

特異積分方程式による長方形介在物の干渉効果の解析*

野田 尚 昭^{*1}, 王 清^{*2}
上 村 仁 誉^{*3}, 川 島 裕 二^{*4}Singular Integral Equation Method in the Analysis of
Interaction between Rectangular InclusionsNao-Aki NODA, Qing WANG,
Yoshitaka UEMURA and Yuuji KAWASHIMA

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations in interaction problems of rectangular inclusions under various loading conditions. The body force method is used to formulate the problems as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where the unknown functions are the densities of body forces distributed in infinite plates having the same elastic constants as those of the matrix and inclusions. In order to analyze the problems accurately, the unknown functions are expressed as piecewise smooth functions using two types of fundamental densities and power series, where the fundamental densities are chosen to represent the symmetric stress singularity of $1/r^{1-\lambda_1}$ and the skew-symmetric stress singularity of $1/r^{1-\lambda_2}$. Then, newly defined stress intensity factors at the end of inclusions are systematically calculated for various shapes and spacings of two rectangular inclusions in a plate subjected to longitudinal tension, transverse tension, and in-plane shear. The present method is found to be effective for accurate and efficient analysis of rectangular inclusions.

Key Words: Elasticity, Composite Material, Fracture Mechanics, Body Force Method, Stress Intensity Factor, End Effect, Interaction Effect, Singular Integral Equations, Rectangular Inclusions

1. 緒 言

著者らはこれまで体積力法の特異積分方程式の数値解析法として、未知関数である体積力密度を新しく定義された数種類の基本密度関数と多項式を用いて近似する方法を提案し、これによって例えば任意に分布するき裂やだ円形介在物の問題が効率的に精度よく解析できることを示した⁽¹⁾⁽²⁾。き裂やだ円形介在物の問題では、それらが単独に存在する場合に対応する厳密な体積力密度が引張やせん断の基本の応力場に対して知られているため、それらを基本密度関数の1つとして使用することがこれらの干渉問題の解析法として有効である。一方、介在物の形状がだ円形とは異なる場合には、それが単独に存在する場合でも厳密な体積力密度は知られていないため、だ円形の場合とは多少異なる取扱が必要となるものと考えられる。

最近、陳、西谷⁽³⁾⁽⁴⁾は、1個の長方形介在物が遠

方で一様な引張荷重を受ける問題を体積力法によって解析し、その端部の特異応力場の強さを詳細に議論している。陳らの解析では体積力密度の近似方法として基本密度関数と折れ線関数(重み関数)が用いられ、端部の特異応力場の強さを(1)端部角部の重み関数の値から求める方法と、(2)端部角部の2等分線上の応力場の強さから求める2種類の方法が検討されている。上述のことから、一般にこのような長方形介在物の問題ではき裂やだ円形介在物の問題に比べて精度の高い解析が困難であるため、有効な解析方法を検討することは重要である。そこで本研究では、図1に示すような無限板中に2個の長方形介在物が存在する場合を解析モデルとしてその解法を考察する。そして、複合材料の強度評価を力学的側面から行うために重要な、繊維端部の特異応力場の強さが他の繊維の干渉によってどのように影響するか、荷重条件と介在物の形状、距離を変化させて明らかにする。

2. 体積力法の特異積分方程式の数値解析法

* 原稿受付 1996年12月18日。

^{*1} 正員、九州工業大学工学部(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。^{*2} 山東工業大学(中国山東省済南市)。^{*3} 九州工業大学学部生。^{*4} 学生員、九州工業大学大学院。

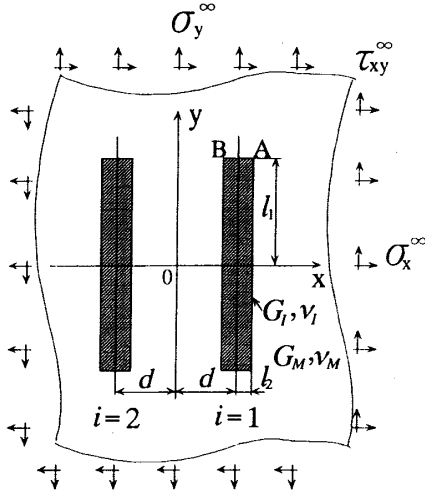


Fig.1 Two rectangular inclusions in an infinite plate

図1に示すような二個の長方形介在物を有する無限板の問題を例にとり解析方法を説明する。ここで、 l_1, l_2 は介在物寸法、 d は距離のパラメータ、 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ は無限遠での応力である。また、母材と介在物のそれぞれの横弾性定数、ポアソン比を G_M, ν_M および G_i, ν_i とする。この問題は重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、無限板中の1点に集中力が働くときの任意の点の応力場の解と変位場の解を用いて解くことができる。このとき問題は、母材と同じ弾性定数をもつ無限板 M ならびに介在物と同じ弾性定数をもつ無限板 I に分布させた体積力密度を未知関数とする特異積分方程式 (1), (2) で表現される。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}F_{nM}(s_i) - \frac{1}{2}F_{nl}(s_i) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{nn}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k \right. \\
 & + \int_{L_k} h_{nn}^{F_{iM}}(r_k, s_i) F_{iM}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{nl}}(r_k, s_i) F_{nl}(r_k) dr_k \\
 & \left. - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{il}}(r_k, s_i) F_{il}(r_k) dr_k \right] = -\sigma_{nM}^\infty(s_i) + \sigma_{nl}^\infty(s_i) \\
 & -\frac{1}{2}F_{iM}(s_i) - \frac{1}{2}F_{il}(s_i) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{nn}^{F_{iM}}(r_k, s_i) F_{iM}(r_k) dr_k \right. \\
 & + \int_{L_k} h_{nn}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{nl}}(r_k, s_i) F_{nl}(r_k) dr_k \\
 & \left. - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{il}}(r_k, s_i) F_{il}(r_k) dr_k \right] = -\tau_{nM}^\infty(s_i) + \tau_{nl}^\infty(s_i) \\
 & (i=1, 2) \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{uu}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_{uu}^{F_{iM}}(r_k, s_i) F_{iM}(r_k) dr_k \right. \\
 & \left. - \int_{L_k} h_{uu}^{F_{nl}}(r_k, s_i) F_{nl}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{uu}^{F_{il}}(r_k, s_i) F_{il}(r_k) dr_k \right] \\
 & = -u_{M,i}^\infty + u_{I,i}^\infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{vv}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_{vv}^{F_{iM}}(r_k, s_i) F_{iM}(r_k) dr_k \right. \\
 & \left. - \int_{L_k} h_{vv}^{F_{nl}}(r_k, s_i) F_{nl}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{vv}^{F_{il}}(r_k, s_i) F_{il}(r_k) dr_k \right] \\
 & = -v_{M,i}^\infty + v_{I,i}^\infty \quad (i=1, 2) \\
 & \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

