

## 特異積分方程式を用いた傾斜半だ円表面き裂先端の 応力拡大係数の分布の解析\*

野田尚昭\*<sup>1</sup>, 小林公浩\*<sup>2</sup>, 三好伸介\*<sup>3</sup>

### Analysis of Variation of Stress Intensity Factor of Oblique Semi-Elliptical Surface Crack Using Singular Integral Equation Method

Nao-Aki NODA, Kimihiro KOBAYASHI and Shinsuke MIYOSHI

In this paper, a singular integral equation method is applied to calculate the variation of the stress intensity factor along the front of a 3-D oblique semi-elliptical surface crack. The stress field induced by the body force doublet in a semi-infinite body is used as the fundamental solution. Then, the problem is formulated as a system of integral equations with singularities of the form  $r^{-3}$ . In the numerical calculation, the unknown body force doublets are approximated by the product of fundamental density functions and polynomials. The results show that the present method yields smooth variations of stress intensity factors along the crack front accurately for various geometrical conditions.

**Key Words:** Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Oblique Semi-Elliptical Surface Crack, Singular Integral Equation, Numerical Solution, Fundamental Density Function

#### 1. 緒言

実際の機械構造物では材料表面近くの内部き裂や表面き裂が破壊の起点となることが多いため、それらの応力拡大係数を求めることは安全性、信頼性の確保のためにも大変重要である。実用上問題となる三次元表面き裂の多くは半だ円板状き裂で近似することができるため、これまでその応力拡大係数を解析する研究が多くなされてきた<sup>(1)~(7)</sup>。多くの破壊問題においてモードIの応力拡大係数 $K_I$ が最も重要であるため、これまで自由表面に垂直なき裂が多く解析されてきた。しかしながら、例えば、疲労初期に発生する第I段階き裂の多くは荷重軸に対して $45^\circ$ 前後のすべり面に生ずることや、転がり接触荷重を受ける材料の表面には表面から $15^\circ \sim 30^\circ$ 程度のごく浅い角度でき裂が生ずることはよく知られている。これら初期き裂の伝ばには $K_I$ だけでなく $K_{II}$ 、 $K_{III}$ が関係すると考えられるので、その議論には自由表面にたいして斜めに生じる3次元き裂の解析が不可欠である。そこで本論文では傾斜半だ円き裂(図1)を考察するが、この場合には、

き裂開口変位等の未知関数や満足すべき境界条件の数 がモードI型き裂の解析に比べて3倍になる。このため、自由表面の影響が大きく表われる自由表面近傍の応力拡大係数や、特に傾斜角 $\psi$ が大きい場合のき裂先端全体応力拡大係数に対して、実際に数値的に精度の高い結果を得ることはかなり困難になる。

村上ら<sup>(8)(9)</sup>は、き裂領域を三角形要素に分割し特異積分方程式の未知関数である体積力対密度を基本密度関数と各要素毎に固有な値をとる階段関数の積で近似し、半だ円形、長方形、三角形の傾斜表面き裂の応力拡大係数を解析した。一方、石田・徳本ら<sup>(10)(11)</sup>は体積力法によりき裂領域を扇型領域に分割することによって同様な解析を行い傾斜半だ円表面き裂の応力拡大係数を解析した。また村上・柴<sup>(12)</sup>は、き裂領域を三角形要素に分割し、屈折傾斜長方形表面き裂の応力拡大係数を解析している。しかしこれらの解析では、二つの要素分割の結果によって外挿することにより解を求めるため数値解析の精度が不明確であり、また本来滑らかに分布すべき重みが境界要素によって不連続になるため、き裂先端の滑らかで正確な応力拡大係数の分布を得ることは困難である。

著者らは先に、表面に対して直角に生じた半だ円表面き裂の問題において体積力法により、その特異積分

\* 原稿受付 1997年2月17日。

<sup>1</sup> 正員、九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

<sup>2</sup> 学生員、九州工業大学大学院。

<sup>3</sup> 准員、三菱自動車工業(株)(〒444 岡崎市橋日町中新切1)。

方程式の未知関数である体積力対密度を基本密度関数と多項式の積で近似して解析した<sup>(13)</sup>。その結果、き裂先端の滑らかな応力拡大係数の分布と、高い境界条件の満足度が得られた。よって本研究では引張りを受けた半無限体表面に斜めに生じた半だ円表面き裂の応力拡大係数の分布を、体積力法を用い、特異積分方程式の未知関数である体積力対密度を基本密度関数と多項式の積で近似することによって解析する。

