

面外せん断問題における任意分布だ円形介在物の干渉効果の解析*

野田尚昭*¹, 有田卓司*², 松尾忠利*³Analysis of Interaction between Arbitrarily Distributed Elliptical Inclusions
under Longitudinal Shear Loading

Nao-Aki NODA, Takuji ARITA and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with an interaction problem of arbitrarily distributed elliptical inclusions under longitudinal shear loading. The problem is formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where unknown functions are the densities of body forces distributed in the longitudinal directions of infinite bodies having the same elastic constants as those of the matrix and the inclusions. In order to satisfy the boundary conditions along the inclusions, four kinds of new fundamental density functions are applied. Then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. The calculations are carried out for several arrangement of the inclusions, and it is found that the present method yields rapidly converging numerical results for arbitrarily distributed elliptical inclusions.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Body Force Method, Interaction, Inclusion, Numerical Analysis, Singular Integral Equation

1. 緒言

だ円形介在物の問題は、その特別な場合として、円形介在物や線状介在物を含むため、種々の欠陥の強度への影響を考察するうえで重要である。このため多くの研究者によって取り扱われているが、任意に分布するだ円形介在物を有する無限体が面外せん断を受ける場合の解析例は見当たらない。そこで、本研究では、さきに著者らが提案した面外せん断問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法⁽¹⁾を応用し、この問題を取り扱う。そして、だ円形介在物の個数や位置等を変化させてその応力集中を考察する。本解析法によれば、境界上のなめらかな応力分布を容易に求めることができるので、このような問題に対してたいへん有効である。

2. 解析方法

2.1 体積力法の特異積分方程式 本解析法を図1に示すような、無限遠で $\tau_{xz}^{\infty}, \tau_{yz}^{\infty}$ を受ける無限体中のm個のだ円形介在物の干渉問題を例にとって説明する。この問題は重ね合せの原理に基づく体積力法の考え方により、無限体中の1点 (ξ_k, η_k) に集中力が作用するときの任意の点 (x_i, y_i) の応力場と変位場の解を用いて解くことができる。このとき問題は母材 (G_M) および介在物 (G_I) と同じ弾性定数をもつ無限体(無限体Mと無限体I)中の仮想境界上に分布させたz方向の体積力密度 ρ_{zM}^k, ρ_{zI}^k ($k=1, \dots, m$)を未知関数とする特異積分方程式(1),(2)で表現される。ここで、 ϕ_k は着力点を表わす角度 $(\xi_k = a_k \cos \phi_k, \eta_k = b_k \sin \phi_k)$ で注目点を表わす角度 θ_i ($x_i = a_i \cos \theta_i, y_i = b_i \sin \theta_i$)と区別して用いる。

$$\begin{aligned} & -(1/2)\rho_{zM}^i(\theta_i) - (1/2)\rho_{zI}^i(\theta_i) \\ & + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nzM}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \rho_{zM}^k(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nzI}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \rho_{zI}^k(\phi_k) ds \\ & = -\tau_{nzM}^{\infty} + \tau_{nzI}^{\infty} \end{aligned}$$

* 原稿受付 1997年2月17日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部 (☎804-8550 北九州市戸畑区佃水町1-1)。*² 九州工業大学学部生。*³ 正員, 福島工業高等専門学校 (☎970-8034 いわき市平上荒川字長尾30)。

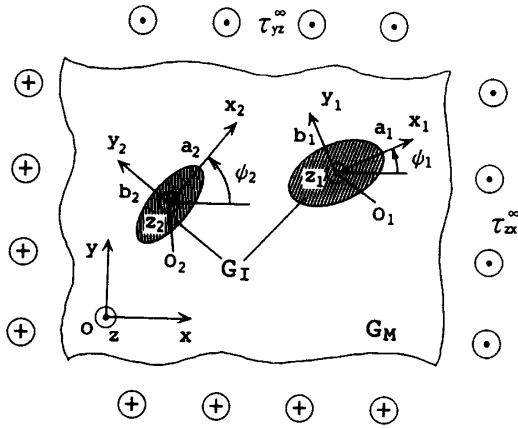


Fig.1 Arbitrarily distributed elliptical inclusions

$$\begin{aligned}
 &[-(\tau_{xz}^{\infty} \cos \theta'_{i0} + \tau_{yz}^{\infty} \sin \theta'_{i0}) + (\tau_{xz}^{\infty} \cos \theta_{i0} + \tau_{yz}^{\infty} \sin \theta_{i0})] \\
 & \quad i=1-m, \quad 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \quad \dots\dots\dots(1) \\
 & \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{wM}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) ds - \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{wI}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \rho_{z1}^{k*}(\phi_k) ds \\
 & = -w_M^{\infty} + w_I^{\infty} \\
 & \quad i=1-m, \quad 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \quad \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