ここで F_{nM}, F_{iM} ならびに $F_{nl}, F_{il} (i=1, 2)$ は無限板 M または無限板 I に分布させた法線方向および接線方向の体積力密度である。いま、図1の母材となるべき領域(長方形孔を有する無限板)の境界上の変位と表面力を $(U_M, V_M), (\sigma_{nM}, \tau_{nM})$ とし、長方形介在物となるべき領域の境界上の変位と表面力を $(U_i, V_i), (\sigma_{ni}, \tau_{ni})$ とするとき、式(1), (2)は境界条件式 $(\sigma_{nM} - \sigma_{ni} = 0, \tau_{nM} - \tau_{ni} = 0, U_M - U_i = 0, V_M - V_i = 0)$ を表す。ここで、 $\sum_{k=1}^2$ はそれぞれの長方形孔および長方形介在物となるべき仮想境界についての総和を意味する。また、 \int_{L_k} は k 番目の長方形孔(無限板 M のとき)または長方形介在物(無限板 I のとき)となる境界上において体積力を積分することを意味する。右辺の $\sigma_{nM}^\infty(s_i), \tau_{nM}^\infty(s_i)$ 等は無限板 M の i 番目の長方形孔(または無限板 I の i 番目の長方形介在物)となるべき仮想境界上に生じる遠方荷重による応力および変位である(母材と介在物の角点の位置を一致させるため無限板 I にも遠方荷重を作用させる)。また $h_{nn}^{F_{nM}}(r_k, s_i)$ 等は無限板 M の k 番目の長方形孔となるべき仮想境界上の点 r_k に法線方向または接線方向の単位強さの集中力が作用するとき、 i 番目の長方形孔となるべき仮想境界上の任意の選点 s_i に生じる応力および変位である。

式(1), (2)の離散化数値解析のため、長方形孔または長方形介在物となるべき境界をいくつかの基本区間に分けた例を図2に示す。角部A, B近傍では、一般にモードIとモードIIの2種類の変形が生じるので、仮想境界上に分布させるべき体積力 F_n と F_t に対して対称形(モードI)と逆対称形(モードII)の2種類の分布形式を採用する。図2の $B_2-B-A-A_2$ の範囲に分布させる体積力を以下に示すように基本密度関数 $(r_A^{\lambda_1-1}, r_A^{\lambda_2-1}$: 角部に対して対称および逆対称変形を表現する分布密度)と重み関数 $w_{nM}^I \sim w_{tM}^II$ 等で近似する。

以下では、 r_A を角部Aからの距離として、角部A近傍の離散化を例として説明する(角部B近傍の離散化方法も同様である)。図2の $B_2-B-A-A_2$ の範囲以外の境界条件の満たし方もほぼ同様であるが、この場合には体積力の表現に対称形と逆対称形の形式を使用しない点異なる。

ここで、 λ_1, λ_2 は、幾何条件と材料条件より得られる特性方程式の根⁽³⁾である。式(3)に含まれる基本密度関数 $r_A^{\lambda_1-1}, r_A^{\lambda_2-1}$ は角部先端近傍について体積力密度の分布を精度良く表現するための関数で、それぞれ対称形(モードI)と逆対称形(モードII)の変形を表現する。また、角部Bに分布させる体積力も同様の手法によって離散化を行う。以上のような離散化手法により、境界上に適当に選んだ点での境界条件から式(4) $a_n \sim h_n$ の係数を決定すれば、特異積分方程式(1), (2)の解が得られる。そして、介在物の角部に関して定義された応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$ は角部先端での重み関数の値 $W_n^I(0), W_n^{II}(0), W_r^I(0), W_r^{II}(0)$ から求められる。

$$\begin{aligned}
 F_{nM}(r_A) &= F_{nM}^I(r_A) + F_{nM}^{II}(r_A) \\
 &= W_{nM}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{nM}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 F_{dM}(r_A) &= F_{dM}^I(r_A) + F_{dM}^{II}(r_A) \\
 &= W_{dM}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{dM}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 F_{rd}(r_A) &= F_{rd}^I(r_A) + F_{rd}^{II}(r_A) \\
 &= W_{rd}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{rd}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 F_{rd}(r_A) &= F_{rd}^I(r_A) + F_{rd}^{II}(r_A) \\
 &= W_{rd}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{rd}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 F_{rd}(r_A) &= F_{rd}^I(r_A) + F_{rd}^{II}(r_A) \\
 &= W_{rd}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{rd}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 &\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{nM}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M a_n r_A^{n-1}, & W_{dM}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M b_n r_A^{n-1} \\
 W_{nM}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M c_n r_A^{n-1}, & W_{dM}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M d_n r_A^{n-1} \\
 W_{rd}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M e_n r_A^{n-1}, & W_{rd}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M f_n r_A^{n-1} \\
 W_{rd}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M g_n r_A^{n-1}, & W_{rd}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M h_n r_A^{n-1} \\
 &\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

