

円柱状介在物端部の特異応力場の強さ解析*

野田尚昭*¹, 王清*², 諸富貴光*³Analysis of Intensity of Singular Stress at the End of
a Cylindrical Inclusion

Nao-Aki NODA, Qing WANG and Takamitsu MORODOMI

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations in the problem of an elastic cylindrical inclusion with ends in an infinite body under tension. The problem is formulated as a system of singular integral equations with Cauchy type or logarithmic type singularities, where unknown functions are densities of body forces distributed in infinite bodies having the same elastic constants as those of the matrix and inclusion. In the numerical analysis, the unknown functions of the body force densities are expressed as a linear combination of two types of fundamental density functions and power series, where the fundamental density functions are chosen to express the symmetric stress singularity of the form $1/r^{1-\lambda_1}$ and the skew-symmetric stress singularity of the form $1/r^{1-\lambda_2}$. Then, the singular stress fields at one end of a cylindrical inclusion are discussed for various fiber lengths and elastic ratios. The results are also compared with ones for a rectangular inclusion.

Key Words: Elasticity, Composite Material, Fracture Mechanics, Fiber, Body Force Method, Stress Intensity Factor, Singular Integral Equation, Cylindrical Inclusions

1. 緒 言

最近、陳・西谷⁽¹⁾⁽²⁾は1個の2次元長方形介在物を有する無限板が遠方で一様な引張り荷重を受ける問題を体積法によって解析し、その端部角部の特異応力場の強さを考察した。一般に繊維強化複合材料においては、母材に作用する応力は、界面を通じて繊維に伝達されなければならない。母材と繊維の弾性特性が大きく異なるために、繊維端において集中応力が発生し、これが原因となって繊維端での破損や、界面のはく離を招き全体的な破壊へと至ることが多い。このような問題を力学的側面から強度評価を行うため、陳らの研究では繊維端部の特異応力場の強さを2次元長方形介在物モデルを用いて詳細に議論している。

しかし実際の繊維は3次元形状を有するため、2次元問題と比べて繊維形状が3次元であることがどの程度影響するかを考慮する必要がある。繊維の形状を3次元体として取り扱った解析として、笠野ら⁽³⁾の有限円柱状剛体介在物の解析や、長谷川ら⁽⁴⁾の半球状の端部をもつ円柱状介在物の解析がある、しかし、強化繊維を3次元弾性体として、その繊維端部の特異応力場

の強さを、厳密に解析した結果はこれまでのところ見当たらない。

そこで、本論文ではまず、図1に示されるようなz方向引張りを受ける無限体中に円柱状繊維が埋め込まれた場合を考察する。実際の複合材料では多数個の繊維の影響を考慮する必要があるが、ここではまず最も基本的な1本の繊維を考える。そして、繊維端特異応力場に及ぼす繊維のアスペクト比や繊維と母材の弾性率の比などの影響について2次元長方形介在物とも比較して検討を行う。

解析には、著者らがこれまでこの種の問題に高精度の結果を与えることを確認している体積法の特異積

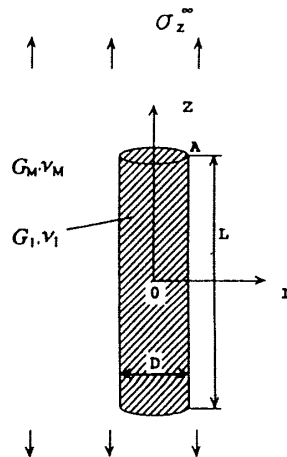


Fig.1 Cylindrical inclusion in an infinite body

* 原稿受付 1996年12月20日。

*¹ 正員,九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。*² 山東工業大学(中国山東省済南市)。*³ 学生員,九州工業大学大学院。

分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いる^{(6)~(7)}.

2. 解析方法

図1に示すような円柱状介在物を有する無限体が遠方で σ_z^∞ を受けた場合の解析方法を特に円柱状介在物端部の角部A近傍の境界条件の満たし方を中心に説明する. ここで母材と介在物のそれぞれの横弾性定数, ポアソン比を G_M, ν_M および G_I, ν_I とする. また r_A は角部Aからの半径方向および軸方向への距離である.

