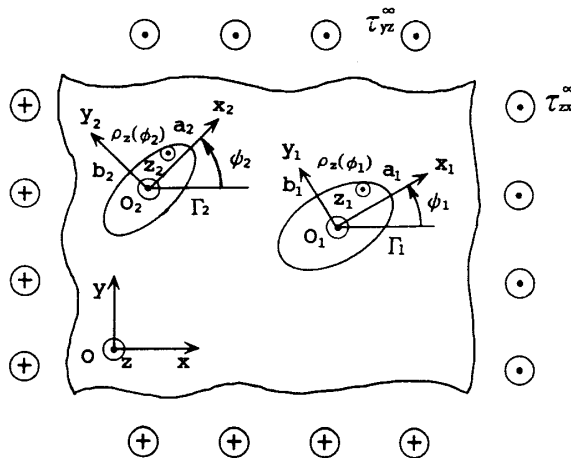


Fig.1 Arbitrarily distributed elliptical holes

2. 2 面外せん断問題の基本密度関数

いま、式(3)で定義される関数を考えるとこれらの関数 \$\rho_{z1}^*(\phi_k) \sim \rho_{z4}^*(\phi_k)\$ は、それぞれ式(4.a)~(4.d)の関係を満たす。

$$\begin{aligned} \rho_{z1}^*(\phi_k) &= \left\{ \rho_z^*(\phi_k) + \rho_z^*(\pi - \phi_k) + \rho_z^*(\pi + \phi_k) + \rho_z^*(-\phi_k) \right\} / 4 \\ \rho_{z2}^*(\phi_k) &= \left\{ \rho_z^*(\phi_k) + \rho_z^*(\pi - \phi_k) - \rho_z^*(\pi + \phi_k) - \rho_z^*(-\phi_k) \right\} / 4 \\ \rho_{z3}^*(\phi_k) &= \left\{ \rho_z^*(\phi_k) - \rho_z^*(\pi - \phi_k) - \rho_z^*(\pi + \phi_k) + \rho_z^*(-\phi_k) \right\} / 4 \\ \rho_{z4}^*(\phi_k) &= \left\{ \rho_z^*(\phi_k) - \rho_z^*(\pi - \phi_k) + \rho_z^*(\pi + \phi_k) - \rho_z^*(-\phi_k) \right\} / 4 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\rho_{z1}^*(\phi_k) = \rho_{z1}^*(\pi - \phi_k) = \rho_{z1}^*(\pi + \phi_k) = \rho_{z1}^*(-\phi_k) \quad (4.a)$$

$$\rho_{z2}^*(\phi_k) = \rho_{z2}^*(\pi - \phi_k) = -\rho_{z2}^*(\pi + \phi_k) = -\rho_{z2}^*(-\phi_k) \quad (4.b)$$

$$\rho_{z3}^*(\phi_k) = -\rho_{z3}^*(\pi - \phi_k) = -\rho_{z3}^*(\pi + \phi_k) = \rho_{z3}^*(-\phi_k) \quad (4.c)$$

$$\rho_{z4}^*(\phi_k) = -\rho_{z4}^*(\pi - \phi_k) = \rho_{z4}^*(\pi + \phi_k) = -\rho_{z4}^*(-\phi_k) \quad (4.d)$$

式(4)より、関数 \$\rho_{z1}^*(\phi_k) \sim \rho_{z4}^*(\phi_k)\$ を \$0 \le \phi_k \le \pi/2\$ の範囲で求めることは、関数 \$\rho_z^*(\phi_k)\$ を \$0 \le \phi_k \le 2\pi\$ の全範囲で求めることに等しい。すなわち、\$0 \le \phi_k \le \pi/2\$ で \$\rho_{z1}^*(\phi_k) \sim \rho_{z4}^*(\phi_k)\$ が与えられるとき、式(5)に示されるように、\$0 \le \phi_k \le 2\pi\$ での \$\rho_z^*(\phi_k)\$ が与えられる。