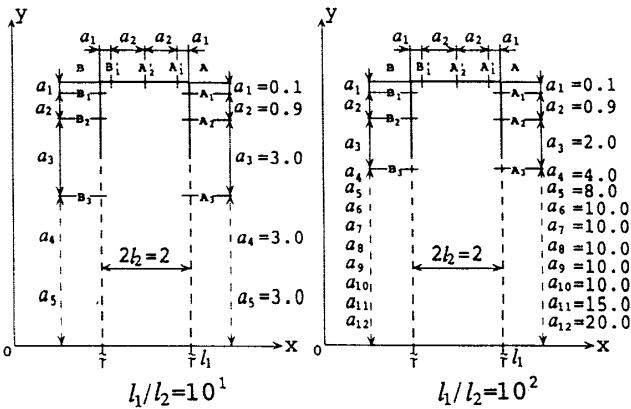


Fig.2 Boundary division for eq.(3),(4)

3. 解析結果および考察

図1に示す無限板中の2個の長方形介在物角部の干渉問題において、寸法比 l_1/l_2 , または l_2/d さらに介在物の剛性率 G_I/G_M を系統的に変えて角部の応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$ の解析を行った。以下での議論では、平面ひずみ状態を仮定し式(5), (6)の無次元値を用いた。

$$F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi l_2^{1-\lambda_1}}, F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi l_2^{1-\lambda_2}} \dots (5)$$

$$\bar{F}_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \tau^\infty \sqrt{\pi l_2^{1-\lambda_1}}, \bar{F}_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \tau^\infty \sqrt{\pi l_2^{1-\lambda_2}} \dots (6)$$

表1~3に $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ の収束の例を示す。計算に用いた境界の基本区間を図2に示す。表1~3の結果は、 $W_r^I(0), W_n^I(0)$ から求めた値がその平均値(表中Average)と比較すると約1%程度以内で一致し良好な収束性を示している。しかし、一般に $G_I/G_M > 1$ で

Table.1 Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner B. ($l_1/l_2 = 10, l_2/d = 1/3, G_I/G_M = 10^2, \sigma_y^\infty = \sigma^\infty, \sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0, \nu_I = \nu_M = 0.3$, plane strain in Fig.1)

| M | $F_{I,\lambda_1} (\lambda_1=0.76323491)$ | | | $F_{II,\lambda_2} (\lambda_2=0.62184397)$ | | |
|---|--|-----------------|---------|---|--------------------|---------|
| | from $W_r^I(0)$ | from $W_n^I(0)$ | Average | from $W_r^{II}(0)$ | from $W_n^{II}(0)$ | Average |
| 3 | 0.5379 | 0.5217 | 0.5298 | 0.7535 | 0.7534 | 0.7534 |
| 4 | 0.5357 | 0.5233 | 0.5293 | 0.7535 | 0.7535 | 0.7535 |
| 5 | 0.5338 | 0.5237 | 0.5287 | 0.7536 | 0.7536 | 0.7536 |
| 6 | 0.5329 | 0.5241 | 0.5286 | 0.7537 | 0.7537 | 0.7537 |

Table.2 Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner B. ($l_1/l_2 = 10^2, l_2/d = 2/3, G_I/G_M = 10^{-2}, \sigma_y^\infty = \sigma^\infty, \sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0, \nu_I = \nu_M = 0.3$, plane strain in Fig.1)

| M | $F_{I,\lambda_1} (\lambda_1=0.55831618)$ | | | $F_{II,\lambda_2} (\lambda_2=0.91168001)$ | | |
|---|--|-----------------|---------|---|--------------------|---------|
| | from $W_r^I(0)$ | from $W_n^I(0)$ | Average | from $W_r^{II}(0)$ | from $W_n^{II}(0)$ | Average |
| 3 | 0.3016 | 0.3016 | 0.3016 | 1.7577 | 1.7586 | 1.7581 |
| 4 | 0.3035 | 0.3035 | 0.3035 | 1.7680 | 1.7690 | 1.7683 |
| 5 | 0.3042 | 0.3042 | 0.3042 | 1.7697 | 1.7707 | 1.7702 |
| 6 | 0.3043 | 0.3043 | 0.3043 | 1.7709 | 1.7709 | 1.7709 |

Table.3 Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner B. ($l_1/l_2 = 10^2, l_2/d = 2/3, G_I/G_M = 10^2, \sigma_y^\infty = \sigma^\infty, \sigma_x^\infty = \tau_{xy}^\infty = 0, \nu_I = \nu_M = 0.3$, plane strain in Fig.1)

| M | $F_{I,\lambda_1} (\lambda_1=0.76323491)$ | | | $F_{II,\lambda_2} (\lambda_2=0.62184397)$ | | |
|---|--|-----------------|---------|---|--------------------|---------|
| | from $W_r^I(0)$ | from $W_n^I(0)$ | Average | from $W_r^{II}(0)$ | from $W_n^{II}(0)$ | Average |
| 3 | 0.7945 | 0.7575 | 0.7760 | 1.3774 | 1.3772 | 1.3773 |
| 4 | 0.8033 | 0.7740 | 0.7887 | 1.3550 | 1.3550 | 1.3550 |
| 5 | 0.8135 | 0.7881 | 0.8008 | 1.3440 | 1.3440 | 1.3440 |
| 6 | 0.8126 | 0.7909 | 0.8018 | 1.3398 | 1.3398 | 1.3398 |
| 7 | 0.8120 | 0.7916 | 0.8018 | 1.3383 | 1.3383 | 1.3383 |
| 8 | 0.8119 | 0.7916 | 0.8018 | 1.3382 | 1.3382 | 1.3382 |

l_1/l_2 が大きく、 $l_2/d \rightarrow 1$ の場合にその収束性が悪くなる。本研究では $l_1/l_2 \leq 10^2$ 、 $l_2/d \leq 2/3$ の範囲で、表 1~3 以外のすべての場合に同様の検討を行った。その結果、境界を図 2 に示す基本区間に分割し前節の解