2. 体積力法の特異積分方程式

図1のようにz'x'平面(y' = 0)を自由表面とする半無限体がz'方向に一様引張応力σ<sub>z'</sub><sup>∞</sup>を受ける場合を考える。そしてxy'平面に対して角度ψだけ傾いたxy平面上に主軸長2a、深さbの半だ円表面き裂があるものとする。このとき体積力法の考え方によれば、問題はき裂の存在しない半無限体中においてき裂となるべき仮想境界上に分布されたz方向の引張りの標準型体積力対の密度f<sub>zz</sub>(ξ, η)、yz方向のせん断の標準型体積力対の密度f<sub>yz</sub>(ξ, η)、zx方向のせん断の標準型体積力対の密度f<sub>zx</sub>(ξ, η)を未知関数とする以下の特異積分方程式で表現される。

ここで(ξ, η, ζ)は着力点の(x, y, z)座標である。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} \left[ \iint_S \frac{f_{zz}(\xi, \eta)}{r_1^3} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_{zz}^{f_{zz}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \\ & + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \iint_S K_{zz}^{f_{yz}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_{zz}^{f_{zx}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = -\sigma_z'^{\infty} \cos^2 \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_S K_{yz}^{f_{yz}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_S K_{yz}^{f_{yz}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_S K_{yz}^{f_{zx}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \left. \right] = -\sigma_z'^{\infty} \cos \psi \sin \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.b)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(x-\xi)^2}{r_1^5} \right\} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_S K_{zz}^{f_{zz}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \right\}$$

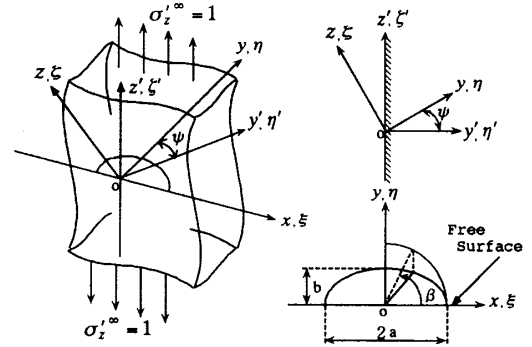


Fig.1 A oblique semi-elliptical surface crack in a semi-infinite body

$$\left. \begin{aligned} & + \iint_S K_{zx}^{f_{yz}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_S K_{zx}^{f_{zx}}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \left. \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.c)$$

$$\left. \begin{aligned} & y = y' / \cos \psi \quad z = z' / \cos \psi \\ & r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta')^2 + (z-\zeta')^2} \\ & S = \left\{ (\xi, \eta) \left| (\xi/a)^2 + (\eta/b)^2 \leq 1, \eta \geq 0 \right. \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.d)$$

式(1.a), (1.b), (1.c)はそれぞれ仮想き裂面上における境界条件σ<sub>z</sub> = 0, τ<sub>yz</sub> = 0, τ<sub>zx</sub> = 0に相当する。左辺の1/r<sub>1</sub><sup>3</sup>, 1/r<sub>1</sub><sup>5</sup>を含む項は無限体中のだ円き裂の存在を表現し、注目点(x, y)と着力点(ξ, η)が一致するときに特異性を示す特異項であり、∬<sub>S</sub>は発散積分の有限部分<sup>(9)</sup>を表わす。左辺のK<sub>zz</sub><sup>f<sub>zz</sub></sup>(ξ, η, x, y, ψ)等は自由表面の境界条件を満足させる関数である。領域Sはき裂のない半無限体中に想定した半だ円表面き裂となるべき仮想き裂面を表わしている。

3. 特異積分方程式の数値解析法

従来用いられていた未知関数を階段関数で近似する方法<sup>(1)</sup>では本来滑らかで連続な関数として分布しているはずの体積力対密度f<sub>zz</sub>(ξ, η), f<sub>yz</sub>(ξ, η), f<sub>zx</sub>(ξ, η)が不連続な関数として近似されるため応力拡大係数を求める際に外挿しなければならぬことや応力拡大係数の滑らかな分布を求めることが難しい等の問題があった。そこで本論文では体積力対密度f<sub>zz</sub>(ξ, η), f<sub>yz</sub>(ξ, η), f<sub>zx</sub>(ξ, η)を以下のように近似する<sup>(13)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} & f_{zz}(\xi, \eta) = F_{zz}(\xi_a, \eta_b) w_{zz}(\xi_a, \eta_b) \\ & f_{yz}(\xi, \eta) = F_{yz}(\xi_a, \eta_b) w_{yz}(\xi_a, \eta_b) \\ & f_{zx}(\xi, \eta) = F_{zx}(\xi_a, \eta_b) w_{zx}(\xi_a, \eta_b) \\ & w_{zz}(\xi_a, \eta_b) = \frac{4(1-\nu)^2 b \sigma_z'^{\infty}}{(1-2\nu)E(k)} \sqrt{1 - \xi_a^2 - \eta_b^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 w_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{yz}^\infty}{C(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} \\
 w_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{zx}^\infty}{B(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} \\
 B(k) &= (k^2-\nu)E(k) + \nu k'^2 K(k) \\
 C(k) &= (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k) \\
 k' &= b/a \leq 1 \quad k = \sqrt{1-(b/a)^2} \quad \xi_a = \xi/a \quad \eta_b = \eta/b \\
 K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