$$\rho_z^*(\phi_k) = \rho_{z1}^*(\phi_k) + \rho_{z2}^*(\phi_k) + \rho_{z3}^*(\phi_k) + \rho_{z4}^*(\phi_k) \quad (5.a)$$

$$\rho_z^*(\pi - \phi_k) = \rho_{z1}^*(\phi_k) + \rho_{z2}^*(\phi_k) - \rho_{z3}^*(\phi_k) - \rho_{z4}^*(\phi_k) \quad (5.b)$$

$$\rho_z^*(\pi + \phi_k) = \rho_{z1}^*(\phi_k) - \rho_{z2}^*(\phi_k) - \rho_{z3}^*(\phi_k) + \rho_{z4}^*(\phi_k) \quad (5.c)$$

$$\rho_z^*(-\phi_k) = \rho_{z1}^*(\phi_k) - \rho_{z2}^*(\phi_k) + \rho_{z3}^*(\phi_k) - \rho_{z4}^*(\phi_k) \quad (5.d)$$

いま、面外せん断問題の基本密度関数 \$w_{z1}(\phi_k) \sim w_{z4}(\phi_k)\$ を式(6.a)~(6.d)で定義すると、式(6.a)~(6.d)はそれぞれ式(4.a)~(4.d)を満足する。

$$w_{z1}(\phi_k) = n_z(\phi_k) / \cos \phi_k \quad (6.a)$$

$$w_{z2}(\phi_k) = n_z(\phi_k) \tan \phi_k \quad (6.b)$$

$$w_{z3}(\phi_k) = n_z(\phi_k), \quad (6.c)$$

$$w_{z4}(\phi_k) = n_z(\phi_k) \sin \phi_k \quad (6.d)$$

ここで、\$n_z\$ は、仮想境界上の点 \$(x_k, y_k)\$ における単位外向き法線ベクトルの \$x_1\$ 座標成分 \$\cos \theta_{k0}\$ であり、次式で表わされる。

$$n_z(\phi_k) = \frac{b_k \cos \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} = \cos \theta_{k0} \quad (7)$$

式(6)で示される基本密度関数を、境界が円形の場合について図2に示す。このような、関数を用いて \$\rho_{z1}^*(\phi_k) \sim \rho_{z4}^*(\phi_k)\$ を式(8)のように表現すると、基本密度に乗ずる重み関数 \$\rho_{z1}(\phi_k) \sim \rho_{z4}(\phi_k)\$ (未知関数) が満足すべき条件は式(9)で表される。

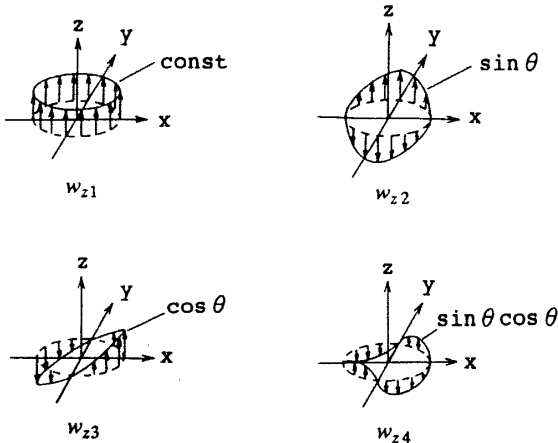


Fig. 2 Fundamental density functions for circular boundary

$$\begin{aligned} \rho_{z1}(\phi_k) &= \rho_{z1}(\phi_k)w_{z1}(\phi_k), & \rho_{z2}(\phi_k) &= \rho_{z2}(\phi_k)w_{z2}(\phi_k) \\ \rho_{z3}(\phi_k) &= \rho_{z3}(\phi_k)w_{z3}(\phi_k), & \rho_{z4}(\phi_k) &= \rho_{z4}(\phi_k)w_{z4}(\phi_k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$f(\phi_k) = f(\pi - \phi_k) = f(\pi + \phi_k) = f(-\phi_k) \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $f(\phi_k)$ は $\rho_{z1}(\phi_k) \sim \rho_{z4}(\phi_k)$ を意味する。