図2に示すように繊維端部近傍の境界条件を満足させるため, 無限体の仮想境界上に分布させるべき体積力を二種類の形式の体積力分布の線形結合によって表現する. すなわち円柱状介在物端の角部のごく近傍では平面ひずみ状態とみなせるため, その特異応力場は陳らが2次元介在物で指摘しているように, 一般に特異性指数の異なるモードIとモードIIの二つの特異応力場の和として表される.

このような混合モードの応力場を表現するため, 端部での上下の仮想境界上に分布させるべき法線方向 (n 方向) と接線方向 (t 方向) の体積力に対し, 端部角部の二等分線に対して, 対称形 (モードI) と逆対称形

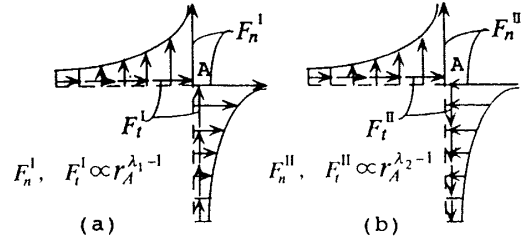


Fig.2 Symmetric (a) and skew-symmetric (b) distributions of body forces ($F_n^I, F_t^I \propto r_A^{\lambda_1-1}, F_n^{II}, F_t^{II} \propto r_A^{\lambda_2-1}, r_A$: distance from corner A)

(モードII) の二種類の分布形式を採用する [図2(a)および(b)].

図2で介在物端部となる仮想境界 $z = L/2$ には体積力 F_n^I, F_n^{II} として z 方向の集中力の輪⁽⁶⁾を連続的に分布させる. また介在物側面となるべき仮想境界 $r = D/2$ には F_t^I, F_t^{II} として半径方向の集中力の輪を連続的に作用させる. また, 体積力 F_t^I, F_t^{II} についてはそれぞれ F_n^I, F_n^{II} と異なる向きの集中力の輪を使用する.

結局介在物を含む境界での境界条件を表す特異積分方程式は, 母材と同じ弾性定数をもつ無限体 M ならびに介在物と同じ弾性定数をもつ無限体 I に分布させた体積力密度を未知関数とする式(1), (2)で表わされる.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}F_{nM}(s) - \frac{1}{2}F_{nI}(s) + \int_L h_{nn}^{F_{IM}}(r_A, s)F_{IM}(r_A)dr_A + \int_L h_{nn}^{F_{nM}}(r_A, s)F_{nM}(r_A)dr_A - \int_L h_{nt}^{F_{tI}}(r_A, s)F_{tI}(r_A)dr_A - \int_L h_{nt}^{F_{nI}}(r_A, s)F_{nI}(r_A)dr_A \\
 & \quad = -\sigma_{nM}^\infty(s) + \sigma_{nI}^\infty(s) \\
 & -\frac{1}{2}F_{tM}(s) - \frac{1}{2}F_{tI}(s) + \int_L h_{nt}^{F_{IM}}(r_A, s)F_{IM}(r_A)dr_A + \int_L h_{nt}^{F_{tM}}(r_A, s)F_{tM}(r_A)dr_A - \int_L h_{tt}^{F_{tI}}(r_A, s)F_{tI}(r_A)dr_A - \int_L h_{tt}^{F_{nI}}(r_A, s)F_{nI}(r_A)dr_A \\
 & \quad = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_L h_u^{F_{IM}}(r_A, s)F_{IM}(r_A)dr_A + \int_L h_u^{F_{nM}}(r_A, s)F_{nM}(r_A)dr_A - \int_L h_u^{F_{tI}}(r_A, s)F_{tI}(r_A)dr_A - \int_L h_u^{F_{nI}}(r_A, s)F_{nI}(r_A)dr_A = -u_M^\infty + u_I^\infty \\
 & \int_L h_v^{F_{IM}}(r_A, s)F_{IM}(r_A)dr_A + \int_L h_v^{F_{tM}}(r_A, s)F_{tM}(r_A)dr_A - \int_L h_v^{F_{tI}}(r_A, s)F_{tI}(r_A)dr_A - \int_L h_v^{F_{nI}}(r_A, s)F_{nI}(r_A)dr_A = -v_M^\infty + v_I^\infty
 \end{aligned} \tag{2}$$

