

切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式*

(円弧形および 60° V 形切欠きを有する回転曲げ試験片)

野田 尚昭*¹, 高瀬 康*²
神崎 健太郎*³, 西谷 弘信*⁴

Convenient Stress Concentration Formula Useful for Any Shape of Notch in a Round Test Specimen (Rotating Bending Specimen Having an Extremely Sharp V-Shaped Notch or an Extremely Blunt Circular-Arc Notch)

Nao-Aki NODA, Yasushi TAKASE,
Kentarou KANZAKI and Hironobu NISITANI

In this work, stress concentration factors (SCFs) of a round bar with a circular-arc or V-shaped notch K_t are considered on the basis of exact solutions for special cases and accurate numerical results. First, for the limiting cases of deep and shallow notches, the body force method is used to calculate the SCFs; then the formulas are obtained as K_{ta} and K_{ts} . On the one hand, upon comparison of K_t and K_{ta} , it is found that K_t is nearly equal to K_{ta} if the notch is deep or blunt. On the other hand, if the notch is sharp or shallow, K_t is mainly controlled by K_{ts} and the notch depth. The notch shape is classified into several groups according to the notch radius and depth; then, the least squares method is applied for calculation of K_t/K_{ta} and K_t/K_{ts} . Finally, a set of convenient formulas useful for any shape of notch in a round test specimen are proposed. The formulas yield SCFs with less than 1% error for any shape of notch.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Notch, Numerical Analysis, Test Specimen, Bending, Body Force Method

1. 緒言

図1に示すような円周切欠きを有する丸棒の応力集中評価のためノイバーの提案した三角則⁽¹⁾は、過去40年以上にわたってよく用いられてきた。これは、ノイバー公式が簡便であるにもかかわらず切欠き形状の全範囲に対してある程度の精度で応力集中係数を与えるたいへん便利なものであったためである。著者らはさきに体積法によって得られた高精度の解析結果を基に、ノイバーの三角則による近似式に修正係数をかけることによって精度の高い計算式を提案した⁽²⁾。さらに前報では、切欠き半径 ρ が極端に大きい円弧切欠き [図1(a)] や切欠き半径 ρ が極端に小さい鋭い切欠き [図1(c)] をも含めた、切欠き寸法のすべての範囲に対して応力集中係数を与える計算式を提案した⁽³⁾。これにより引張の場合について正確な応力集中係数を求めることができた。しかし、曲げやねじりの場合では切欠き寸法のすべての範囲に対して正確な応力集中係数を求める計算式は提案されていない。曲げに対する研

究の重要性については、回転曲げ疲労試験など、古くから多くの実験が行われていることからみても明らかである。

そこで本研究では、丸棒引張問題と同様に、丸棒曲げ問題において、切欠きが浅い場合や深い場合の厳密解ならびに体積法によって得られた解析結果⁽⁴⁾を基に物理的考察を行い、切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える高精度の計算式を提案することを目的とする。丸棒の曲げでは引張の場合と比べて切欠きが浅い場合や深い場合の解を利用できる範囲が異なるので注意が必要である。

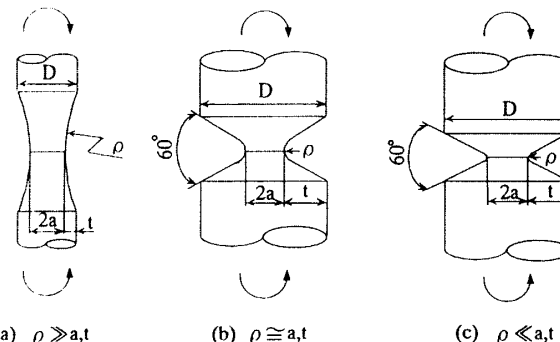


Fig.1 Round specimens with circular-arc and V-shaped notches
(a)extremely blunt notch, (b)ordinary notch,
(c)extremely sharp notch