析法を適用することによって、各基本区間の選点数 $M = 6, 8$ 程度で t 方向と n 方向の重みから得られた F_{I,λ_1} 、 F_{II,λ_2} の値が有効数字 3 桁程度まで一致し収束しており、良好な結果が得られることが確認された。以

Table.4 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for two rectangular inclusions at the corners A and B under various loading conditions (Plane strain $\nu_1 = \nu_M = 0.3$)

| (a) Longitudinal tension | | | G_I/G_M | | $F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi l_2}^{1-\lambda_1}$ | | | | | | $F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi l_2}^{1-\lambda_2}$ | | | | | |
|--------------------------|---------|--------|----------------|----------------|--|----------------|------------------|------------------|----------------|----------------|--|------------------|------------------|------------------|--|--|
| l_1/l_2 | l_2/d | | 10^5 | 10^2 | 10^{-1} | 10^1 | 10^2 | 10^3 | 10^5 | 10^2 | 10^{-1} | 10^1 | 10^2 | 10^3 | | |
| 10^0 | 0 | AB | 0.505 | 0.476 | 0.327 | 0.213 | 0.224 | 0.225 | 2.139 | 2.159 | 2.361 | ± 0.493 | ± 0.385 | ± 0.383 | | |
| | | A B | 0.525 0.555 | 0.494 0.522 | 0.335 0.355 | 0.204 0.211 | 0.212 0.220 | 0.212 0.222 | 2.139 2.124 | 2.157 2.141 | 2.350 2.332 | 0.503 -0.499 | 0.395 -0.390 | 0.393 -0.387 | | |
| | 1/3 | AB | 0.547 | 0.513 | 0.343 | 0.195 | 0.200 | 0.200 | 2.174 | 2.191 | 2.371 | 0.510 | 0.404 | 0.403 | | |
| | | A B | 0.606 0.580 | 0.571 0.543 | 0.388 0.355 | 0.213 0.185 | 0.222 0.189 | 0.224 0.190 | 2.228 2.223 | 2.241 2.244 | 2.407 2.411 | -0.481 -0.517 | -0.372 -0.411 | -0.368 -0.410 | | |
| | 1/2 | AB | 0.580 | 0.543 | 0.355 | 0.185 | 0.189 | 0.190 | 2.223 | 2.244 | 2.411 | 0.517 | 0.411 | 0.410 | | |
| | | A B | 0.639 0.606 | 0.602 0.571 | 0.410 0.388 | 0.207 0.213 | 0.212 0.224 | 0.213 0.224 | 2.418 2.228 | 2.427 2.241 | 2.572 2.407 | -0.421 -0.481 | -0.313 -0.372 | -0.309 -0.368 | | |
| 10^1 | 0 | AB | 0.513 | 0.489 | 0.351 | 0.495 | 0.673 | 0.698 | 1.968 | 1.979 | 2.135 | ± 0.944 | ± 0.018 | ± 0.058 | | |
| | | A B | 0.583 0.517 | 0.550 0.490 | 0.379 0.347 | 0.466 0.416 | 0.593 0.529 | 0.587 0.578 | 2.017 1.999 | 2.030 2.010 | 2.189 2.165 | 0.856 -0.810 | 0.903 -0.754 | 1.007 -0.668 | | |
| | 1/3 | AB | 0.621 | 0.585 | 0.398 | 0.470 | 0.593 | 0.591 | 2.054 | 2.066 | 2.216 | 0.856 | 0.912 | 1.000 | | |
| | | A B | 0.466 0.656 | 0.444 0.617 | 0.323 0.416 | 0.372 0.473 | 0.456 0.593 | 0.503 0.600 | 1.976 2.086 | 1.990 2.096 | 2.147 2.238 | -0.760 0.868 | -0.654 0.931 | -0.554 1.001 | | |
| | 1/2 | AB | 0.656 | 0.617 | 0.416 | 0.473 | 0.593 | 0.600 | 2.086 | 2.096 | 2.238 | 0.868 | 0.931 | 1.001 | | |
| | | A B | 0.398 0.656 | 0.382 0.617 | 0.290 0.416 | 0.325 0.473 | 0.386 0.593 | 0.423 0.600 | 1.930 2.086 | 1.942 2.096 | 2.117 2.238 | -0.711 0.868 | -0.562 0.931 | -0.480 1.001 | | |
| 10^2 | 0 | AB | 0.498 | 0.484 | 0.347 | 0.635 | 1.544 | 1.984 | 1.940 | 1.930 | 2.083 | ± 1.224 | ± 2.377 | ± 3.064 | | |
| | | A B | 0.605 0.375 | 0.569 0.391 | 0.382 0.315 | 0.683 1.039 | 1.455 1.255 | 1.666 1.823 | 2.003 1.823 | 1.994 1.860 | 2.130 2.073 | -1.208 -1.127 | 2.101 -1.679 | 2.605 -1.751 | | |