ここで, F_{nM}, F_{tM} ならびに F_{nI}, F_{tI} は無限体 M および無限体 I に分布させた法線方向および接線方向の体積力密度であり, 以下のようにモードI, モードIIの分布形式の和として表される. 式(1), (2)は介在物境界上の境界条件に相当する ($\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0, \tau_{ntM} - \tau_{ntI} = 0, U_M - U_I = 0, V_M - V_I = 0$). また右辺の $\sigma_{nM}^\infty(s), \sigma_{nI}^\infty(s)$ 等は無限体 M の円柱状空かおよび無限体 I の円柱状介在物となるべき仮想境界上に生じる遠方荷重による応力および変位である (母材と介在物の角点の位置を一致させるため無限体 I にも遠方荷重を作用させる). また, $h_{nm}^{F_{IM}}(r_A, s)$ 等は無限体 M (または無限体 I) の円柱状空か (または円柱状介在物) の仮想境界上の点 r_A に n 方向または t 方向の単位大きさの集中力 (対称形および逆対称形) が作用するとき, 円柱状空か (または円柱状介在物) となる仮想境界上の任意の選点 s に生じる応力および変位である. また r_A は端部 A を原点とする境界に沿う方向の局所座標であり, 本研究では, 未知関数である $F_{IM}, F_{nM}, F_{tI}, F_{nI}$ 等を基本密度関数 $r_A^{\lambda_1-1}, r_A^{\lambda_2-1}$ 等と重み関数 $W_n^I(r_A)$ 等で以下のように近似する.

$$\begin{aligned}
 F_{IM}(r_A) &= F_{IM}^I(r_A) + F_{IM}^{II}(r_A) = W_{IM}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{IM}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 F_{nM}(r_A) &= F_{nM}^I(r_A) + F_{nM}^{II}(r_A) = W_{nM}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{nM}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{I'}(r_A) &= F_{I'}^I(r_A) + F_{I'}^{II}(r_A) = W_{I'}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{I'}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 F_{nI}(r_A) &= F_{nI}^I(r_A) + F_{nI}^{II}(r_A) = W_{nI}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{nI}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 &\dots\dots\dots (3) \\
 W_{IM}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M a_n r_A^{n-1}, \quad W_{nM}^I(r_A) = \sum_{n=1}^M b_n r_A^{n-1} \\
 W_{IM}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M c_n r_A^{n-1}, \quad W_{nM}^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M d_n r_A^{n-1} \\
 W_{uI}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M e_n r_A^{n-1}, \quad W_{nI}^I(r_A) = \sum_{n=1}^M f_n r_A^{n-1} \\
 W_{uI}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M g_n r_A^{n-1}, \quad W_{nI}^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^M h_n r_A^{n-1} \\
 &\dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

ここで $r_A^{\lambda_1-1}$, $r_A^{\lambda_2-1}$ は円柱状空における端部 A での特異応力場を表現するための基本密度関数であり λ_1 , λ_2 は、幾何条件と材料条件より得られる特性方程式の根⁽¹⁾である。また、添字 I, II は、切欠きの二等分線に対して対称形および逆対称形の体積力を作用させることを意味する。式 (3) に含まれる基本密度関数 $r_A^{\lambda_1-1}$, $r_A^{\lambda_2-1}$ は端部先端近傍についてのみ体積力密度の分布を精度良く表現するため、また本解析では円柱状介在物 L/D が大きい場合まで含めて解析する必要があるため本解析では円柱状介在物となる境界の端部と側面をいくつかの基本区間に分けて、各基本区間について体積力密度を式(4)のような級数で表現した⁽⁵⁾。角部 A 近傍以外の境界条件を満足させる方法も、上述した方法とほぼ同様であるが、体積力の分布を対称形と逆対称形の 2 種類に分ける必要のない点異なる。以上のような離散化手法により、境界上に適当に選んだ点での境界条件より式(4)の係数 $a_n \sim h_n$ 等を決定すれば、特異積分方程式(1), (2)等の解が得られる。そして、介在物の端部に関して定義された応力拡大係数 K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} は端部先端での重み関数の値 $W_I'(0)$, $W_n'(0)$, $W_I^{II}(0)$, $W_n^{II}(0)$ から求められる。