無限体Mのだ円孔となる仮想境界に生じる応力と変位を τ_{nzM}, w_M とし、無限体Iのだ円形介在物となる仮想境界に生じる応力と変位を τ_{nzI}, w_I とすると、式(1), (2)は母材とi番目の介在物の接合境界面上における境界条件 $\tau_{nzM} - \tau_{nzI} = 0, w_M - w_I = 0$ に相当している。式(1)で、 $\theta'_{i0} = \theta_{i0} + \psi_i$ で、 θ_{i0} はi番目の介在物境界上の点 (x_i, y_i) におけるだ円の外向き法線と x_i 軸のなす角度、 ψ_i は x_i 軸と x 軸のなす角度である。また、 $K_{nzM}^{F_i}(\phi_k, \theta_i)$ を例にとると、これは、孔のない無限体Mのk番目のだ円となる仮想境界上の一点に単位大きさ集中力(z方向)が作用するときのi番目のだ円となる境界上の点に生じる応力 τ_{nz} を意味する。 $K_{wM}^{F_i}(\phi_k, \theta_i)$ 等の計算では、介在物の外部領域のある点[参考点(本解析では原点)]に対する相対変位を用いた。i=kのとき、式(1)はコーシー形、式(2)は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため $\theta_i = \phi_k$ の場合には、式(1)は積分のコーシーの主値をとるものとする。特異積分方程式(1),(2)の未知関数である $\rho_{z2M}^{k*}, \rho_{z1}^{k*}$ は次式で定義される。

$$\rho_{z2M}^{k*} = \frac{dF_{z2M}^{k*}}{ds}, \quad \rho_{z1}^{k*} = \frac{dF_{z1}^{k*}}{ds} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで dF_{z2M}^{k*} を例にとると、これは、母材のだ円形仮想境界の微小長さ $ds = \sqrt{(dx_k)^2 + (dy_k)^2}$ に作用する体積力のz方向合力である。

2.2 面外せん断問題の基本密度関数 以下では $\rho_{z2M}^{k*}(\phi_k)$ を例として説明するが、 $\rho_{z1}^{k*}(\phi_k)$ について

も同様な議論が成り立つ。いま、式(4)で定義される関数を考えるとこれらの関数 $\rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) \sim \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k)$ は、それぞれ式(5.a)~(5.d)の関係を満たす。

$$\begin{aligned}
 \rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) &= \left\{ \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z2M}^{k*}(\pi - \phi_k) \right. \\
 & \quad \left. + \rho_{z2M}^{k*}(\pi + \phi_k) + \rho_{z2M}^{k*}(-\phi_k) \right\} / 4 \\
 \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) &= \left\{ \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z2M}^{k*}(\pi - \phi_k) \right. \\
 & \quad \left. - \rho_{z2M}^{k*}(\pi + \phi_k) - \rho_{z2M}^{k*}(-\phi_k) \right\} / 4 \\
 \rho_{z3M}^{k*}(\phi_k) &= \left\{ \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z2M}^{k*}(\pi - \phi_k) \right. \\
 & \quad \left. - \rho_{z2M}^{k*}(\pi + \phi_k) + \rho_{z2M}^{k*}(-\phi_k) \right\} / 4 \\
 \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k) &= \left\{ \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z2M}^{k*}(\pi - \phi_k) \right. \\
 & \quad \left. + \rho_{z2M}^{k*}(\pi + \phi_k) - \rho_{z2M}^{k*}(-\phi_k) \right\} / 4 \\
 & \quad \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

$$\rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) = \rho_{z1M}^{k*}(\pi - \phi_k) = \rho_{z1M}^{k*}(\pi + \phi_k) = \rho_{z1M}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots\dots\dots(5.a)$$

$$\rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) = \rho_{z2M}^{k*}(\pi - \phi_k) = -\rho_{z2M}^{k*}(\pi + \phi_k) = -\rho_{z2M}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots\dots\dots(5.b)$$

$$\rho_{z3M}^{k*}(\phi_k) = -\rho_{z3M}^{k*}(\pi - \phi_k) = -\rho_{z3M}^{k*}(\pi + \phi_k) = \rho_{z3M}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots\dots\dots(5.c)$$

$$\rho_{z4M}^{k*}(\phi_k) = -\rho_{z4M}^{k*}(\pi - \phi_k) = \rho_{z4M}^{k*}(\pi + \phi_k) = -\rho_{z4M}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots\dots\dots(5.d)$$

式(5)より、関数 $\rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) \sim \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k)$ を $0 \leq \phi_k \leq \pi/2$ の範囲で求めることは、関数 $\rho_{z2M}^{k*}(\phi_k)$ を $0 \leq \phi_k \leq 2\pi$ の全範囲で求めることに等しい。すなわち、 $0 \leq \phi_k \leq \pi/2$ で $\rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) \sim \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k)$ が与えられるとき、式(6)に示されるように、 $0 \leq \phi_k \leq 2\pi$ での $\rho_{z2M}^{k*}(\phi_k)$ が与えられる。

$$\rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) = \rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z3M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(6.a)$$

$$\rho_{z2M}^{k*}(\pi - \phi_k) = \rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z3M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(6.b)$$

$$\rho_{z2M}^{k*}(\pi + \phi_k) = \rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z3M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(6.c)$$

$$\rho_{z2M}^{k*}(-\phi_k) = \rho_{z1M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z2M}^{k*}(\phi_k) + \rho_{z3M}^{k*}(\phi_k) - \rho_{z4M}^{k*}(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(6.d)$$