| | 1/3 | AB | 0.632 | 0.591 | 0.398 | 0.695 | 1.469 | 1.678 | 2.024 | 2.003 | 2.145 | 2.233 | 2.185 | 2.697 | | |
| | | A B | 0.316 0.651 | 0.349 0.614 | 0.296 0.410 | 0.491 0.702 | 0.931 1.456 | 1.138 1.706 | 1.753 2.029 | 1.812 2.004 | 2.050 2.166 | -1.086 -1.266 | -1.514 -2.267 | -1.506 2.778 | | |
| | 1/2 | AB | 0.651 | 0.614 | 0.410 | 0.702 | 1.456 | 1.706 | 2.029 | 2.004 | 2.166 | 2.267 | 2.778 | | | |
| | | A B | 0.255 0.651 | 0.304 0.614 | 0.272 0.410 | 0.434 0.702 | 0.802 1.456 | 0.993 1.706 | 1.682 2.029 | 1.771 2.004 | 2.027 2.166 | -1.033 -1.266 | -1.338 -2.267 | -1.286 2.778 | | |
| (b) Transverse tension | 0 | AB | 0.505 | 0.476 | 0.327 | 0.213 | 0.224 | 0.225 | 2.139 | 2.159 | 2.361 | ± 0.493 | ± 0.385 | ± 0.382 | | |
| | | A B | 0.496 0.433 | 0.468 0.409 | 0.324 0.288 | 0.224 0.211 | 0.237 0.222 | 0.239 0.223 | 2.025 1.885 | 2.046 1.912 | 2.265 2.161 | -0.512 0.514 | -0.404 0.403 | -0.402 0.401 | | |
| | 1/3 | AB | 0.495 | 0.468 | 0.326 | 0.238 | 0.254 | 0.256 | 1.987 | 2.009 | 2.226 | -0.529 | -0.421 | -0.421 | | |
| | | A B | 0.324 0.494 | 0.308 0.467 | 0.226 0.328 | 0.198 0.253 | 0.207 0.273 | 0.208 0.276 | 1.734 1.986 | 1.765 2.006 | 2.045 2.047 | 0.518 -0.547 | 0.405 -0.441 | 0.401 -0.441 | | |
| | 1/2 | AB | 0.494 | 0.467 | 0.328 | 0.273 | 0.276 | 0.276 | 1.986 | 2.006 | 2.226 | -0.529 | -0.421 | -0.421 | | |
| | | A B | 0.212 2.152 | 0.203 1.744 | 0.159 0.629 | 0.179 0.101 | 0.188 0.046 | 0.189 0.037 | 1.702 3.641 | 1.736 3.505 | 2.036 2.856 | 0.485 0.693 | 0.371 0.672 | 0.365 0.689 | | |
| 10^1 | 0 | AB | 2.152 | 1.744 | 0.629 | 0.101 | 0.046 | 0.037 | 3.641 | 3.505 | 2.856 | ± 0.693 | ± 0.672 | ± 0.689 | | |
| | | A B | 2.032 0.771 | 1.734 0.698 | 0.698 0.393 | 0.129 0.113 | 0.099 0.079 | 0.109 0.052 | 3.054 3.491 | 2.975 3.348 | 2.758 2.886 | -0.661 0.642 | -0.637 0.560 | -0.689 0.502 | | |
| | 1/3 | AB | 2.025 | 1.734 | 0.709 | 0.134 | 0.109 | 0.117 | 3.122 | 3.042 | 2.807 | -0.666 | -0.652 | -0.706 | | |
| | | A B | 0.567 2.017 | 0.532 1.733 | 0.344 0.714 | 0.117 0.141 | 0.093 0.119 | 0.065 0.123 | 3.540 3.195 | 3.390 3.111 | 3.207 2.848 | 0.617 -0.678 | 0.506 -0.671 | 0.436 -0.715 | | |
| | 1/2 | AB | 2.017 | 1.733 | 0.714 | 0.141 | 0.119 | 0.123 | 3.195 | 3.111 | 2.848 | -0.678 | -0.671 | -0.715 | | |
| | | A B | 0.414 7.484 | 0.410 3.168 | 0.305 0.692 | 0.120 0.037 | 0.102 -0.333 | 0.078 -0.515 | 3.520 7.820 | 3.354 4.733 | 3.254 2.904 | 3.354 0.814 | 3.586 1.255 | 4.415 1.547 | | |
| 10^2 | 0 | AB | 7.484 | 3.168 | 0.692 | 0.037 | -0.333 | -0.515 | 7.820 | 4.733 | 2.904 | ± 0.814 | ± 1.255 | ± 1.547 | | |
| | | A B | 7.055 1.972 | 3.741 1.449 | 0.814 0.502 | 0.031 0.058 | -0.274 -0.143 | -0.356 -0.238 | 5.837 8.763 | 4.304 5.502 | 2.960 3.027 | -0.812 0.777 | -1.148 0.953 | -1.374 0.969 | | |
| | 1/3 | AB | 7.059 | 3.790 | 0.837 | 0.033 | -0.270 | -0.352 | 6.061 | 4.522 | 3.014 | -0.827 | -1.195 | -1.426 | | |
| | | A B | 1.638 7.063 | 1.252 3.818 | 0.452 0.409 | 0.063 0.069 | -0.113 -0.078 | -0.207 -0.238 | 8.866 8.748 | 5.485 5.363 | 3.013 2.944 | 0.755 0.724 | 0.871 0.780 | 0.846 0.812 | | |