3. 特異積分の評価方法について

本解析法では、式(1), (2)に含まれる積分の評価が必要となる。特に、境界条件を満足させる点が図 3 に示すように体積力を分布させる区間に含まれる場合にはこの特異点で被積分関数が無限大となるので特別な配慮が必要となる。従来このような場合には特異点を含む $2\varepsilon_0$ の微小区間で直接積分を実行する方法を用いてきた⁽⁷⁾。すなわちこの場合の被積分関数は基本解に集中力の輪による応力場、変位場を用いているため特異点 $x = \varepsilon$ の区間で式(5), (6)に示されるように展開、評価できた。

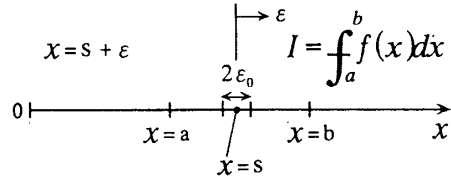


Fig.3 Evaluation of singular integral

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b f(x) dx \\
 &= \int_a^{\varepsilon-\varepsilon_0} f(x) dx + \int_{\varepsilon-\varepsilon_0}^{\varepsilon+\varepsilon_0} f(x) dx + \int_{\varepsilon+\varepsilon_0}^b f(x) dx \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 \dots\dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{\varepsilon-\varepsilon_0}^{\varepsilon+\varepsilon_0} f(x) dx = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) d\varepsilon \\
 &= \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \left(\frac{C-1}{\varepsilon} + C_0 + D_0 \ln|\varepsilon| + C_1\varepsilon + D_1\varepsilon \ln|\varepsilon| + D_1\varepsilon^2 \ln|\varepsilon| + \dots \right) d\varepsilon \\
 &= 2C_0\varepsilon_0 + 2D_0(\varepsilon_0 \ln \varepsilon_0 - \varepsilon_0) \dots\dots\dots (6)
 \end{aligned}$$

ここで C_{-1} , C_0 , D_0 等は定数である。しかしこの方法では被積分関数を展開した場合の係数 C_0 , D_0 を式(5), (6)等に表されるそれぞれの積分で求める必要があった。そこでここでは以下のような方法を提案する。

$$\begin{aligned}
 \text{いま,} \\
 I_{2\varepsilon} &= I - \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} f(\varepsilon) d\varepsilon \\
 I_{4\varepsilon} &= I - \int_{-2\varepsilon_0}^{2\varepsilon_0} f(\varepsilon) d\varepsilon \dots\dots\dots (7) \\
 I_{8\varepsilon} &= I - \int_{-4\varepsilon_0}^{4\varepsilon_0} f(\varepsilon) d\varepsilon
 \end{aligned}$$

と定義すると $I_{2\varepsilon} \sim I_{8\varepsilon}$ は特異点を含まないため数値積分で容易に求めることができる。これらの積分は求めるべき積分値 I と以下の関係がある。

$$\begin{aligned}
 I_{2\varepsilon} &= I - 2C_0\varepsilon_0 - 2D_0(\varepsilon_0 \ln \varepsilon_0 - \varepsilon_0) \\
 &= I - C' - D' \varepsilon_0 \ln(2\varepsilon_0) \dots\dots\dots (8) \\
 I_{4\varepsilon} &= I - 2C' \varepsilon_0 - D' (2\varepsilon_0) \ln(2\varepsilon_0) \\
 I_{8\varepsilon} &= I - 4C' \varepsilon_0 - D' (4\varepsilon_0) \ln(4\varepsilon_0)
 \end{aligned}$$

ここで $C' = 2(C_0 - D_0)$, $D' = 2D_0$ である。いま $I_{2\varepsilon}$, $I_{4\varepsilon}$, $I_{8\varepsilon}$ を組合せて C' , D' を消去すれば以下の式が得られる。

$$I = 4I_{2\varepsilon} - 4I_{4\varepsilon} - I_{8\varepsilon} \dots\dots\dots (9)$$

このような方法を用いれば被積分関数の展開係数を求める面倒な計算が不要となる。また ε_0 を適当に小さくとれば十分精度の高い積分値を求めることができる。

4. 解析結果および考察

図 2 に示す無限体中の円柱状介在物を有する問題において、寸法比 L/D , 介在物の剛性率 G_I/G_M を系統的に変えて繊維端の応力拡大係数 K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} の解析を行った。まず、この様な問題における本法の解析精度について検討を行う。繊維端の応力拡大係数は、