いま、面外せん断問題の基本密度関数 $w_{z1}(\phi_k) \sim w_{z4}(\phi_k)$ を式(7.a)~(7.d)で定義すると、式(7.a)~(7.d)はそれぞれ(5.a)~(5.d)を満足する。

$$w_{z1}(\phi_k) = n_z(\phi_k) / \cos \phi_k \quad \dots\dots\dots(7.a)$$

$$w_{z2}(\phi_k) = n_z(\phi_k) \tan \phi_k \quad \dots\dots\dots(7.b)$$

$$w_{z3}(\phi_k) = n_z(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(7.c)$$

$$w_{z4}(\phi_k) = n_z(\phi_k) \sin \phi_k \quad \dots\dots\dots(7.d)$$

ここで、 n_z は、仮想境界上の点 (x_k, y_k) における単位外向き法線ベクトルの x_k 座標成分 $\cos \theta_{k0}$ であり、次式

で表わされる。

$$n_z(\phi_k) = \frac{b_k \cos \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} = \cos \theta_{k0} \quad \dots(8)$$

このような、関数を用いて $\rho_{z1M}^k(\phi_k) \sim \rho_{z4M}^k(\phi_k)$ を式(9)のように表現すると、基本密度に乗ずる重み関数 $\rho_{z1M}^k(\phi_k) \sim \rho_{z4M}^k(\phi_k)$ (未知関数) が満足すべき条件は式(10)で表される。

$$\begin{aligned} \rho_{z1M}^k(\phi_k) &= \rho_{z1M}^k(\phi_k)w_{z1}(\phi_k), \rho_{z2M}^k(\phi_k) = \rho_{z2M}^k(\phi_k)w_{z2}(\phi_k) \\ \rho_{z3M}^k(\phi_k) &= \rho_{z3M}^k(\phi_k)w_{z3}(\phi_k), \rho_{z4M}^k(\phi_k) = \rho_{z4M}^k(\phi_k)w_{z4}(\phi_k) \end{aligned} \quad \dots(9)$$

$$f(\phi_k) = f(\pi - \phi_k) = f(\pi + \phi_k) = f(-\phi_k) \quad \dots(10)$$

結局、 $\rho_{zM}^k(\phi_k)$ は $\rho_{z1M}^k(\phi_k) \sim \rho_{z4M}^k(\phi_k)$ と $w_{z1}(\phi_k) \sim w_{z4}(\phi_k)$ を用いて次のように表される。

$$\begin{aligned} \rho_{zM}^k(\phi_k) &= \rho_{z1M}^k w_{z1}(\phi_k) + \rho_{z2M}^k w_{z2}(\phi_k) \\ &+ \rho_{z3M}^k w_{z3}(\phi_k) + \rho_{z4M}^k w_{z4}(\phi_k) \quad \dots(11) \end{aligned}$$

$\rho_{zI}^k(\phi_k)$ についても式(4)と同様に定義される関数 $\rho_{z1I}^k(\phi_k) \sim \rho_{z4I}^k(\phi_k)$ を用いて以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} \rho_{zI}^k(\phi_k) &= \rho_{z1I}^k w_{z1}(\phi_k) + \rho_{z2I}^k w_{z2}(\phi_k) \\ &+ \rho_{z3I}^k w_{z3}(\phi_k) + \rho_{z4I}^k w_{z4}(\phi_k) \quad \dots(12) \end{aligned}$$