* 原稿受付 1997年11月25日。

¹ 正員,九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区仙木町1-1)。

² 准員,九州工業大学工学部。

³ 九州工業大学学部生。

⁴ 正員,九州産業大学工学部(☎813-0004 福岡市東区松香台2-3-1)。

2. 記号

本論文で使用する記号をまとめて以下に示す。全範囲で求める応力集中係数 K_t は最小断面の公称応力に基づく。

- ρ : 切欠き半径
- t : 切欠き深さ
- a : 切欠き底の最小断面の半径
- D : 直径
- d : 最小断面の直径, $d = 2a$
- $\xi = \sqrt{t/\rho}$
- $\eta = \sqrt{\rho/t}$
- ν : ポアソン比 (=0.3)
- $\lambda = 2t/D$
- x : $a/\rho \leq 1.0$ のとき, $x = a/\rho$
 $\rho/a \leq 1.0$ のとき, $x = 2 - \rho/a$
- K_t : 図1(a)~(c)の問題の応力集中係数
- K_{ts} : 60° V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数

- K_{IH} : 深い回転双曲面切欠きの応力集中係数⁽¹⁾
 - K_{td} : 深い60° V形切欠きの応力集中係数
 - K_{E} : 無限板の円孔の応力集中係数 ($= 1 + 2\sqrt{t/\rho}$)
- 以下では、まず前報で提案した近似式⁽²⁾の結果を図示して考察する(図2~5の実線)。なお一部については体積法⁽³⁾の追加計算を行った(図2~5の破線)。その際切欠き深さのパラメータとしては主に $2t/D$ を用い、切欠き半径のパラメータとしては主に a/ρ (または ρ/a) を用いて整理する。

3. 鋭く浅い切欠きの応力集中係数

まず、切欠き半径 ρ が小さい図1(c)のような60° V形切欠きに対する応力集中係数 K_t を考察する。このような鋭い切欠きの応力集中係数は、同一形状比 t/ρ の V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数 K_{ts} より求めることができる。図2は、応力集中係数 K_t と60° V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数の解 K_{ts} との比を切欠き形状の広い範囲 ($0 < \rho/a \leq 10$) について示したものである[図2(a)]。ここで、参考のため引張の場合も示した[図2(b)]。なお、図2(a)で $\rho/a \rightarrow 0$ の線は、 ρ/a が小さい場合、たとえば ρ/a が 0.01 と 0.02 で K_t/K_{ts} が3桁程度以上一致することを確認して求めている。

図2より曲げの場合[図2(a)]の K_t/K_{ts} の値は、引張の場合[図2(b)]ほど揃っていないことがわかる。従って、 K_{ts} を用いる計算式の適用範囲が、引張の場合よりも限定されることになる。結局、図2(a)に示すような K_t/K_{ts} の値の検討から、以下のことがわかる。

(1) 曲げの場合にも[図2(a)]鋭い切欠き ($\rho/a \leq$

0.1) では、 K_t/K_{ts} の値は $2t/D \leq 0.4$ の範囲でほとんど $2t/D$ のみによって決まる。従って K_{ts} とこの関係を用いれば、鋭く浅い切欠きの K_t を求めることができる。

(2) 浅い切欠き ($2t/D \leq 0.02$) では、 ρ が極端に大きい場合 ($a/\rho \leq 0.02$) を除き K_t/K_{ts} の値はほぼ $2t/D$ によって決まる狭い範囲に分布する。例えば、 $2t/D = 0.02$ のとき、 K_t/K_{ts} の実際の数値は $a/\rho = 0.02$ ならば $K_t/K_{ts} = 0.968$ であり、 $a/\rho \rightarrow \infty$ でも $K_t/K_{ts} = 0.938$ であり、 $0.938 \leq K_t/K_{ts} \leq 0.968$ と比較的狭い範囲に分布している。従って K_t/K_{ts} のこのような性質を利用すれば、浅い切欠きの K_t を求めることができる。