ここで  $w_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $w_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $w_{zx}(\xi_a, \eta_b)$  は基本密度関数と呼ばれるもので無限体中の  $xy$  平面上にあるだ円き裂の遠方で、それぞれ  $\sigma_z^\infty$ ,  $\tau_{yz}^\infty$ ,  $\tau_{zx}^\infty$  が作用したときの、だ円き裂の応力場を厳密に表現する体積力密度に相当する (実際の数値計算では  $\sigma_z^\infty = \tau_{yz}^\infty = \tau_{zx}^\infty = 1$  とおく)。式(2)のような表現を用いれば例えば式(1・a)は基本密度にかける重み関数  $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$  を未知関数とする式(3)で表現される。

$$\begin{aligned}
 &\frac{b}{2\pi E(k)} \left[ \iint_S \frac{F_{zz}(\xi_a, \eta_b)}{r_1^3} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\
 &+ \left. \iint_S K_{zz}^{fyz}(\xi, \eta, x, y, \psi) F_{zz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right] \\
 &+ \frac{bk^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{C(k)} \iint_S K_{zz}^{fyz}(\xi, \eta, x, y, \psi) F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{B(k)} \iint_S K_{zz}^{fzx}(\xi, \eta, x, y, \psi) F_{zx}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right] \\
 &= -\cos^2 \psi
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

ここで重み関数  $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$  としては問題の対称性ならびに、なるべく少ない項数で多様な関数形を表現できることを考慮した多項式を用いる。具体的には式(4)のように  $z$  方向引張り型体積力対と  $yz$  方向せん断型体積力対のときの重み関数  $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$  はそれぞれ  $\alpha_i, \beta_i$ , ( $i = 0, 1, 2, \dots, (n+1)(n+2)/2$ ) を係数とする  $\xi_a$  の偶数乗と  $\eta_b$  のべき乗の組み合わせによる多項式の表現を採用し、 $zx$  方向せん断型体積力対のときの重み関数  $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$  は  $\gamma_i$  を係数とする  $\xi_a$  の奇数乗と  $\eta_b$  のべき乗の組み合わせによる多項式の表現を採用した。例として  $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$  は以下のように表わされる [ $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$  は  $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$  と同様な関数で近似する]。

$$\begin{aligned}
 F_{zz}(\xi_a, \eta_b) &= \alpha_0 + \alpha_1 \eta_b + \dots + \alpha_{n-1} \eta_b^{n-1} + \alpha_n \eta_b^n \\
 &+ \alpha_{n+1} \xi_a^{2 \times 1} + \alpha_{n+2} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b + \dots + \alpha_{2n} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b^{n-1} \\
 &\quad \vdots \\
 &+ \alpha_{1-2} \xi_a^{2(n-1)} + \alpha_{1-1} \xi_a^{2(n-1)} \eta_b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \alpha_l \xi_a^{2n} \\
 &= \sum_{i=0}^l \alpha_i G_i(\xi_a, \eta_b) \\
 F_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \gamma_0 \xi_a + \gamma_1 \xi_a \eta_b + \dots + \gamma_{n-1} \xi_a \eta_b^{n-1} + \gamma_n \xi_a \eta_b^n \\
 &+ \gamma_{n+1} \xi_a^{2 \times 1+1} + \gamma_{n+2} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b + \dots + \gamma_{2n} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b^{n-1} \\
 &\quad \vdots \\
 &+ \gamma_{l-2} \xi_a^{2(n-1)+1} + \gamma_{l-1} \xi_a^{2(n-1)+1} \eta_b \\
 &+ \gamma_l \xi_a^{2n+1} \\
 &= \sum_{i=0}^l \gamma_i Q_i(\xi_a, \eta_b) \quad l = \sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 G_0(\xi_a, \eta_b) &= 1, \quad G_1(\xi_a, \eta_b) = \eta_b, \dots \\
 \dots, G_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1}, \dots, G_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2n} \\
 Q_0(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a, Q_1(\xi_a, \eta_b) = \xi_a \eta_b, \dots \\
 \dots, Q_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1+1}, \dots, Q_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2n+1}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

そうすると問題は、式(3)、式(4)より重み関数  $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ ,  $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$  の  $\alpha_0 \sim \alpha_l, \beta_0 \sim \beta_l, \gamma_0 \sim \gamma_l$  の  $3 \cdot (l+1)$  個の係数を未知数とする連立一次方程式(5)を解くことに帰する。