2. 3 特異積分方程式の離散化数値解析法

式(11),(12)の表現を用いると式(1),(2)の特異積分方程式は次式のように表現できる。

$$\begin{aligned} &-(1/2) \left\{ \rho_{z1M}^i(\theta_i) / \cos \theta_i + \rho_{z2M}^i(\theta_i) \tan \theta_i + \rho_{z3M}^i(\theta_i) \right. \\ &\quad \left. + \rho_{z4M}^i(\theta_i) \sin \theta_i \right\} \cos \theta_{i0} \\ &-(1/2) \left\{ \rho_{z1I}^i(\theta_i) / \cos \theta_i + \rho_{z2I}^i(\theta_i) \tan \theta_i + \rho_{z3I}^i(\theta_i) \right. \\ &\quad \left. + \rho_{z4I}^i(\theta_i) \sin \theta_i \right\} \cos \theta_{i0} \\ &+ \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nzM}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \left\{ \rho_{z1M}^k(\phi_k) / \cos \phi_k + \rho_{z2M}^k(\phi_k) \tan \phi_k \right. \\ &\quad \left. + \rho_{z3M}^k(\phi_k) + \rho_{z4M}^k(\phi_k) \sin \phi_k \right\} b_k \cos \phi_k d\phi_k \\ &- \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{nzI}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \left\{ \rho_{z1I}^k(\phi_k) / \cos \phi_k + \rho_{z2I}^k(\phi_k) \tan \phi_k \right. \\ &\quad \left. + \rho_{z3I}^k(\phi_k) + \rho_{z4I}^k(\phi_k) \sin \phi_k \right\} b_k \cos \phi_k d\phi_k \\ &= -\tau_{nzM}^\infty + \tau_{nzI}^\infty \quad \dots(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{wM}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \left\{ \rho_{z1M}^k(\phi_k) / \cos \phi_k + \rho_{z2M}^k(\phi_k) \tan \phi_k \right. \\ &\quad \left. + \rho_{z3M}^k(\phi_k) + \rho_{z4M}^k(\phi_k) \sin \phi_k \right\} b_k \cos \phi_k d\phi_k \\ &- \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_{wI}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) \left\{ \rho_{z1I}^k(\phi_k) / \cos \phi_k + \rho_{z2I}^k(\phi_k) \tan \phi_k \right. \\ &\quad \left. + \rho_{z3I}^k(\phi_k) + \rho_{z4I}^k(\phi_k) \sin \phi_k \right\} b_k \cos \phi_k d\phi_k \\ &= -w_M^\infty + w_I^\infty \quad \dots(14) \end{aligned}$$

重み関数を式(10)を満足する連続関数として、式(15),(16)のように表現する。

$$\begin{aligned} \rho_{z1M}^k(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} a_{nM}^k t_n(\phi_k), \rho_{z2M}^k(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/4} b_{nM}^k t_n(\phi_k) \\ \rho_{z3M}^k(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} c_{nM}^k t_n(\phi_k), \rho_{z4M}^k(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/4} d_{nM}^k t_n(\phi_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_{z1I}^k(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} a_{nI}^k t_n(\phi_k), \rho_{z2I}^k(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/4} b_{nI}^k t_n(\phi_k) \\ \rho_{z3I}^k(\phi_k) &= \sum_{n=1}^{M/4} c_{nI}^k t_n(\phi_k), \rho_{z4I}^k(\phi_k) = \sum_{n=1}^{M/4} d_{nI}^k t_n(\phi_k) \quad \dots(15) \\ t_n(\phi_k) &= \cos \{ 2(n-1)\phi_k \} \quad \dots(16) \end{aligned}$$

ここで、Mは $0 \leq \phi_k \leq 2\pi$ の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により、式(13),(14)は係数 $a_{nM}^k, b_{nM}^k, c_{nM}^k, d_{nM}^k, a_{nI}^k, b_{nI}^k, c_{nI}^k, d_{nI}^k$ ($k=1, \dots, m$) についての $2Mm$ 元の連立方程式[式(17),(18)]に還元できる。

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{M/4} (a_{nM}^k A_{nM} + b_{nM}^k B_{nM} + c_{nM}^k C_{nM} + d_{nM}^k D_{nM} \\ &\quad + a_{nI}^k A_{nI} + b_{nI}^k B_{nI} + c_{nI}^k C_{nI} + d_{nI}^k D_{nI}) \\ &= -\tau_{nzM}^\infty + \tau_{nzI}^\infty \quad \dots(17) \\ &\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{M/4} (a_{nM}^k E_{nM} + b_{nM}^k F_{nM} + c_{nM}^k G_{nM} + d_{nM}^k H_{nM} \\ &\quad + a_{nI}^k E_{nI} + b_{nI}^k F_{nI} + c_{nI}^k G_{nI} + d_{nI}^k H_{nI}) \\ &= -w_M^\infty + w_I^\infty \quad \dots(18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{nM} &= -(1/2)t_n(\theta_i) \cos \theta_{i0} / \cos \theta_i \\ &+ \int_0^{2\pi} K_{nzM}^{F_i}(\phi_k, \theta_i) t_n(\phi_k) b_k d\phi_k \quad \dots(19) \end{aligned}$$

$B_{nM} \sim H_{nI}$ も式(19)と同様に定義できる。したがって、問題を解くことは係数 $a_{nM}^k \sim d_{nI}^k$ ($k=1, \dots, m$) を求めることに帰着される。m個のだ円境界上のそれぞれで適当に選んだM個の点 ($\phi_k = \pm \phi_n, \pi \pm \phi_n, n=1, \dots, M/4$ のように選ぶ) で境界条件を満足するように式(17),(18)の連立方程式を解けば、任意の点の応力は係数と A_{nM} 等の影響係数の一次結合で表現される。以上の解析方法により、一般的な条件下で、だ円形介在物の寸法、位置を変化させてその干渉効果を調べる。

3. 解析結果および考察

3. 1 2個の等大だ円形介在物の干渉問題

図2は遠方で一樣なz方向のせん断応力 $\tau_{zx}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ を受ける無限体中の2個の等大だ円形介在物の干渉問題を示す。