(3) 浅い切欠きで、 ρ が極端に大きい場合 ($2t/D \leq 0.02$ かつ $a/\rho \leq 0.02$) では、次節で鈍い切欠きの応力集中係数を考察した結果、 $K_t = (1.000 \sim 1.005)$ と見積ることができる。よってこの場合 $K_t = 1.002$ として十分精度よく評価できる。

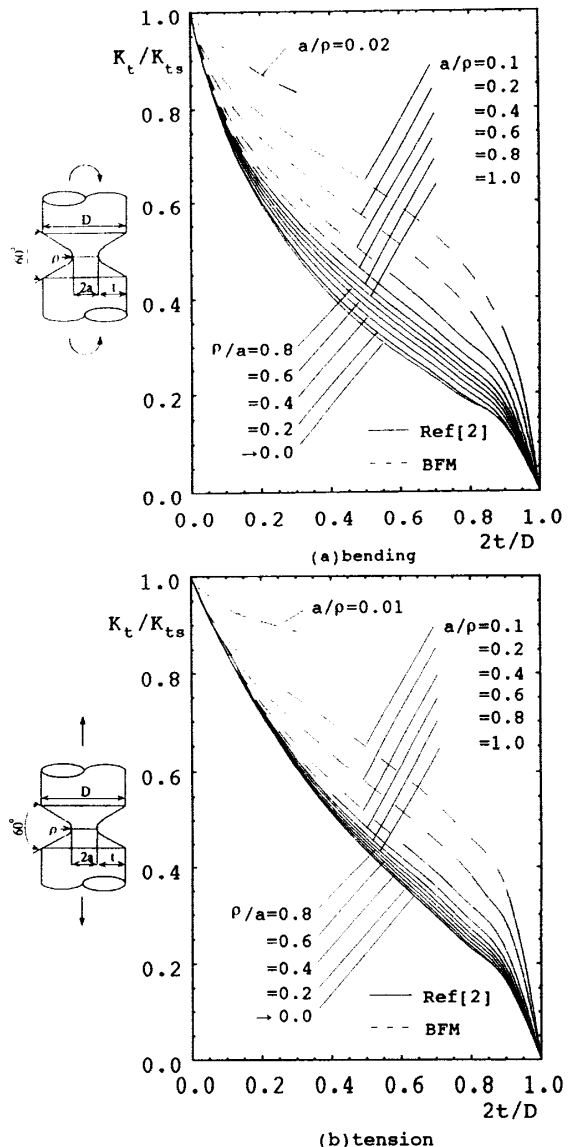


Fig.2 K_t/K_{ts} vs $2t/D$

4. 鈍い切欠きまたは深い切欠きの応力集中係数

ここでは、切欠き半径 ρ が大きいまたは深い切欠きに対する応力集中係数を考察する。このような切欠きに対して切欠きの深い場合に相当する回転双曲面切欠きの解が、有限深さの切欠き問題に対して広い範囲で有効（すなわち $K_t/K_{tH} \approx 1$ ）であることは、引張についての前論文⁹⁾より明らかである。そこで本論文では、曲げについても同様に、切欠きが深い場合の応力集中係数をさらに精度良く求めることを試みる。

表1は、切欠きが深い場合すなわち $2t/D=0.7, 0.8, 0.9$ での応力集中係数 K_t と深い双曲面切欠きの解 K_{tH} を比較したものである。表1において $2t/D=0.7 \rightarrow 0.9$ と切欠きが深くなるに従い応力集中係数 K_t と深い双曲面切欠きの解 K_{tH} との比は一定になる。 $2t/D \rightarrow 1.0$ のとき $K_t/K_{tH} \rightarrow 1.0$ ではなく $K_t/K_{tH} \rightarrow (0.997 \sim 1.050)$ となる