K_{I,λ_1} については $W_{iM}^I(0)$, $W_{nM}^I(0)$ より, K_{II,λ_2} については $W_{iM}^{II}(0)$, $W_{nM}^{II}(0)$ からそれぞれ求められる. t 方向と n 方向の重みより求められる K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} の値は, 数値解析の誤差を除けばそれぞれ一致する. 例として図1において $\nu_I = \nu_M = 0.3$ の条件下で, $L/D = 10^2$, $G_I/G_M = 10^2$ と, $L/D = 10^3$, $G_I/G_M = 10^{-2}$ の場合, 端部A について式(10)を用いて得られる F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} の収束条件を表1, 2に示す.

$$F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma_z^\infty \sqrt{\pi} (D/2)^{1-\lambda_1}$$

$$F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma_z^\infty \sqrt{\pi} (D/2)^{1-\lambda_2} \dots \dots \dots (10)$$

図4は $L/D = 10^2$, $G_I/G_M = 10^2$ の場合の各基本区間の長さを表わしている. なお表1, 2の例ではMは基本区間あたりの選点数であり, 総選点数は11Mである. 表1, 2の結果は良好な収束を示している. また $W_{iM}^I(0)$ と $W_{nM}^I(0)$ から求めた値はM=4程度でそれらの平均値と1%以内で一致している. また表1, 2に示す以外の形状, 剛性率でも検討した結果, 本解析法ではM=5程度で t 方向と n 方向の重みより得られた K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} の値がそれらの平均値と有効数字3桁程度まで一致し収束しており, 良好な収束性を示すことが確認された. 以下では, このようにして得られた円柱状介在物端部の応力拡大係数を, 介在物の剛性率と長さを系統的に変化させて正確に計算した. また比較のため円柱状介在物(3次元)と同様な解析手法によって長方形介在物(2次元)の結果も計算した.

表3は円柱状介在物において端部Aについて得られた縦方向一軸引張りでの F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} の値を, 表4は長方形介在物において角部Aについて得られた縦方向一軸引張りでの F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} の値を示したものであり, 図5, 図6は表3, 表4の値をグラフで表わしたものである. 図6の長方形介在物の結果は陳らの結果⁽²⁾と良く一致している. また, 図5, 6を比べると両者はよく似た傾向を表わすことがわかる. 剛性比が一定のと

き3次元の円柱状介在物は, 2次元長方形介在物に比べると縦横比 L/D の増加に対して早く一定の値をとる傾向がみられる. 長方形介在物のモデルの解析は, 3次元円柱状介在物問題に比べて解析が容易であり種々の荷重条件に対する計算や複数の介在物による影響の計算が可能である. このため, 2次元問題と比べて3次元ではどの程度の差が生じるか明らかにすることは重要と考えられる.

図7は, 同一剛性比, 縦横比を有する円柱状介在物

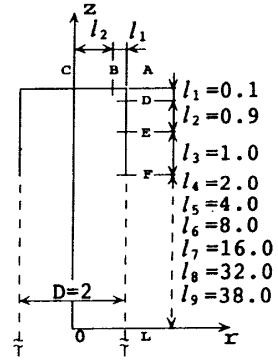


Fig.4 Boundary division for eqn(3), (4) when $L/D=10^2$

Table 1 Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner A

$(\nu_I = \nu_M = 0.3, L/D = 10^2, G_I/G_M = 10^2)$

M	$F_{I,\lambda_1} (\lambda_1 = 0.76323491)$			$F_{II,\lambda_2} (\lambda_2 = 0.62184397)$		
	from $W_n^I(0)$	from $W_t^I(0)$	Average	from $W_n^{II}(0)$	from $W_t^{II}(0)$	Average
2	2.0722	1.9516	2.0119	2.7830	2.7426	2.7628
3	2.1158	2.0741	2.0949	2.8618	2.8586	2.8602
4	2.1305	2.0940	2.1123	2.8804	2.8860	2.8832
5	2.1309	2.0946	2.1128	2.8836	2.8907	2.8872
6	2.1310	2.0946	2.1128	2.8844	2.8946	2.8895