図2において、 $a=0.8, b=1.0, x'=2.0, y'=0.0, \tau_{zx}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0, G_I/G_M=10^5$ のとき、介在物 $i=1$ の傾き角度 ψ_1 を $\psi_1=0^\circ \sim 90^\circ$ と変化させたときの、介在物 $i=1$ のまわりの母材の応力分布を求める。

まず、介在物境界上における境界条件の満足度を確かめると、

M/4=14のとき、

$$10^6 < |\tau_{nzM} - \tau_{nzI}| < 10^2, 10^{12} < |w_M - w_I| < 10^9$$

M/4=16のとき、

$$10^7 < |\tau_{nzM} - \tau_{nzI}| < 10^3, 10^{12} < |w_M - w_I| < 10^9$$

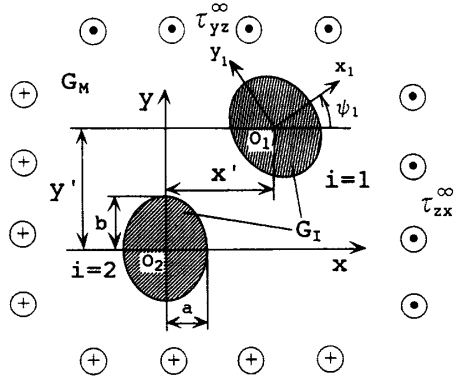


Fig.2 Two equal elliptical inclusions
 $i=1: x=acos\theta, \cos\psi_1 - b\sin\theta, \sin\psi_1 + x'$
 $y=acos\theta, \sin\psi_1 + b\sin\theta, \cos\psi_1 + y'$
 $i=2: x=acos\theta_2, y=bsin\theta_2$

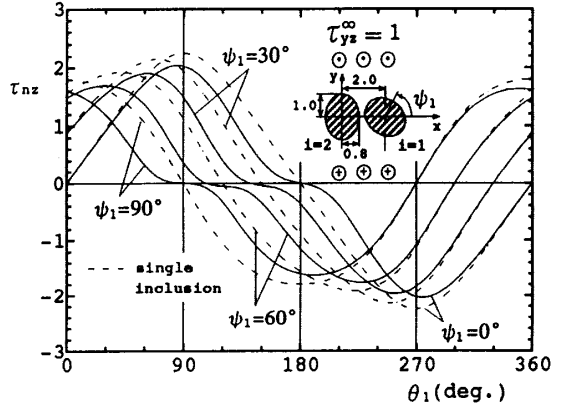
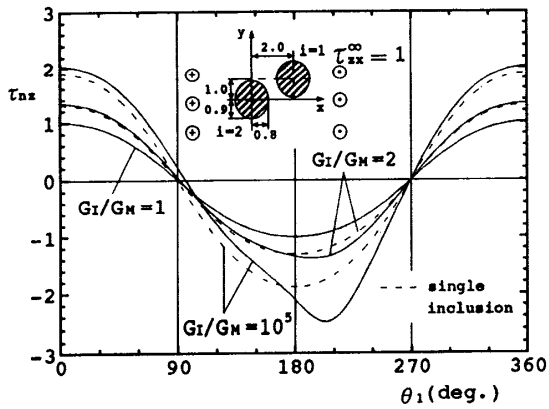
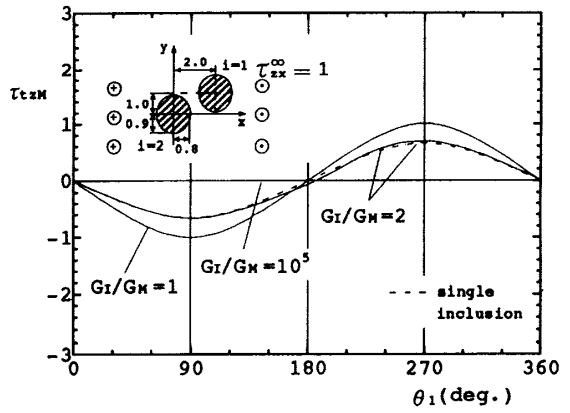


Fig.3 Stress (τ_{nz}) distribution along boundary $i=1$
 ($a=0.8, b=1.0, x'=2.0, y'=0.0, \tau_{zx}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0, G_I/G_M=10^5$ in Fig.2)