Table 1 K_t/K_{tH} when $2t/D \rightarrow 1.0$

x	a/ ρ	ρ/a	2t/D=0.7	2t/D=0.8	2t/D=0.9	2t/D \rightarrow 1.0
0.000	0.000	∞				
0.100	0.100	10.00	0.997	0.999	0.999	0.999
0.200	0.200	5.000	1.000	0.998	0.998	0.998
0.300	0.300	3.333	0.998	0.998	0.998	0.998
0.400	0.400	2.500	0.998	0.999	0.999	0.999
0.500	0.500	2.000	1.000	1.000	0.999	0.999
0.600	0.600	1.667	1.000	1.000	1.000	1.000
0.700	0.700	1.429	1.001	1.001	1.001	1.001
0.800	0.800	1.250	1.002	1.002	1.002	1.002
0.900	0.900	1.111	1.003	1.003	1.003	1.003
1.000	1.000	1.000	1.004	1.004	1.004	1.004
1.000	1.000	1.000	1.004	1.004	1.004	1.004
1.100	1.111	0.900	1.005	1.005	1.005	1.005
1.200	1.250	0.800	1.006	1.006	1.006	1.006
1.300	1.429	0.700	1.008	1.008	1.008	1.008
1.400	1.667	0.600	1.010	1.010	1.010	1.010
1.500	2.000	0.500	1.013	1.013	1.013	1.013
1.600	2.500	0.400	1.016	1.017	1.017	1.017
1.700	3.333	0.300	1.021	1.022		1.022
1.800	5.000	0.200	1.027	1.028		1.028
1.900	10.00	0.100	1.038			1.038
2.000	∞	0.000				1.050

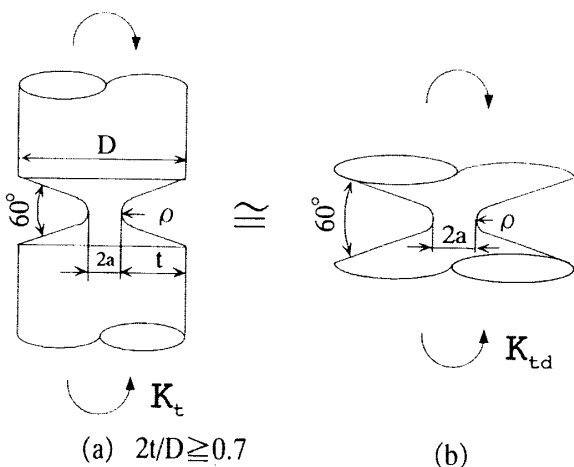


Fig. 3 K_t and K_{td} with V-shaped notches

のは、切欠き形状が60° V形であるか、双曲面であるかの違いによるものと考えられる。そこで、まず表1の収束性を利用して $2t/D \rightarrow 1.0$ の極限值 K_{td} を求めて表1に示す。表1で ρ/a が小さく切欠きが深い場合には極値計算が困難であるが、この場合にも異なる $2t/D$ の結果から $2t/D \rightarrow 1.0$ の収束性を確認して極限値を正確に求めた。そして、深い60° V形切欠きの解 K_{td} を表1の結果より最小二乗法を適用してパラメータ x の関数として求めた。表1の K_{td} の値で $a/\rho \rightarrow \infty$ の値は外挿値であるが、 $a/\rho=3.333$ と $a/\rho=5$ の外挿値と $a/\rho=5$ と $a/\rho=10$ の外挿値が3桁程度一致することから十分正確な値であると考えられる。図3は、切欠きが深い場合の応力集中係数 K_t [図3(a)] が K_{td} [図3(b)] の値で近似できることを示している。