| | 1/2 | AB | 7.063 | 3.818 | 0.845 | 0.038 | -0.124 | -0.356 | 6.397 | 4.634 | 3.122 | -0.849 | -1.243 | -1.374 | | |
| | | A B | 1.306 7.063 | 1.067 3.818 | 0.409 0.409 | 0.069 0.069 | -0.078 -0.078 | -0.238 -0.238 | 8.748 8.748 | 5.363 5.363 | 2.944 2.944 | 0.724 0.724 | 0.780 0.780 | 0.812 0.812 | | |
| (c) In-plane shear | 0 | AB | 1.576 | 1.494 | 1.062 | 0.687 | 0.743 | 0.751 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | |
| | | A B | 1.696 1.705 | 1.602 1.611 | 1.115 1.118 | 0.674 0.657 | 0.731 0.705 | 0.740 0.713 | 0.143 0.390 | 0.138 0.376 | 0.106 0.287 | 0.015 0.025 | 0.015 0.022 | 0.015 0.022 | | |
| | 1/3 | AB | 1.804 | 1.699 | 1.161 | 0.676 | 0.731 | 0.740 | 0.344 | 0.332 | 0.253 | 0.039 | 0.040 | 0.042 | | |
| | | A B | 1.726 1.895 | 1.626 1.782 | 1.111 1.201 | 0.630 0.682 | 0.700 0.739 | 0.677 0.747 | 1.288 0.550 | 1.234 0.531 | 0.929 0.411 | 0.070 0.070 | 0.061 0.070 | 0.061 0.076 | | |
| | 1/2 | AB | 1.895 | 1.782 | 1.201 | 0.682 | 0.739 | 0.747 | 0.550 | 0.531 | 0.411 | 0.070 | 0.070 | 0.076 | | |
| | | A B | 1.436 3.923 | 1.358 3.547 | 0.955 1.894 | 0.604 0.743 | 0.636 0.809 | 0.645 0.819 | 2.340 2.514 | 2.242 2.494 | 1.639 1.520 | 0.112 0.262 | 0.099 0.372 | 0.124 0.424 | | |
| 10^1 | 0 | AB | 3.923 | 3.547 | 1.894 | 0.743 | 0.809 | 0.819 | 2.514 | 2.494 | 1.520 | 0.262 | 0.372 | 0.424 | | |
| | | A B | 4.409 1.587 | 3.900 1.782 | 1.989 1.445 | 0.787 0.704 | 0.866 0.770 | 0.875 0.790 | 1.241 3.228 | 1.312 2.959 | 1.138 1.815 | 0.247 0.252 | 0.347 0.352 | 0.378 0.397 | | |
| | 1/3 | AB | 4.280 | 3.813 | 2.020 | 0.813 | 0.900 | 0.908 | 1.313 | 1.397 | 1.151 | 0.257 | 0.359 | 0.385 | | |
| | | A B | 0.731 4.196 | 1.354 3.783 | 1.281 2.052 | 0.659 0.834 | 0.721 0.931 | 0.745 0.944 | 2.062 1.454 | 2.444 1.469 | 1.783 1.138 | 0.222 0.270 | 0.315 0.378 | 0.353 0.415 | | |
| | 1/2 | AB | 4.196 | 3.783 | 2.052 | 0.834 | 0.931 | 0.944 | 1.454 | 1.469 | 1.138 | 0.270 | 0.378 | 0.415 | | |
| | | A B | 0.303 11.18 | 1.090 7.556 | 1.115 2.303 | 0.596 0.731 | 0.651 0.793 | 0.679 0.793 | 1.141 8.654 | 2.263 6.215 | 1.815 2.051 | 0.183 0.258 | 0.261 0.370 | 0.311 0.456 | | |
| 10^2 | 0 | AB | 11.18 | 7.556 | 2.303 | 0.731 | 0.793 | 0.793 | 8.654 | 6.215 | 2.051 | 0.258 | 0.370 | 0.456 | | |
| | | A B | 11.00 0.564 | 8.100 3.451 | 2.574 1.833 | 0.776 0.664 | 0.867 0.687 | 0.874 0.680 | 4.065 3.673 | 4.434 5.163 | 1.951 2.138 | -0.273 0.213 | 0.414 0.271 | 0.508 1.024 | | |
| | 1/3 | AB | 10.97 | 8.242 | 2.664 | 0.794 | 0.888 | 0.899 | 4.131 | 4.745 | 2.036 | 0.279 | 0.428 | 0.535 | | |
| | | A B | 0.487 10.88 | 2.848 8.349 | 1.658 2.741 | 0.620 0.809 | 0.630 0.906 | 0.630 0.549 | 2.783 4.602 | 4.758 4.643 | 2.202 2.320 | 0.189 0.180 | 0.231 0.186 | 0.274 0.220 | | |
| | 1/2 | AB | 10.88 | 8.349 | 2.741 | 0.809 | 0.906 | 0.914 | 4.602 | 4.670 | 1.974 | 0.286 | 0.440 | 0.555 | | |
| | | A B | 0.191 10.88 | 2.318 8.349 | 1.463 2.741 | 0.562 0.809 | 0.561 0.906 | 0.549 0.914 | 1.698 4.602 | 4.643 4.670 | 2.320 1.974 | 0.180 0.286 | 0.186 0.440 | 0.220 0.555 | | |