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^l \left[ \alpha_i \left( A_{zz,i}^{fzz} + B_{zz,i}^{fzz} \right) + \beta_i B_{zz,i}^{fyz} + \gamma_i B_{zz,i}^{fzx} \right] \\
 &= -\cos^2 \psi \\
 &\sum_{i=0}^l \left[ \alpha_i B_{yz,i}^{fzz} + \beta_i \left( A_{yz,i}^{fyz} + B_{yz,i}^{fyz} \right) + \gamma_i \left( A_{yz,i}^{fzx} + B_{yz,i}^{fzx} \right) \right] \\
 &= -\cos \psi \sin \psi \\
 &\sum_{i=0}^l \left[ \alpha_i B_{zx,i}^{fzz} + \beta_i \left( A_{zx,i}^{fyz} + B_{zx,i}^{fyz} \right) + \gamma_i \left( A_{zx,i}^{fzx} + B_{zx,i}^{fzx} \right) \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5・a}$$

例えば  $A_{zz,i}^{fzz}, B_{zz,i}^{fzz}, B_{zz,i}^{fyz}, B_{zz,i}^{fzx}$  は以下の様に表わされる。

$$\begin{aligned}
 A_{zz,i}^{fzz} &= \frac{b}{2\pi E(k)} \iint_S \frac{G_i(\xi_a, \eta_b)}{r_1^3} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\
 B_{zz,i}^{fzz} &= \frac{b}{2\pi E(k)} \iint_S K_{zz}^{fzz}(\xi, \eta, x, y, \psi) G_i(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\
 B_{zz,i}^{fyz} &= \frac{bk^2}{4\pi C(k)} \iint_S K_{zz}^{fyz}(\xi, \eta, x, y, \psi) G_i(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\
 B_{zz,i}^{fzx} &= \frac{bk^2}{4\pi B(k)} \iint_S K_{zz}^{fzx}(\xi, \eta, x, y, \psi) Q_i(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta
 \end{aligned}
 \tag{5・b}$$

式(5)に含まれる積分を実行するとき  $B_i$  の積分は特異性が無いので通常の数値積分によりその値を求めることができる。しかし  $A_i$  の積分では注目点  $(x, y)$  と着力点  $(\xi, \eta)$  が一致するとき特異性を有するため通常の数値積分によりその値を求めることができない。その特異積

分の計算には前報<sup>(13)</sup>と同様の方法を用いた。

4. 数値計算結果と検討

3節までの理論に基づいて、計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータn, 半円表面き裂の傾斜角ψを変化させて、形状比b/a = 0.5, 1.0, ポアソン比ν = 0.3として計算した。式(5)の数値積分には二重指数関数型積分公式(FACOM FORTRAN SSL II AQME)等のサブルーチンを用いて計算した。また結果として得られた応力拡大係数K<sub>I</sub>, K<sub>II</sub>, K<sub>III</sub>をまとめるのに以下の無次元化値F<sub>I</sub>, F<sub>II</sub>, F<sub>III</sub>を用いた。

$$\begin{aligned}
 F_I(\beta) &= \frac{K_I(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \frac{F_{Zz}}{E(k)} \left[ \sin^2 \beta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 \beta \right]^{1/4} \\
 F_{II}(\beta) &= \frac{K_{II}(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \left( F_{Zx} \frac{k' \cos \beta}{B(k)} + F_{yz} \frac{\sin \beta}{C(k)} \right) \frac{k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}} \\
 F_{III}(\beta) &= \frac{K_{III}(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \left( -F_{Zx} \frac{\sin \beta}{B(k)} + F_{yz} \frac{k' \cos \beta}{C(k)} \right) \frac{(1 - \nu)k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}} \\
 F_{Zz} &= F_{Zz}(\xi_a, \eta_b) \Big|_{\xi_a = \cos \beta, \eta_b = \sin \beta} \\
 F_{yz} &= F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \Big|_{\xi_a = \cos \beta, \eta_b = \sin \beta} \\
 F_{Zx} &= F_{Zx}(\xi_a, \eta_b) \Big|_{\xi_a = \cos \beta, \eta_b = \sin \beta}
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