次に、 K_t と式(3)より求めた K_{td} との比で整理した結果を図4に示す。ここで、曲げの場合 [図4(a)] と、

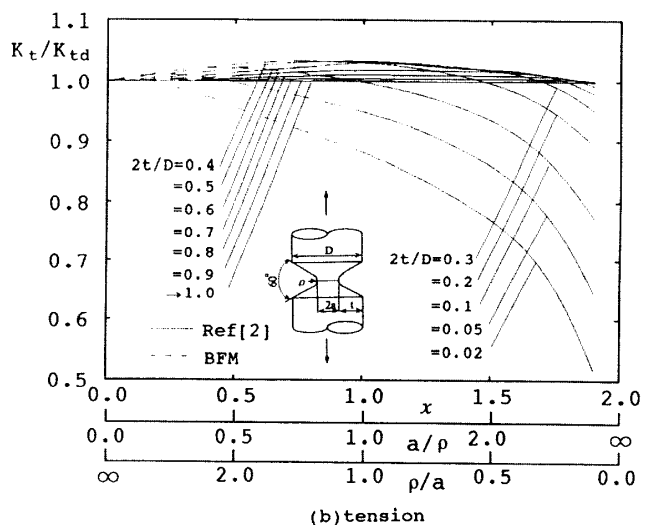
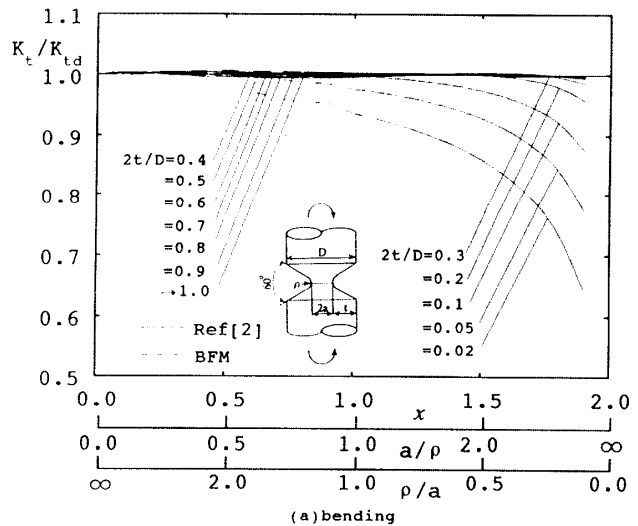


Fig. 4 K_t/K_{td} vs a/ρ or ρ/a

引張の場合 [図4(b)] について比較, 検討する. それによると曲げの場合 [図4(a)] での K_t/K_{ts} の値は, 引張の場合 [図4(b)] よりもかなり揃っていることがわかる. これは, K_{ts} についての近似が, 引張の場合よりも広範囲にわたって利用できることを示している.

結局, 図4(a)に示すような K_t/K_{ts} の値の検討から, 以下に示す範囲で K_{ts} による近似が有効であることがわかる.

- (1) $2t/D \geq 0.4$ で $10 \leq a/\rho \leq \infty$ の範囲で $0.996 \leq K_t/K_{ts} \leq 1.001$
- (2) $0.2 \leq 2t/D \leq 1.0$ で $0 \leq a/\rho \leq 10$ の範囲で $0.958 \leq K_t/K_{ts} \leq 1.005$
- (3) $0.02 \leq 2t/D \leq 0.2$ で $0 \leq a/\rho \leq 0.8$ の範囲で $0.955 \leq K_t/K_{ts} \leq 1.007$