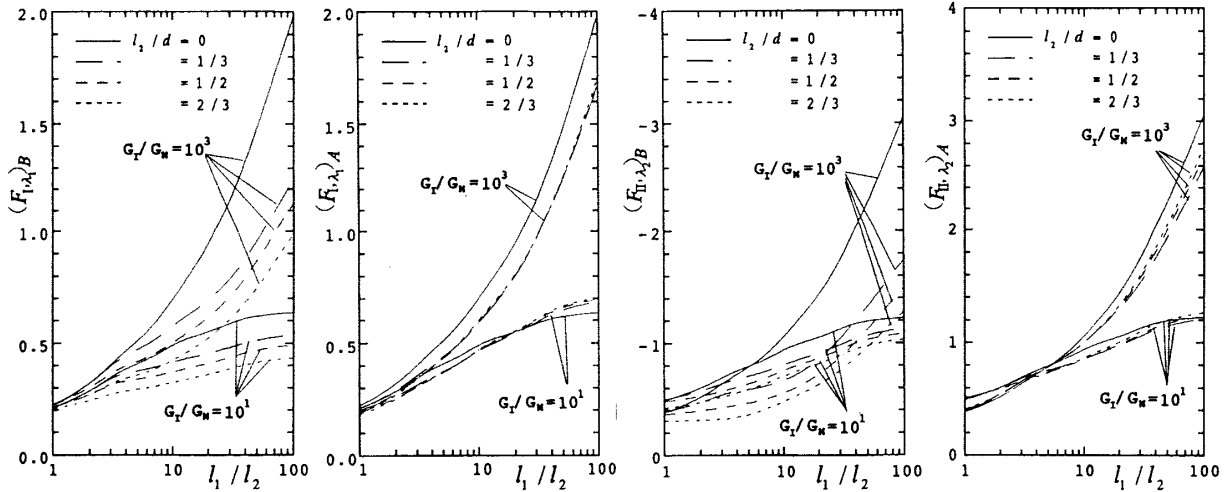


Fig.3 F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} vs. l_1/l_2 relations for two rectangular inclusions at the corners A and B in Fig.1 ($\sigma_y^\infty = \sigma_x^\infty$, $\sigma_x^\infty = 0$, $\tau_{xy}^\infty = 0$ Plane strain $\nu_I = \nu_M = 0.3$)

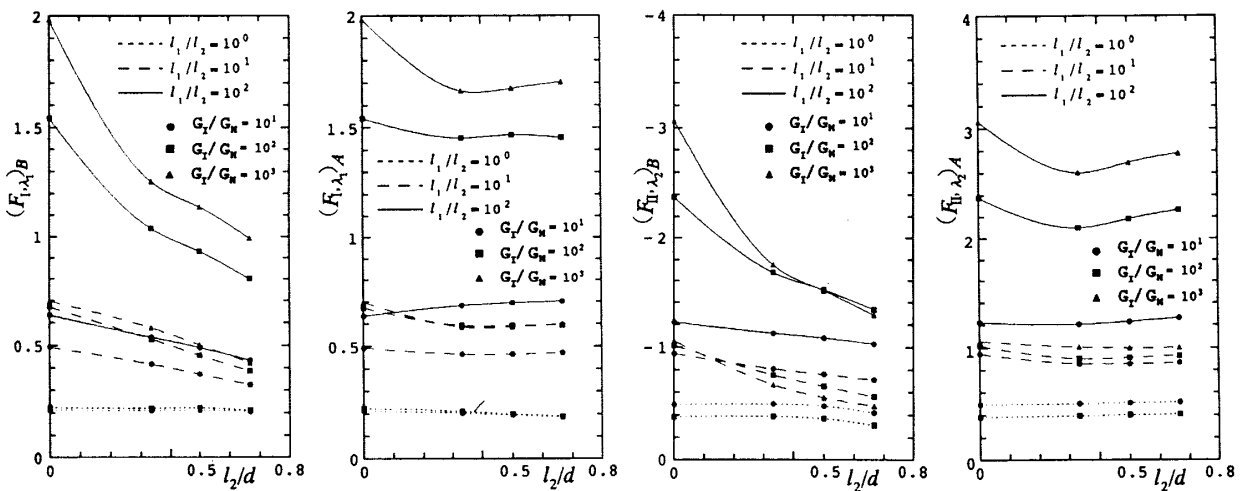


Fig.4 F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} vs. l_2/d relations for two rectangular inclusions at the corners A and B in Fig.1 ($\sigma_y^\infty = \sigma_x^\infty$, $\sigma_x^\infty = 0$, $\tau_{xy}^\infty = 0$ Plane strain $\nu_I = \nu_M = 0.3$)

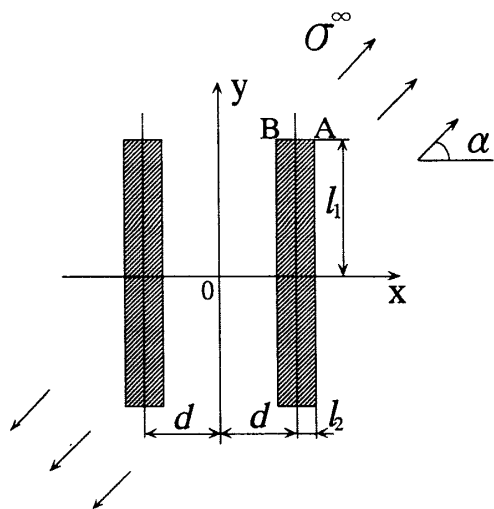


Fig.5 Two rectangular inclusions in a plate subjected to uniaxial tension in α direction

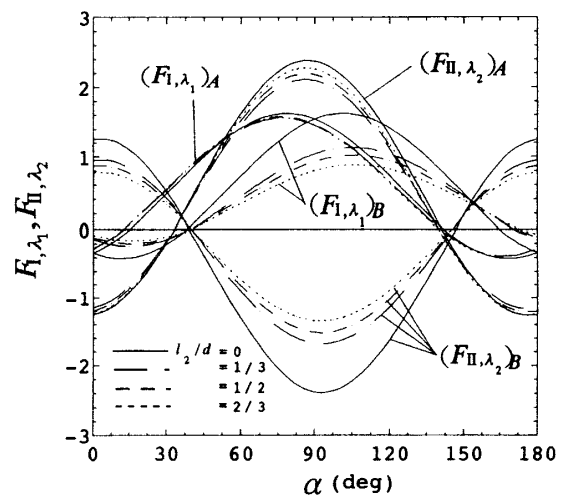


Fig.6 F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} vs. α relations at the corners A and B in Fig.5 ($l_1/l_2 = 10^2$, $G_I/G_M = 10^2$, Plane strain $\nu_I = \nu_M = 0.3$)