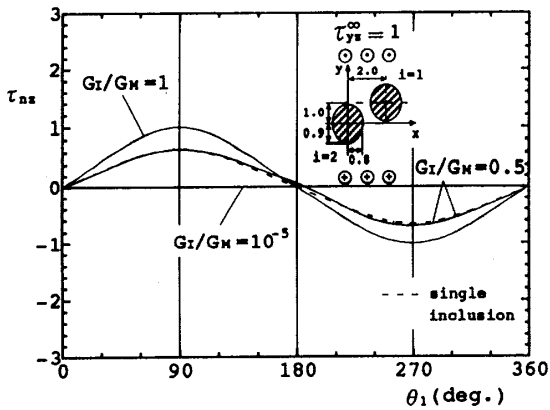


(a) τ_{nz}

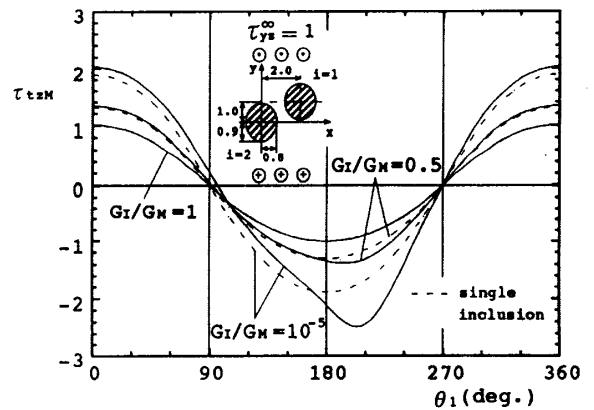


(b) τ_{tzM}

Fig.4 Stress distribution along boundary $i=1$ ($a=0.8, b=0.9, x'=2.0, y'=1.0, \psi_1=0^\circ, \tau_{zx}^\infty=1.0, \tau_{yz}^\infty=0.0$ in Fig.2)



(a) τ_{nz}



(b) τ_{tzM}

Fig.5 Stress distribution along boundary $i=1$ ($a=0.8, b=0.9, x'=2.0, y'=1.0, \psi_1=0^\circ, \tau_{zx}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0$ in Fig.2)

であり、高い境界条件の満足度が確かめられた。

介在物 $i=1$ の傾き角度 ψ_1 を $\psi_1=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ と変化させたときの介在物 $i=1$ の境界上の応力 τ_{nz} の分布を図3に示す。図3中の破線は、介在物 $i=1$ のみが存在する場合の結果である。図3より、

2つの介在物が最も近づく付近で干渉効果が大きくなることがわかる。

次に、図2において、 $a=0.8, b=0.9, x'=2.0, y'=1.0, \psi_1=0^\circ, \tau_{zx}^\infty=1.0, \tau_{yz}^\infty=0.0, G_I/G_M=C$ (C は定数、 $C \geq 1$) のとき、介在物 $i=1$ のまわりの応力分

布を図4に示す。また、図4に示しただ円形介在物と同一寸法、位置にある2個の等大だ円形介在物の干渉問題で、 $\tau_{zx}^\infty=0.0$, $\tau_{yz}^\infty=1.0$, $G_I/G_M=1/c$ のとき、介在物 $i=1$ のまわりの応力分布を図5に示す。図4, 5中の破線は、無限体中の1個のだ円形介在物の結果である。 $G_I/G_M>1$ のとき、図4より、 $|\tau_{nz}| > |\tau_{izM}|$ である。逆に、 $G_I/G_M<1$ のとき、図5より、 $|\tau_{nz}| < |\tau_{izM}|$ である。

図4(a), 図5(b)を比較すると、図4(a)の τ_{nz} と図5(b)の τ_{izM} が一致することがわかる。また、図4(b), 図5(a)を比較すると、図4(b)の τ_{izM} と図5(a)の τ_{nz} の絶対値が一致する。

3. 2 任意個の1列だ円形介在物の干渉問題

図6は遠方で一様なz方向のせん断応力 $\tau_{zx}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ を受ける無限体中のN個の1列等大だ円形介在物の干渉問題を示す。本研究では、最も中央寄りの介在物の境界上と、最も外側の介在物の境界上で最大応力を求めた。図6において、 $a/b=1$, $\tau_{zx}^\infty=0.0$, $\tau_{yz}^\infty=1.0$ とし、 G_I/G_M , a/d , N を変化させたときの最大応力の値をまとめたものを表1, 2に示す。表1は最も中央寄りの介在物まわりの母材の値であり、表2は最も外側の介在物まわりの母材の値である。ここで、表中の最大応力の値は、(i) $G_I/G_M<1$ のとき $|\tau_{nz}| < |\tau_{izM}|$ であるため、介在物境界での母材の応力 τ_{izM} の最大値 $\tau_{izM \max}$ を無次元化した値 $S_{\max}=\tau_{izM \max}/\tau_{izM0}$ (τ_{izM0} は無

限体中に一つのだ円形介在物があるときの応力集中係数)をとり、(ii) $G_I/G_M>1$ のとき $|\tau_{nz}| > |\tau_{izM}|$ であるため、介在物境界での母材の応力 τ_{nz} の最大値 $\tau_{nz \max}$ を無次元化した $S_{\max}=\tau_{nz \max}/\tau_{nz0}$ (τ_{nz0} は無限体中に一つのだ円形介在物があるときの応力集中係数)をとっている。 $G_I/G_M<1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に、 $G_I/G_M>1$ ならば最も外側の介在物との境界上に最大応力が生じる。 $a/b=1$, $G_I/G_M=0$ の円孔列の場合には西谷⁽²⁾が解析を行っている。西谷の結果と本研究の結果とは表に示した範囲でほぼ完全に一致している。