結局、 $\rho_z^*(\phi_k)$ は $\rho_{z1}(\phi_k) \sim \rho_{z4}(\phi_k)$ と $w_{z1}(\phi_k) \sim w_{z4}(\phi_k)$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \rho_z^*(\phi_k) &= \rho_{z1}(\phi_k)w_{z1}(\phi_k) + \rho_{z2}(\phi_k)w_{z2}(\phi_k) \\ &+ \rho_{z3}(\phi_k)w_{z3}(\phi_k) + \rho_{z4}(\phi_k)w_{z4}(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

2. 3 特異積分方程式の離散化数値解析法

式(10)の表現を用いると式(1)の特異積分方程式は次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} &-(1/2)\{\rho_{z1}(\theta_i)/\cos\theta_i + \rho_{z2}(\theta_i)\tan\theta_i + \rho_{z3}(\theta_i) \\ &+ \rho_{z4}(\theta_i)\sin\theta_i\}\cos\theta_{i0} \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nz}^{Fz}(\phi_k, \theta_i)\{\rho_{z1}(\phi_k)/\cos\phi_k + \rho_{z2}(\phi_k)\tan\phi_k \\ &+ \rho_{z3}(\phi_k) + \rho_{z4}(\phi_k)\sin\phi_k\}b_k \cos\phi_k d\phi_k \\ &= -(\tau_{xz}^\infty \cos\theta'_{i0} + \tau_{yz}^\infty \sin\theta'_{i0}) \quad \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

重み関数を式(9)を満足する連続関数として、式(12)、(13)のように表現する。

$$\begin{aligned} \rho_{z1}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} a_n t_n(\phi_k), & \rho_{z2}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} b_n t_n(\phi_k) \\ \rho_{z3}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} c_n t_n(\phi_k), & \rho_{z4}(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} d_n t_n(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(12) \\ t_n(\phi_k) &= \cos\{2(n-1)\phi_k\} \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

ここで、 M は $0 \leq \phi_k \leq 2\pi$ の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により、式(11)は係数 a_n, b_n, c_n, d_n につい

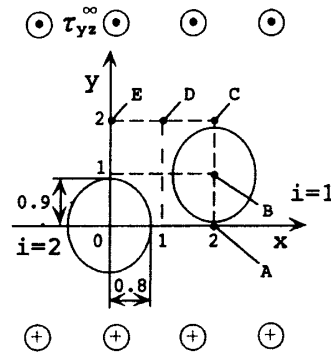


Fig. 3 Two equal elliptical holes
i=1 : $x=a\cos\theta_1+x_1, y=b\sin\theta_1+y_1$
i=2 : $x=a\cos\theta_2, y=b\sin\theta_2$

ての M 個の連立方程式 [式(14)] に還元される。

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{M/4} (a_n A_n + b_n B_n + c_n C_n + d_n D_n) \\ &= -(\tau_{xz}^\infty \cos\theta'_{i0} + \tau_{yz}^\infty \sin\theta'_{i0}) \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n &= -(1/2)t_n(\theta_i)\cos\theta_{i0}/\cos\theta_i + \int_0^{2\pi} K_{nz}^{Fz}(\phi_k, \theta_i)t_n(\phi_k)b_k d\phi_k \\ B_n &= -(1/2)t_n(\theta_i)\cos\theta_{i0}\tan\theta_i \\ &+ \int_0^{2\pi} K_{nz}^{Fz}(\phi_k, \theta_i)t_n(\phi_k)b_k \sin\phi_k d\phi_k \\ C_n &= -(1/2)t_n(\theta_i)\cos\theta_{i0} + \int_0^{2\pi} K_{nz}^{Fz}(\phi_k, \theta_i)t_n(\phi_k)b_k \cos\phi_k d\phi_k \\ D_n &= -(1/2)t_n(\theta_i)\cos\theta_{i0}\sin\theta_i \\ &+ \int_0^{2\pi} K_{nz}^{Fz}(\phi_k, \theta_i)t_n(\phi_k)b_k \sin\phi_k \cos\phi_k d\phi_k \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