Table 2 Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner A

$(\nu_I = \nu_M = 0.3, L/D = 10^3, G_I/G_M = 10^{-2})$

M	$F_{I,\lambda_1} (\lambda_1 = 0.55831618)$			$F_{II,\lambda_2} (\lambda_2 = 0.91168001)$		
	from $W_n^I(0)$	from $W_t^I(0)$	Average	from $W_n^{II}(0)$	from $W_t^{II}(0)$	Average
2	0.3600	0.3635	0.3618	1.5708	1.6342	1.6025
3	0.3609	0.3638	0.3624	1.6090	1.6384	1.6237
4	0.3628	0.3636	0.3632	1.6124	1.6381	1.6253
5	0.3601	0.3637	0.3619	1.6197	1.6389	1.6293
6	0.3601	0.3637	0.3619	1.6229	1.6393	1.6311

Table 3 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for cylindrical inclusion at the corner A

G_I/G_M	F_{I,λ_1}					
	10^5	10^2	10^1	2	10	10^2
$10^{0.0} = 1.0$	0.391	0.373	0.280	0.218	0.291	0.320
$10^{0.5} = 3.162$	0.382	0.366	0.278	0.249	0.437	0.659
$10^{1.0} = 10.0$	0.379	0.363	0.277	0.255	0.599	1.298
$10^{1.5} = 31.62$	0.379	0.363	0.276	0.255	0.618	1.982
$10^{2.0} = 100.0$	0.379	0.363	0.276	0.255	0.618	2.113
$10^{2.5} = 316.2$	0.379	0.363	0.276	0.255	0.618	2.099
$10^{3.0} = 1000$	0.379	0.362	0.276	0.255	0.618	2.118

G_I/G_M	F_{II,λ_2}					
	10^5	10^2	10^1	2	10	10^2
$10^{0.0} = 1.0$	1.678	1.703	1.952	3.038	0.629	0.546
$10^{0.5} = 3.162$	1.616	1.641	1.877	3.246	0.891	0.959
$10^{1.0} = 10.0$	1.604	1.627	1.862	3.302	1.087	1.816
$10^{1.5} = 31.62$	1.602	1.623	1.860	3.308	1.120	2.692
$10^{2.0} = 100.0$	1.600	1.624	1.8600	3.308	1.121	2.891
$10^{2.5} = 316.2$	1.600	1.624	1.859	3.308	1.119	2.891
$10^{3.0} = 1000$	1.600	1.631	1.860	3.308	1.119	2.892

Table 4 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for rectangular inclusion at the corner A

L/D	F_{I,λ_1}					
	10^5	10^2	10^1	2	10	10^2
$10^{0.0}=1.0$	0.505	0.476	0.327	0.192	0.213	0.224
$10^{0.5}=3.162$	0.540	0.511	0.359	0.240	0.359	0.413
$10^{1.0}=10.0$	0.513	0.489	0.351	0.258	0.495	0.673
$10^{1.5}=31.62$	0.502	0.484	0.348	0.264	0.593	1.064
$10^{2.0}=100.0$	0.498	0.484	0.347	0.265	0.635	1.544
$10^{2.5}=316.2$	0.497	0.483	0.346	0.266	0.649	1.893
$10^{3.0}=1000$	0.493	0.483	0.346	0.266	0.651	1.950

L/D	F_{II,λ_1}					
	10^5	10^2	10^1	2	10	10^2
$10^{0.0}=1.0$	2.139	2.159	2.361	2.835	0.493	0.385
$10^{0.5}=3.162$	2.044	2.060	2.233	3.072	0.707	0.646
$10^{1.0}=10.0$	1.968	1.979	2.135	3.262	0.944	1.018
$10^{1.5}=31.62$	1.938	1.944	2.099	3.338	1.137	1.619
$10^{2.0}=100.0$	1.940	1.930	2.083	3.362	1.224	2.377
$10^{2.5}=316.2$	1.924	1.931	2.084	3.369	1.248	2.933
$10^{3.0}=1000$	1.924	1.926	2.081	3.371	1.255	2.977