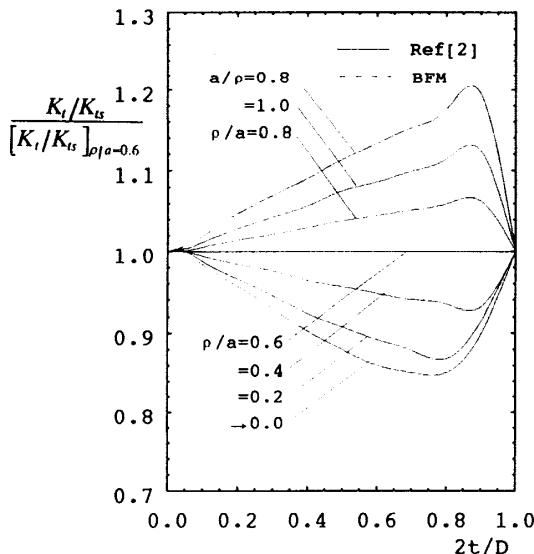


Fig.5 $(K_t/K_{ts})/([K_t/K_{ts}]_{a/\rho=0.6})$ vs $2t/D$

5. その他の切欠きの応力集中係数

ここでは, 前節まで示していない範囲 ($0.1 \leq \rho/a \leq 1.2, 0 \leq 2t/D \leq 0.2$) の応力集中係数の評価方法を提案する. 図2よりこのような範囲では, K_t/K_{ts} の値がほぼ $2t/D$ のみによってきまり, 狭い範囲に存在していることがわかる. そこで, 高精度の近似式を作るため, $[K_t/K_{ts}]_{a/\rho=0.6}$ の値を基準にして K_t/K_{ts} との比をとる. その結果を図5に示す. 図5より $[K_t/K_{ts}]_{a/\rho=0.6}$ と K_t/K_{ts} の比は $0 \leq 2t/D \leq 0.2$ の範囲で (0.96~1.05) の狭い範囲にあることがわかる.

6. 切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与える計算式

以上の議論から, 切欠き形状の全範囲に対して応力集中係数を与えるためその存在領域を7つに分けたものを図6に示す. そして必要となる線図と近似式をまとめて以下に記す.

6・1 半無限板の60° V形切欠きまたは円弧形状切欠きの $K_{ts}^{(2)}$ (図1で ρ, t が有限で $d, D \rightarrow \infty$ のとき $K_t \rightarrow K_{ts}$)

$$K_{ts}/K_{tsE} = 1.000 - 0.127\xi + 0.2908\xi^2 - 0.1420\xi^3 \dots \dots \dots (1.a)$$

$$K_{ts}/K_{tsE} = 1.148 - 0.160\eta - 0.0345\eta^2 + 0.0693\eta^3 \dots \dots \dots (1.b)$$

$$\xi = \sqrt{t/\rho}, \eta = \sqrt{\rho/t}, K_{tsE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho} \dots \dots \dots (1.c)$$

6・2 鋭い切欠きの K_t (図6の領域1: $\rho/a \leq 0.1$ かつ $2t/D \leq 0.4$)

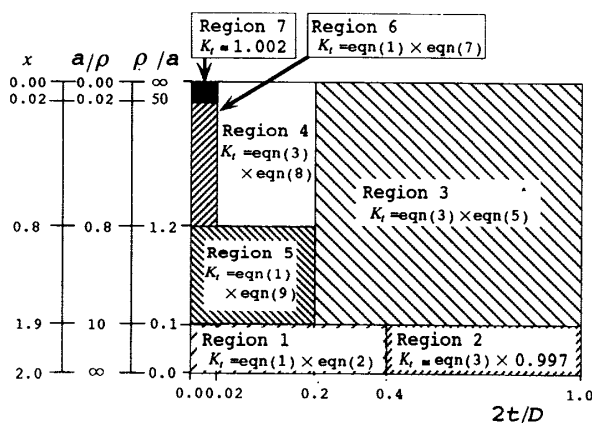


Fig.6 Classification of notch shape
 Region 1: Sharp and Shallow notch
 Region 2: Sharp and Deep notch
 Region 3: Deep notch
 Region 4: Blunt notch
 Region 5: Ordinary notch
 Region 6: Shallow notch
 Region 7: Blunt and Shallow notch

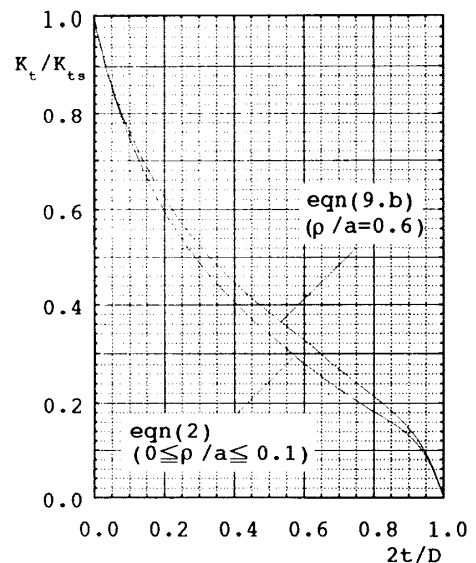


Fig.7 K_t/K_{ts} vs $2t/D$

$$K_t/K_u = 1.0000 - 3.4188\lambda + 14.016\lambda^2 - 69.430\lambda^3 + 284.03\lambda^4 - 780.07\lambda^5 + 1342.0\lambda^6 - 1382.7\lambda^7 + 779.25\lambda^8 - 184.65\lambda^9 \dots (2)$$