また、表1, 2は $\tau_{zx}^\infty=0.0$, $\tau_{yz}^\infty=1.0$ (問題B)の結果であり、 $\tau_{zx}^\infty=1.0$, $\tau_{yz}^\infty=0.0$ (問題A)の結果は示していないが、前節の議論から表1, 2を問題Aの結果とみなすこともできる。すなわち、表1, 2の G_I/G_M をその逆数で置き換えれば、表中の τ_{nz0} が問題Aの τ_{izM0} に相当し、 τ_{izM0} が τ_{nz0} に相当することになる。

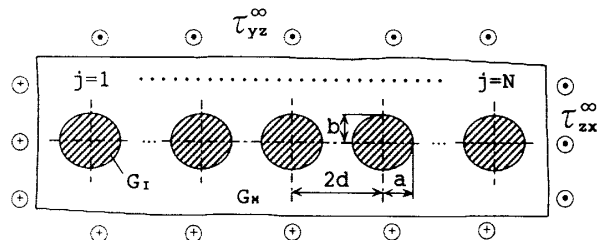


Fig.6 A row of elliptical inclusions

Table 1 Maximum stress along the matrix interface of the central inclusion in Fig.6 under $\tau_{zx}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0$ ($a/b=1, S_{\max}=\tau_{izM \max}/\tau_{izM0}$ or $S_{\max}=\tau_{nz \max}/\tau_{nz0}, \tau_{izM0}=\tau_{izM \max} |_{a/d \rightarrow 0}, \tau_{nz0}=\tau_{nz \max} |_{a/d \rightarrow 0}$)

		Matrix									
G _I /G _M	a/d	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8				
	N	(deg.) τ_{izM0}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	
0.0	6	0,180 ±2.000	0,180 1.000	0.0 1.027	0.0 1.128	0.0 1.384	0.0 2.147				
	7	0,180 ±2.000	0,180 1.000	0,180 1.029	0,180 1.134	0,180 1.400	0,180 2.204				
	8	0,180 ±2.000	0,180 1.000	0.0 1.029	0.0 1.137	0.0 1.414	0.0 2.261				
	∞	±2.000	1.000	1.035	1.164	1.511	2.706				
			(1.000)	(1.035)	(1.164)	(1.511)	(2.705)				
0.5	6	0,180 ±1.333	0,180 1.000	0.0 1.009	0.0 1.040	0.0 1.107	0.0 1.252				
	7	0,180 ±1.333	0,180 1.000	0,180 1.009	0,180 1.041	0,180 1.111	0,180 1.258				
	8	0,180 ±1.333	0,180 1.000	0.0 1.010	0.0 1.042	0.0 1.113	0.0 1.265				
	∞	±1.333	1.000	1.011	1.050	1.132	1.307				
2.0	N	(deg.) τ_{nz0}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}	(deg.) S_{\max}				
	6	±90.0 ±1.333	±90.0 1.000	±90.0 0.992	±90.0 0.969	±90.0 0.941	±90.1 0.914				
	7	±90.0 ±1.333	±90.0 1.000	±90.0 0.991	±90.0 0.968	±90.0 0.938	±90.0 0.911				
	8	±90.0 ±1.333	±90.0 1.000	±90.0 0.991	±90.0 0.967	±90.0 0.937	±90.0 0.908				
∞	±1.333	1.000	0.989	0.961	0.924	0.888					
∞	6	±90.0 ±2.000	±90.0 1.000	±90.0 0.975	±90.0 0.913	±90.0 0.844	±90.1 0.790				
	7	±90.0 ±2.000	±90.0 1.000	±90.0 0.974	±90.0 0.910	±90.0 0.838	±90.0 0.782				
	8	±90.0 ±2.000	±90.0 1.000	±90.0 0.973	±90.0 0.908	±90.0 0.835	±90.1 0.778				
	∞	±2.000	1.000	0.969	0.892	0.807	0.74				

() : Nisitani [2]

Table 2 Maximum stress along the matrix interface of the outermost inclusion (j=1) in Fig.6 under $\tau_{xz}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0$ ($a/b=1, S_{max}=\tau_{tzM\ max}/\tau_{tzM0}$ or $S_{max}=\tau_{nz\ max}/\tau_{nz0}, \tau_{tzM0}=\tau_{tzM\ max} |_{a/d \rightarrow 0}, \tau_{nz0}=\tau_{nz\ max} |_{a/d \rightarrow 0}$)