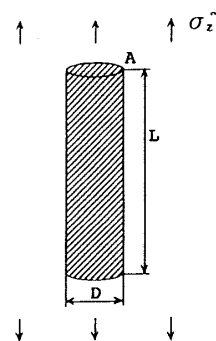
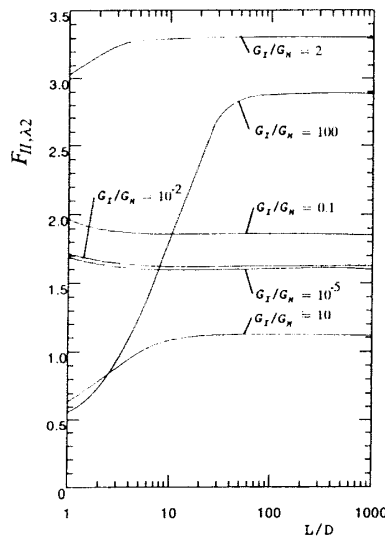
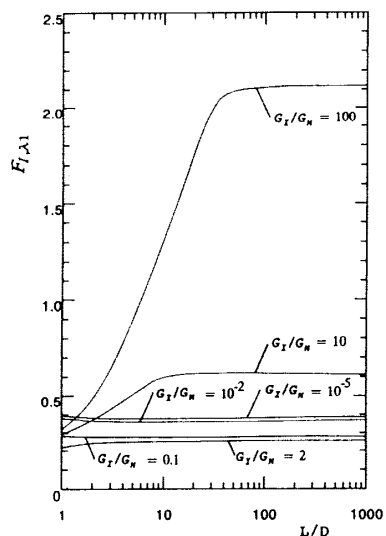


Fig.5 F_{I,λ_1} or F_{II,λ_2} at the end of a cylindrical inclusion

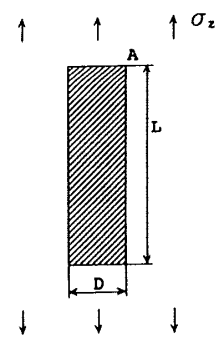
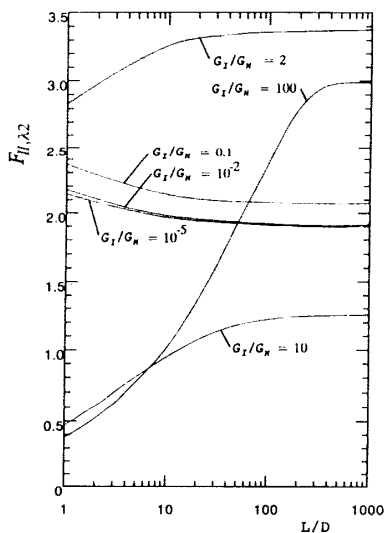
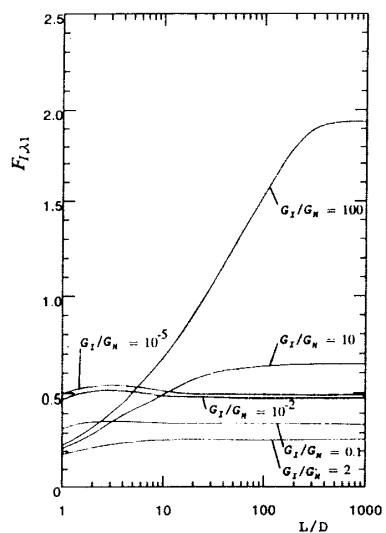


Fig.6 F_{I,λ_1} or F_{II,λ_2} at the end of a rectangular inclusion

と長方形介在物の結果の比を図示したものである。この図より $G_I/G_M < 1$ のとき円柱状介在物の結果は長方形介在物の結果より 1~2 割小さいことがわかる。また $G_I/G_M > 1$ のとき円柱状介在物は 0~4 割程度大きい結果となる場合が多いようである。しかし、 G_I/G_M

の増加に伴ってその差は増加しており、 $G_I/G_M = 10^2$ 、 $L/D = 10$ の場合最大で 9 割程度差が生じている。このような特別な場合を除けば 2 次元の結果よりある程度 3 次元の結果を予想できることがわかる。