したがって、問題を解くことは係数 $a_n \sim d_n$ を求めることに帰着される。 m 個の円境界上のそれぞれで適当に選んだ M 個の点 ($\phi_k = \pm\phi_n, \pi \pm \phi_n, n=1, \dots, M/4$ のように選ぶ) で境界条件を満足するように式(14)の連立方程式を解けば、任意の点の応力は係数と A_n 等の影響係数の一次結合で表現される。以上の解析方法により、一般的な条件下で、円孔の位置を変化させてその干渉効果を調べる。

3. 解析結果および考察

図3は遠方で一様な z 方向のせん断応力 $\tau_{yz}^\infty = 1.0$ を受ける無限体中の2個の等大円孔 ($a=0.8, b=0.9$) の干渉問題を示す。円孔 $i=2$ の中心座標は原点 $(0, 0)$ に固定し、円孔 $i=1$ の中心座標を $A(2, 0), B(2, 1), C(2, 2), D(1, 2), E(0, 2)$ と変化させたときの、境界上の応力 τ_{xz} の分布を求める。

図3において、円孔 $i=1$ の中心座標が点 B の場合、未知関数 $\rho_{z1}, \rho_{z2}, \rho_{z3}, \rho_{z4}$ の収束状況を表1に示す。

Table.1 Body force densities along boundary $i=1$ in Fig.3 ($\tau_{yz}^{\infty}=1.0, a=0.8, b=0.9$, case B)

θ_1 (deg.)	M/4	ρ_{z1}	ρ_{z2}	ρ_{z3}	ρ_{z4}
0	4	0.2682	1.6962	-0.3730	0.0361
	8	0.2659	1.6948	-0.3707	0.0364
	12	0.2659	1.6948	-0.3707	0.0364
20	4	0.1634	1.7827	-0.2868	-0.0518
	8	0.1652	1.7843	-0.2886	-0.0524
	12	0.1652	1.7843	-0.2886	-0.0524
40	4	-0.0231	1.8877	-0.1143	-0.1815
	8	-0.0239	1.8863	-0.1133	-0.1809
	12	-0.0239	1.8863	-0.1133	-0.1809
60	4	-0.1259	1.8828	0.0091	-0.2207
	8	-0.1256	1.8836	0.0087	-0.2212
	12	-0.1256	1.8836	0.0087	-0.2212
80	4	-0.1486	1.8569	0.0527	-0.2188
	8	-0.1486	1.8566	0.0528	-0.2186
	12	-0.1486	1.8566	0.0528	-0.2186
90	4	-0.1497	1.8540	0.0566	-0.2183
	8	-0.1500	1.8523	0.0572	-0.2173
	12	-0.1500	1.8523	0.0572	-0.2173

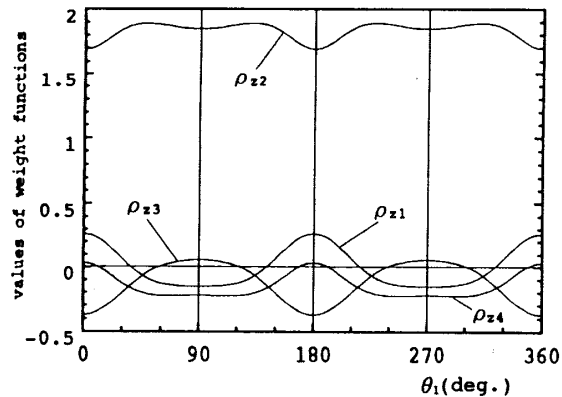


Fig.4 Unknown functions of present analysis in Fig.3 ($\tau_{yz}^{\infty}=1.0, a=0.8, b=0.9$, case B)