傾斜角ψ=60° の場合は従来の体積法による解析では体積力密度の収束が悪く精度の良い結果が得られていない。そこで、形状比b/a=1.0, 傾斜角ψ=60° のき裂について近似する式(4)の多項式の次数nを変化させたときのき裂前縁に沿った応力拡大係数F<sub>I</sub>, F<sub>II</sub>, F<sub>III</sub>の収束性を表1に示す。本解析では表1に示すようにき裂前縁での応力拡大係数は自由表面付近で収束性が若干悪いものの0° から9° 付近ではおおよそ有効数字2けたから3けた程度, 10° から90° では有効数字3けたから4けた程度の収束性が得られる。図2はき裂の形状比b/a=1.0, 傾斜角ψ=60° のき裂で重み関数F(ξ<sub>a</sub>, η<sub>b</sub>)の多項式近似の次数n=20のときの境界条件(σ<sub>z</sub>=0, τ<sub>yz</sub>=0, τ<sub>zx</sub>=0)の満足度を示している。σ<sub>z</sub>=0 に関しては5×10<sup>-3</sup>以下で満足しており, τ<sub>yz</sub>=0, τ<sub>zx</sub>=0についても8×10<sup>-3</sup>以下で満足している。次にき裂の形状比b/a=1.0, 0.5のき裂について傾斜角ψ=15°, 30°, 45°, 60° の場合のき裂前縁に沿ったF<sub>I</sub>, F<sub>II</sub>, F<sub>III</sub>の値を表2~3に示す。傾斜角ψ=60° の場合き裂前縁の自由表面近傍でF<sub>I</sub>の負の値を得た。このことから実際のき裂ではこの範囲でき裂面の接触が起きるものと考えられる。き裂前縁に沿ったF<sub>I</sub>, F<sub>II</sub>, F<sub>III</sub>の値と石田ら<sup>(10)</sup>の解との比較を図3~6に示す。石田らの結果は傾斜角ψ≤45の範囲で解析がなされてい

Table.1 Convergency of dimensionless stress intensity factor F<sub>I</sub>, F<sub>II</sub>, F<sub>III</sub> in Fig.1 when b/a=1.0, ψ=60°, ν=0.3

	β(deg) n	1	3	5	7	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90
		F <sub>I</sub>	17	-0.04288	-0.02526	0.010155	0.050526	0.086898	0.10267	0.20414	0.25140	0.27457	0.28623	0.29200	0.29474
	18	-0.03655	-0.02316	0.011999	0.051964	0.087515	0.10295	0.20407	0.25141	0.27458	0.28623	0.29204	0.29483	0.29609	0.29630
	19	-0.03863	-0.02425	0.012402	0.053062	0.088352	0.10353	0.20386	0.25153	0.27465	0.28625	0.29207	0.29486	0.29608	0.29606
	20	-0.03533	-0.02329	0.013430	0.054000	0.088828	0.10380	0.20381	0.25162	0.27464	0.28625	0.29201	0.29485	0.29606	0.29606
F <sub>II</sub>	17	-0.19024	-0.26426	-0.29258	-0.29342	-0.28130	-0.27287	-0.15737	-0.03914	0.063782	0.14844	0.21432	0.26141	0.28977	0.29915
	18	-0.18999	-0.26444	-0.29261	-0.29327	-0.28125	-0.27291	-0.15753	-0.03917	0.063708	0.14841	0.21433	0.26147	0.28974	0.29927
	19	-0.18990	-0.26407	-0.29231	-0.29314	-0.28132	-0.27304	-0.15760	-0.03924	0.063658	0.14837	0.21431	0.26144	0.28970	0.29886
	20	-0.18860	-0.26368	-0.29206	-0.29305	-0.28140	-0.27315	-0.15753	-0.03926	0.063621	0.14834	0.21424	0.26147	0.28972	0.29920
F <sub>III</sub>	17	0.33593	0.29632	0.28948	0.28860	0.28682	0.28573	0.27971	0.26490	0.23844	0.20221	0.15827	0.10864	0.055288	0.00000
	18	0.33298	0.29615	0.29041	0.28921	0.28688	0.28565	0.27969	0.26483	0.23843	0.20222	0.15828	0.10868	0.055301	0.00000
	19	0.33273	0.29517	0.29003	0.28900	0.28655	0.28531	0.27972	0.26480	0.23843	0.20223	0.15827	0.10869	0.055311	0.00000
	20	0.33384	0.29583	0.29072	0.28917	0.28640	0.28515	0.27974	0.26480	0.23843	0.20219	0.15823	0.10868	0.055312	0.00000