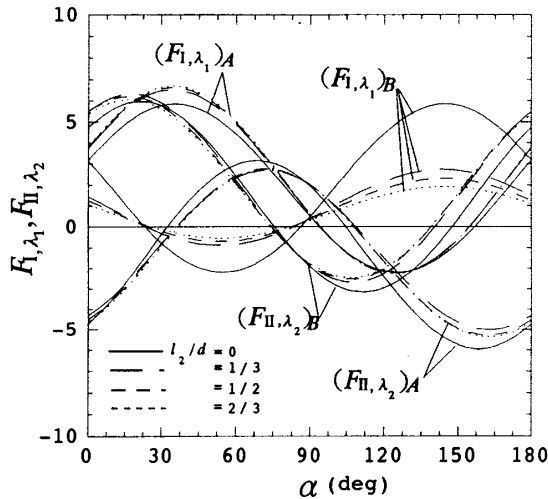


Fig.7 $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ vs. α relations at the corners A and B in Fig.5 ($l_1/l_2=10^2, G_I/G_M=10^{-2}$, Plane strain $\nu_I = \nu_M = 0.3$)

下では、この様にして求めた応力拡大係数を長方形介在物の剛性比と距離を系統的に変化させて示す。

表4にy方向引張、x方向引張、せん断の各荷重下での介在物端部AおよびB(Aは外側、Bは内側)の応力拡大係数の値をまとめて示す。また、図3は、y方向引張での端部AとBの応力拡大係数の値と l_1/l_2 の関係を示す。また、図4では横軸に l_2/d をとって図示したものである。これらの図表から、荷重条件にかかわらず $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ のいずれの応力拡大係数も、干渉効果が大きく表われているのは角部B(内側)で、角部A(外側)ではその効果は小さいことがわかる。たとえば、剛性比 $G_I/G_M=10^3, l_1/l_2=10^2$ でy軸引張の場合、角部Bでの応力拡大係数は、 $l_2/d=0$ のときに比べ、 $l_2/d=2/3$ では5割程度小さくなるが、角部A(介在物の外側)では変化は15%以下である。

一軸引張荷重の引張角度 α を 0° (x方向)から 180° (-x方向)まで変化させた場合(図5)の結果を図6、7に示す。これらの図から、 $G_I/G_M > 1$ のときは $\alpha=90^\circ$ (y方向)付近で干渉効果が最も大きく表われている。 $G_I/G_M < 1$ のときは介在物間距離が $l_2/d=1/3 \sim 2/3$ と変化してもその干渉効果への影響は小さいが、介在物が単独に存在する場合($l_2/d=0$)と介在物が2個存在する場合($l_2/d=1/3 \sim 2/3$)の違いは大きい。

4. 結 言

本研究では、図1に示すような2個の長方形介在物の応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$ の干渉効果を介在物の剛性比、距離、長さを変化させ解析し、得られた結果を図表にまとめたほか以下のような知見が得られた。

(1) 体積力法の特異積分方程式の数値解析として、境界をいくつかの基本区間に分割し、それぞれの基本区間で体積力密度(未知関数)を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法を検討した。その結果、解析した範囲で各基本区間の選点数 $M=6, 8$ 程度で、有効数字3桁程度収束した結果が得られ、解法の実効性が確認された(表1~3)。

(2) 荷重条件にかかわらず $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ のいずれの応力拡大係数もその干渉効果が大きく表われているのは角部B(介在物の内側)で、角部A(介在物の外側)ではその効果は小さい。たとえば、剛性比 $G_I/G_M=10^3, l_1/l_2=10^2$ でy軸引張の場合、角部Bでの応力拡大係数は、 $l_2/d=0$ のときに比べ、 $l_2/d=2/3$ では5割程度小さくなるが、角部A(介在物の外側)では変化は15%以下である。

(3) 一軸引張荷重の角度 α を 0° (x方向)から 180° (-x方向)まで変化させた場合(図5)、 $G_I/G_M > 1$ のときは $\alpha=90^\circ$ (y方向)付近で干渉効果が最も大きく表われる。 $G_I/G_M < 1$ のときは介在物間距離が $l_2/d=1/3 \sim 2/3$ と変化してもその干渉効果の違いは小さい。しかし介在物が単独に存在する場合($l_2/d=0$)と介在物が2個存在する場合($l_2/d=1/3 \sim 2/3$)の違いは大きい。

本研究は、著者らの一人が九州工業大学75周年記念学術奨励金の招へい研究者として滞在中に行われたものであることを記し深く謝意を表す。

文 献

- (1) Noda, N. and Matsuo, T., Singular Integral Equation Method in the Analysis of Interaction between Cracks and Defects, Fracture Mechanics; 25th Volume. ASTM STP 1220, F.Erdogan, Ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1995. 591-606.
- (2) 野田尚昭・福田賢新, 松尾忠利, 任意分布円形介在物の干渉効果の解析法, 材料, 45-12, (1996), 78-83.
- (3) 陳 飛 斯・西谷弘信, 短繊維端における特異応力場の強さ解析(第一報, 解析方法), 機論, 58-554, A(1992), 1834-1838.
- (4) 陳 飛 斯・西谷弘信, 短繊維端における特異応力場の強さ解析(第二報, 解析結果), 機論, 58-555, A(1992), 2153-2158.