		Matrix									
G _I /G _M	a/d	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8				
	N	(deg.) τ_{tzM0}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	
0.0	6	0,180 ±2.000	0,180 1.000	0.0 1.018	0.0 1.093	0.0 1.305	0.0 1.951				
	7	0,180 ±2.000	0,180 1.000	0.0 1.018	0.0 1.095	0.0 1.310	0.0 1.975				
	8	0,180 ±2.000	0,180 1.000	0.0 1.018	0.0 1.096	0.0 1.314	0.0 1.993				
	∞	±2.000	1.000	1.020	1.104	1.340	2.109				
0.5	6	0,180 ±1.333	0,180 1.000	0.0 1.006	0.0 1.029	0.0 1.086	0.0 1.215				
	7	0,180 ±1.333	0,180 1.000	0.0 1.006	0.0 1.030	0.0 1.087	0.0 1.217				
	8	0,180 ±1.333	0,180 1.000	0.0 1.006	0.0 1.030	0.0 1.088	0.0 1.219				
	∞	±1.333	1.000	1.006	1.032	1.093	1.231				
	N	(deg.) τ_{nz0}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}	(deg.) S_{max}				
2.0	6	±90.0 ±1.333	±90.0 1.000	±90.1 0.995	±90.6 0.983	±91.6 0.967	±92.9 0.952				
	7	±90.0 ±1.333	±90.0 1.000	±90.1 0.995	±90.6 0.982	±91.7 0.966	±92.9 0.951				
	8	±90.0 ±1.333	±90.0 1.000	±90.1 0.995	±90.6 0.982	±91.7 0.965	±92.9 0.950				
	∞	±1.333	1.000	0.995	0.980	0.962	0.944				
∞	6	±90.0 ±2.000	±90.0 1.000	±90.3 0.986	±91.8 0.952	±94.3 0.914	±96.6 0.887				
	7	±90.0 ±2.000	±90.0 1.000	±90.3 0.986	±91.8 0.951	±94.3 0.912	±96.7 0.885				
	8	±90.0 ±2.000	±90.0 1.000	±90.3 0.986	±91.8 0.950	±94.3 0.911	±96.7 0.883				
	∞	±2.000	1.000	0.984	0.946	0.903	0.872				

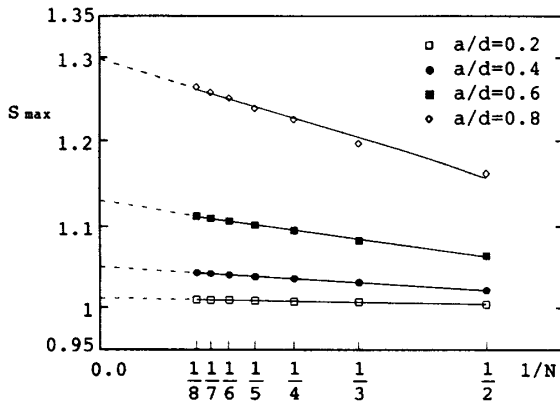


Fig.7 S_{max} vs $1/N$ relation ($a/b=1, \tau_{xz}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0, G_I/G_M=0.5$)

図7は表1において $G_I/G_M=0.5$ のとき、 $a/d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ と変えたときの母材の最大応力 (S_{max}) と介在物の個数 N の関係を示した図である。 $1/N$ と S_{max} はほぼ直線関係となることがわかる⁽⁹⁾⁽⁴⁾。

4. 結 言

本研究では、これまで解析がなされていない面外せん断応力場における任意に分布するだ円形介在物の干渉効果の解析法を考察した。その結果、以下のような結論が得られた。

- (1) 新しく提案した基本密度関数と重み関数の一次

結合で未知関数である体積力密度を表現する方法によって境界上のなめらかな応力分布と高い境界条件の満足度が得られた。

(2) $\tau_{xz}^\infty=1.0, \tau_{yz}^\infty=0.0$ で $G_I/G_M=C$ (C は定数, $C \geq 1$) の任意に分布するだ円形介在物 (問題A) の応力分布 τ_{nz} と、 $\tau_{xz}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0$ で $G_I/G_M=1/C$ の問題Aと同一に分布するだ円形介在物 (問題B) の応力分布 τ_{tzM} は等しい。また、同様に問題Aの τ_{tzM} と、問題Bの τ_{nz} の絶対値は等しい。

(3) だ円形介在物列の干渉問題 ($\tau_{xz}^\infty=0.0, \tau_{yz}^\infty=1.0$) において、母材と介在物の弾性比が $G_I/G_M < 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に、 $G_I/G_M > 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に最大応力が生じる。また、最大応力 S_{max} と $1/N$ (N : 介在物個数) はほぼ直線関係となる。

文 献

(1) 野田尚昭・有田卓司・松尾忠利, 面外せん断の応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法, 機論, 63-614, A(1997), 2155-2158.
 (2) Nisitani, H. (Sih G. C. 編), Solutions of notch problems by body force method, Stress Analysis of Notch Problem, (1974), 1-68, Leyden
 (3) 石田誠・井川秀信, 任意個の-列だ円孔群・き裂群をもつ板の引張り (ある漸近特性と応力の計算式), 機論, 58-553, A (1992), 1642-1649.
 (4) 野田尚昭・松尾忠利・石井秀雄, 任意個の-列だ円形介在物をもつ板の引張り, 機論, 61-581, A(1995), 106-113.