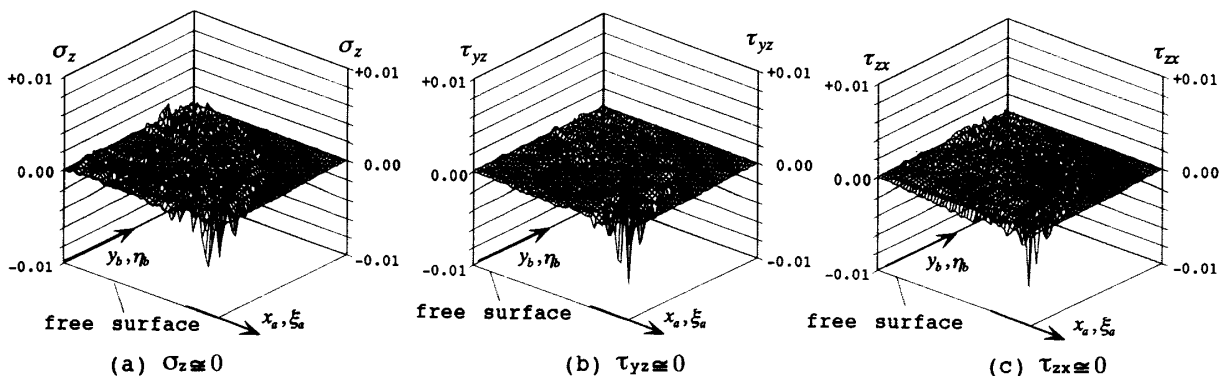


Fig.2 Compliance of boundary condition σ<sub>z</sub>=0, τ<sub>yz</sub>=0, τ<sub>zx</sub>=0 in Fig.1 when n=20, b/a=1.0, ψ=60°, ν=0.3

Table.2 Dimensionless stress intensity factor  $F_I, F_{II}, F_{III}$  along crack front in Fig.1 when  $b/a=1.0, \nu=0.3$

	$\beta$ (deg)	$\Psi$ (deg)													
		1	3	5	7	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$F_I$	15	0.673	0.696	0.698	0.692	0.685	0.683	0.6635	0.6495	0.6403	0.6340	0.6298	0.6270	0.6254	0.6252
	30	0.479	0.542	0.565	0.570	0.570	0.570	0.5667	0.5577	0.5500	0.5438	0.5394	0.5362	0.5345	0.5337
	45	0.198	0.304	0.349	0.369	0.382	0.387	0.4174	0.4223	0.4207	0.4175	0.4144	0.4119	0.4104	0.4104
	60	-0.035	-0.023	0.013	0.054	0.089	0.103	0.2038	0.2516	0.2746	0.2862	0.2920	0.2948	0.2960	0.2960
$F_{II}$	15	-0.178	-0.113	-0.0894	-0.0752	-0.0617	-0.0551	-0.00511	0.03452	0.06840	0.09641	0.1185	0.1344	0.1441	0.1472
	30	-0.335	-0.225	-0.182	-0.154	-0.127	-0.114	-0.01935	0.05433	0.1163	0.1673	0.2073	0.2362	0.2536	0.2593
	45	-0.417	-0.327	-0.280	-0.239	-0.201	-0.184	-0.05445	0.04456	0.1261	0.1925	0.2442	0.2813	0.3037	0.3111
	60	-0.188	-0.264	-0.292	-0.293	-0.281	-0.273	-0.1575	-0.03926	0.06362	0.1483	0.2143	0.2614	0.2897	0.2991
$F_{III}$	15	0.161	0.139	0.130	0.126	0.124	0.123	0.1148	0.1058	0.09413	0.07940	0.06194	0.04247	0.02157	0.00000
	30	0.282	0.248	0.236	0.230	0.227	0.225	0.2093	0.1924	0.1706	0.1436	0.1119	0.07669	0.03895	0.00000
	45	0.335	0.299	0.293	0.289	0.285	0.283	0.2662	0.2449	0.2168	0.1821	0.1417	0.09699	0.04928	0.00000
	60	0.333	0.295	0.290	0.289	0.286	0.285	0.2797	0.2648	0.2384	0.2022	0.1582	0.1086	0.05531	0.00000

Table.3 Dimensionless stress intensity factor  $F_I, F_{II}, F_{III}$  along crack front in Fig.1 when  $b/a=0.5, \nu=0.3$

	$\beta$ (deg)	$\Psi$ (deg)													
		1	3	5	7	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$F_I$	15	0.647	0.647	0.652	0.652	0.651	0.650	0.6685	0.7023	0.7402	0.7755	0.8049	0.8266	0.8400	0.8444
	30	0.460	0.491	0.515	0.527	0.533	0.535	0.5651	0.6006	0.6375	0.6710	0.6987	0.7191	0.7316	0.7357
	45	0.161	0.247	0.299	0.328	0.345	0.351	0.4047	0.4469	0.4854	0.5188	0.5458	0.5655	0.5775	0.5815
	60	-0.093	-0.011	0.034	0.065	0.091	0.102	0.1860	0.2472	0.2985	0.3416	0.3758	0.4005	0.4155	0.4204
$F_{II}$	15	-0.176	-0.114	-0.0791	-0.0591	-0.0446	-0.0376	0.02257	0.06586	0.09772	0.1210	0.1377	0.1490	0.1554	0.1576
	30	-0.335	-0.223	-0.162	-0.126	-0.0981	-0.0848	0.02794	0.1085	0.1678	0.2112	0.2424	0.2635	0.2756	0.2797
	45	-0.425	-0.301	-0.242	-0.201	-0.164	-0.146	-0.00073	0.1076	0.1871	0.2459	0.2885	0.3174	0.3343	0.3399
	60	-0.218	-0.228	-0.235	-0.226	-0.207	-0.195	-0.07418	0.03741	0.1300	0.2038	0.2599	0.2992	0.3225	0.3303
$F_{III}$	15	0.142	0.136	0.127	0.122	0.120	0.119	0.1114	0.09999	0.08581	0.06998	0.05313	0.03572	0.01806	0.00000
	30	0.256	0.241	0.228	0.222	0.219	0.218	0.2057	0.1857	0.1600	0.1310	0.09973	0.06716	0.03389	0.00000
	45	0.325	0.292	0.279	0.277	0.277	0.277	0.2683	0.2465	0.2152	0.1778	0.1363	0.09229	0.04647	0.00000
	60	0.318	0.272	0.262	0.266	0.272	0.274	0.2900	0.2847	0.2613	0.2242	0.1766	0.1216	0.06185	0.00000