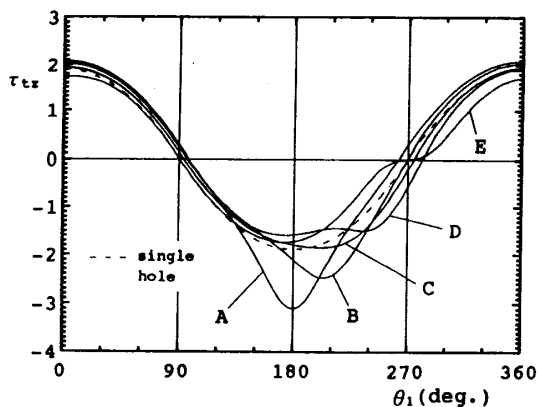


Fig.5 Stress distribution along boundary $i=1$ in Fig.3 ($\tau_{yz}^{\infty}=1.0, a=0.8, b=0.9$)

本解析結果は、 $M/4=8$ と $M/4=12$ が有効数字5けた程度まで収束して、良好な収束性を示している。図4に $\rho_{z1}, \rho_{z2}, \rho_{z3}, \rho_{z4}$ の値を図示する。また、だ円孔縁全周における境界条件の満足度を調べると、

$$M/4=4\text{のとき}, \quad 10^5 < |\tau_{nz}| < 10^2$$

$$M/4=8\text{のとき}, \quad 10^8 < |\tau_{nz}| < 10^5$$

$$M/4=12\text{のとき}, \quad 10^{11} < |\tau_{nz}| < 10^8$$

であり、高い境界条件の満足度が確かめられた。

だ円孔 $i=1$ の中心座標がA~Eと変化するときのだ円孔 $i=1$ の境界上の応力 τ_{tz} の分布を図5に示す。参考のため、無限体中の1個のだ円孔の結果も破線で示した。せん断応力 $\tau_{yz}^{\infty}=1.0$ を受ける無限体中の1だ円孔では $\theta=0^\circ, 180^\circ$ で最大応力が生じる。図3の2個の等大だ円孔の干渉問題では、 $\theta=0^\circ$ 付近では干渉の影響は小さく、 $\theta=180^\circ$ 付近では大きいことがわかる。本論文の解析法によって境界上のなめらかな応力分布と高い境界条件の満足度が従来の方法⁽⁷⁾より少ない選点数で、しかも、外挿なしで得られることが明らかとなった。

4. 結 言

本研究では、面外せん断問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法を考察した。その結果新しく提案した基本密度関数と重み関数の一次結合で未知関数である体積力密度を表現する方法によって境界上のなめらかな応力分布と高い境界条件の満足度が得られることが明らかとなった。

文 献

- (1) 西谷弘信, 電子計算機による二次元応力問題の解法, 機誌, 70-580, (1967), 627-635.
- (2) 野田尚昭, 松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(第2報, 切欠きの干渉問題の一般的解析法), 機論, 59-559, A(1993), 785-791.
- (3) 野田尚昭, 松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(第1報, 基礎の理論と境界条件の満足度の検討), 機論, 58-555, A(1992), 2179-2184.
- (4) 野田尚昭, 松尾忠利, せん断応力場におけるだ円形介在物の干渉効果の解析, 機論, 60-580, (1994), 2767-2773.
- (5) 野田尚昭, 松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(第3報, 三次元問題への応用), 機論, 59-564, A(1994), 1964-1970.
- (6) 野田尚昭, 小笠原望, 松尾忠利, 回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 62-596, (1996), 1051-1058.
- (7) 西谷弘信, 斉藤公則, 原信幸, 切欠きに先行するだ円孔またはき裂による応力集中(引張りおよび縦せん断), 機論, 39-324, (1973), 2312-2322