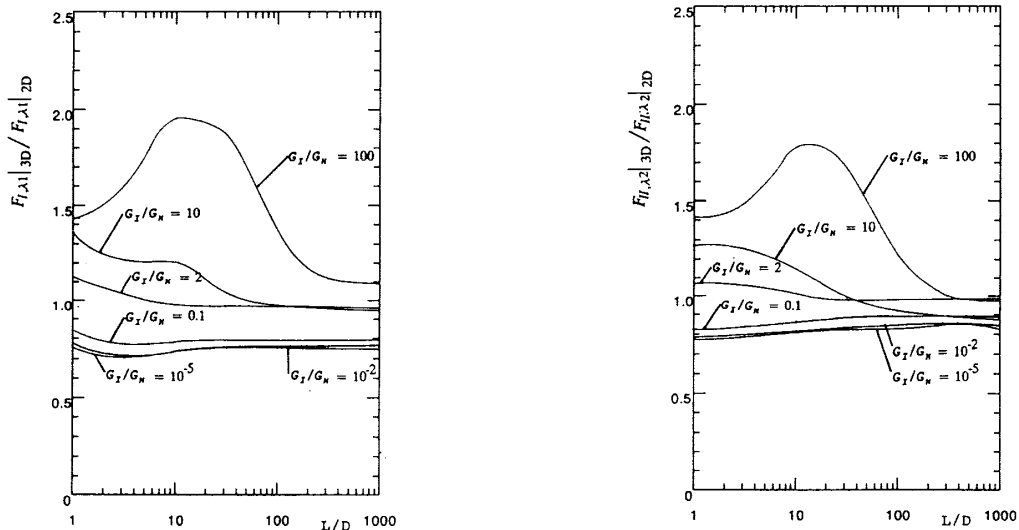


Fig.7 Comparison between cylindrical and rectangular inclusions
 ($F_{I,\lambda_1}|_{3D}/F_{I,\lambda_1}|_{2D}$ and $F_{II,\lambda_2}|_{3D}/F_{II,\lambda_2}|_{2D}$)

5. 結 言

本研究では体積力法の特異積分方程式を利用して無限体中に存在する円柱状介在物の応力拡大係数 K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} を、介在物の剛性率と距離を系統的に変化させ厳密に解析した。得られた結果を図表にまとめたほか以下のような結論が得られた。

(1) 特異積分方程式の数値解析には、未知関数である体積力密度を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法を用いた。その結果、介在物のアスペクト比、剛性比が変化しても各基本区間の選点数 $M=5$ (総選点数 $M=55$) 程度で有効数字 3 桁程度の収束した結果が得られ、解法の有効性が確認された (表 1, 2)

(2) 境界条件を満足させる点 (注目点) が体積力を分布させる区間に含まれるときの特異積分の評価方法として、注目点を含む微小区間の範囲を除く 3 種類の積分を組み合わせることによって、その値を正確に求める新しい方法を提案した。この方法を用いれば、被積分関数の展開係数を求める計算が不要となり、特異積分の評価が容易に行えることが確認された。

(3) 円柱状介在物の結果と同一の剛性比、縦横比を有する 2 次元長方形介在物の結果を比較すると $G_I/G_M < 1$ のとき円柱状介在物の結果は長方形介在物の結果よ

り 1 ~ 2 割小さく、 $G_I/G_M > 1$ のとき円柱状介在物は 0 ~ 4 割程度大きい結果となる場合が多いようである。このことから、特別な場合を除き 2 次元長方形介在物の解析結果よりある程度の 3 次元問題の予測が可能と考えられる。

本研究は、著者らの一人が九州工業大学 75 周年記念 学術奨励金の招へい研究者として滞在中に行われたものであることを記し深く謝意を表す。

文 献

- (1) 陳 玕珩・西谷弘信, 短繊維端における特異応力場の強さ解析 (第一報, 解析方法), 機論, 58-554, A(1992), 1834-1838.
- (2) 陳 玕珩・西谷弘信, 短繊維端における特異応力場の強さ解析 (第二報, 解析結果), 機論, 58-555, A(1992), 2153-2158.
- (3) 笠野英秋・松本浩之・中原一郎, 有限円柱状剛体介在物を含む無限体の引張り, 機論, 47-413, A(1981), 18-26.
- (4) 長谷川久夫・吉家幸一, 円柱状弾性介在物を有する弾性体の引張り, 機論, 60-575, A(1994), 1585-1590.
- (5) 野田尚昭・王 清・上村仁善・川島裕二, 特異積分方程式による長方形介在物の干渉効果の解析, 機論, 63-612, A(1997), 1663-1668.
- (6) 野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法 (第 3 報, 3 次元問題への応用), 機論, 59-564, A(1996), 1964-1970.
- (7) 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利, 回転円柱状空かきの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 62-596, A(1996), 1051-1058.