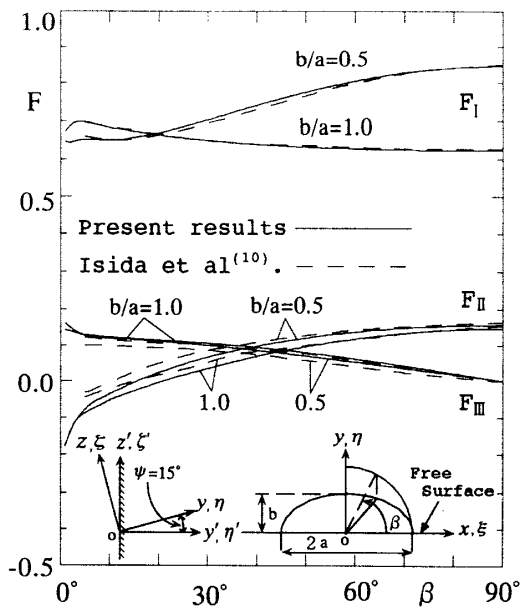


Fig.3 Variation of  $F_I, F_{II}, F_{III}$  along crack front in Fig.1 when  $\psi=15^\circ, \nu=0.3, n=20$

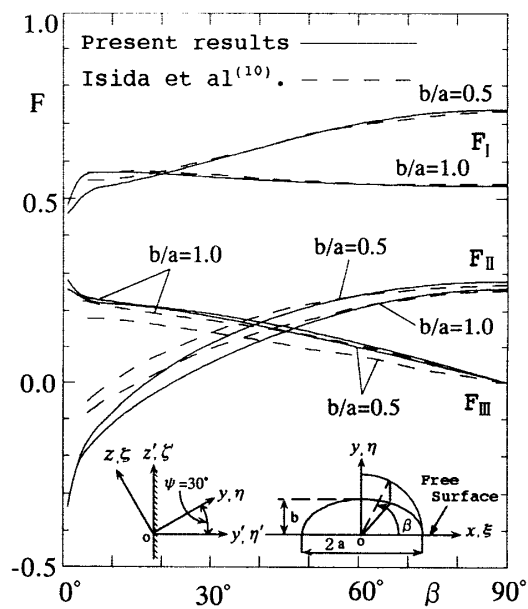


Fig.4 Variation of  $F_I, F_{II}, F_{III}$  along crack front in Fig.1 when  $\psi=30^\circ, \nu=0.3, n=20$

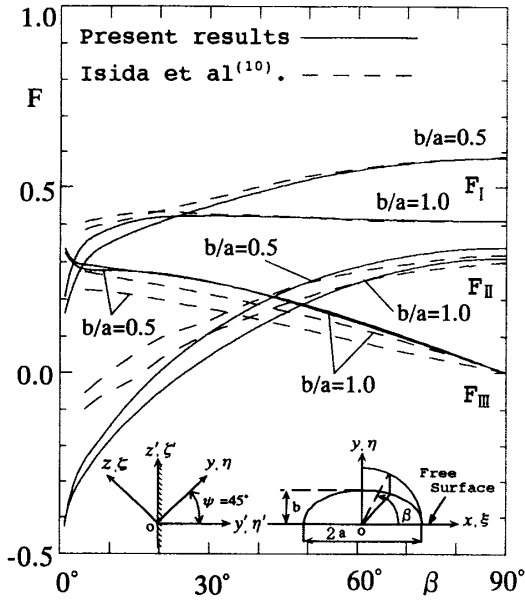


Fig.5 Variation of  $F_I, F_{II}, F_{III}$  along crack front in Fig.1 when  $\psi=45^\circ, \nu=0.3, n=20$

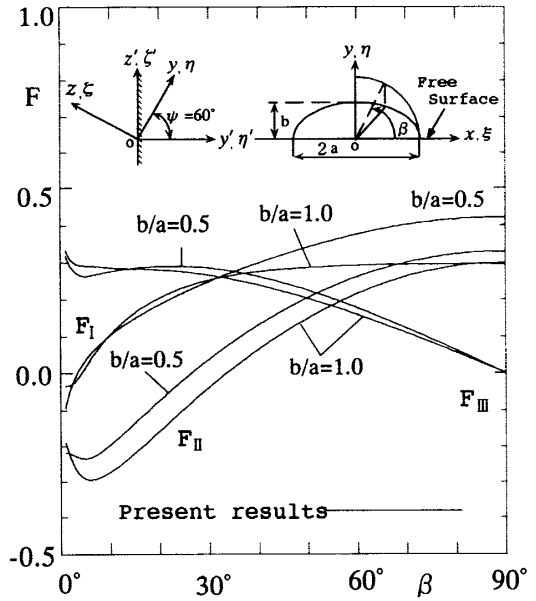


Fig.6 Variation of  $F_I, F_{II}, F_{III}$  along crack front in Fig.1 when  $\psi=60^\circ, \nu=0.3, n=20$

る。き裂前縁が  $30^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$  の範囲で自由表面にごく近い場合を除き、本解析結果とだいたいにおいてよく一致している。

が起きているものと考えられる。

5. 結 言

本論文では、未知関数である体積力対密度を基本密度関数と多項式の積で近似する方法によって傾斜半円表面き裂(図1)のき裂前縁に沿った応力拡大係数の分布を求めた。その結果様々な傾斜角の表面き裂について良好な収束性と境界条件の満足度を得られ、き裂前縁の滑らかな応力拡大係数の分布を図表に示した(表1~3, 図2~6)。傾斜半円表面き裂の解析では、き裂開口変位等の未知関数や満足すべき境界条件の数がモードI型き裂の解析に比べて3倍になる。このため、自由表面の影響が大きく表われる自由表面近傍の応力拡大係数や、特に傾斜角 $\psi$ が大きい場合のき裂先端全体応力拡大係数に対して、実際に数値的に精度の高い結果を得ることはかなり困難になる。しかし、本論文の方法によって、特に従来の方で解析困難であった傾斜角が大きい場合( $\psi > 45^\circ$ )まで良好な結果を得た。傾斜角 $\psi=60^\circ$ の場合、自由表面に近いき裂前縁部近傍でモードIの応力拡大係数は負の値をとり(表2, 3, 図6)実際のき裂では、この部分でき裂面の接触

文 献

- (1) 西谷弘信・村上敬宜, だ円板状き裂および半だ円板状き裂の応力拡大係数(引張り), 機論, 40-329, (1974), 31-40.
- (2) 石田誠・野口博司, 半だ円板状表面き裂を持つ板の引張りと曲げ, 機論, 48-429, A(1982), 607-619.
- (3) 石田誠・野口博司, 体積力法による三次元き裂問題の解析について, 機論, 49-442, A(1982), 707-717.
- (4) 村上敬宜・石田誠, 任意形状傾斜表面き裂のモードI, II, IIIの応力拡大係数の解析法, 機論, 50-455, A(1984), 1359-1366.
- (5) 石田誠・鶴秀登・野口博司, 三次元き裂問題の高精度解析法(第1報, 解析基礎理論と無限体問題への応用), 機論, 59-561, A(1993), 1270-1278.
- (6) 石田誠・鶴秀登・野口博司, 三次元き裂問題の高精度解析法(第2報, 任意形状の表面・内部き裂を持つ半無限体問題への応用) 機論, 59-561, A(1993), 1279-1286.
- (7) 高久田和夫・小泉典・渋谷寿一, き裂問題の積分方程式の解法について, 機論, 50-454, A(1984), 1183-1192.
- (8) Hadamard, J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, (1923), Yale Univ. Press.
- (9) Murakami, Y., Analysis of Stress Intensity Factors of Modes I, II and III Inclined Surface Cracks of Arbitrary Shape, Engng. Frac. Mech., Vol. 22, No. 1, (1985), 101-114.
- (10) 石田誠・野口博司・徳本昭・吉田忠継, 斜めの半だ円表面き裂を持つ半無限体の引張り, 機論, 838-1, (1982), 4-6.
- (11) Isida, M., Tokumoto, A. and Noguchi, H., Oblique Semi-Elliptical Surface Crack in Semi-Infinite Solid Subjected to Tension, Engng. Frac. Mech., Vol. 36, No. 6, (1990), 889-892.
- (12) 村上敬宜・柴中, 三次元屈折表面き裂の応力拡大係数の解析, 材料, Vol. 41, No. 467, (1992), 1214-1220.
- (13) 野田尚昭・三好伸介, 特異積分方程式による半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 61-586, A(1995), 88-96.