図7に、式(2)の K_t/K_u の値を図示する。

6・3 深い60°V形切欠きの K_{td} [図3(b)]

(図1で a, ρ が有限で $t \rightarrow \infty$ のとき $K_t \rightarrow K_{td}$)

$$K_{td}/K_{th} = 0.99744 + 0.014732x - 0.024870x^2 + 0.014924x^3 \dots (3.a)$$

$$K_{th} = (1/N)(3/4)(\sqrt{a/\rho+1}+1) \{3(a/\rho) - (1-2\nu)\sqrt{a/\rho+1} + 4 + \nu\} \dots (3.b)$$

$$N = 3(a/\rho+1) + (1+4\nu)\sqrt{a/\rho+1} + (1+\nu)/(\sqrt{a/\rho+1}+1) \dots (3.c)$$

図8は、式(3)の K_{td}/K_{th} の値を線図にしたものである。

6・4 鋭く深い切欠きの K_t (図6の領域2 :

$\rho/a \leq 0.1$ かつ $2t/D \geq 0.4$)

$$K_t/K_{td} \approx 0.997 \dots (4)$$

6・5 深い切欠きの K_t [図6の領域3 : $2t/D \geq$

0.2 かつ $a/\rho \leq 10$ ($0 \leq x \leq 1.9$)]

$$K_t/K_u = 0.99583 + 0.00027062\lambda + 0.012355\lambda^2 + 0.13037\lambda^3 - 0.30457\lambda^4 + 0.16578\lambda^5 + (0.24827 - 2.6149\lambda + 12.449\lambda^2 - 27.871\lambda^3 + 28.293\lambda^4 - 10.502\lambda^5)x + (-0.69237 + 7.7422\lambda - 37.365\lambda^2 + 81.715\lambda^3 - 80.203\lambda^4 + 28.797\lambda^5)x^2 + (0.59961 - 6.4408\lambda + 30.561\lambda^2 - 65.732\lambda^3 + 63.410\lambda^4 - 22.393\lambda^5)x^3 + (-0.18234 + 1.8160\lambda - 8.1768\lambda^2 + 17.016\lambda^3 - 16.033\lambda^4 + 5.5587\lambda^5)x^4 \dots (5)$$

図9は、式(5)の K_t/K_{td} の値を線図にしたものである。

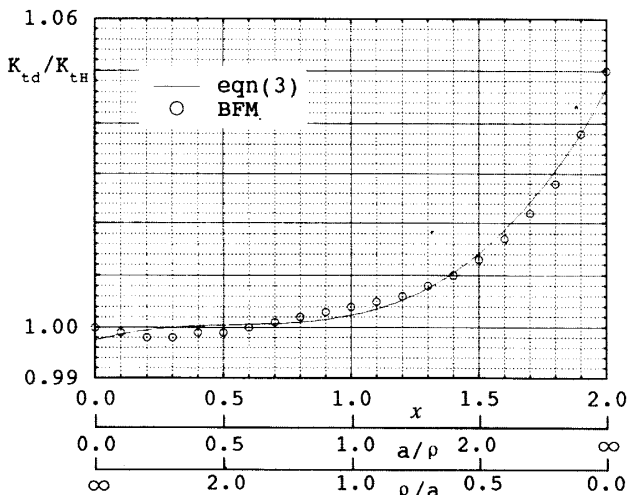


Fig.8 K_{td}/K_{th} vs a/ρ or ρ/a

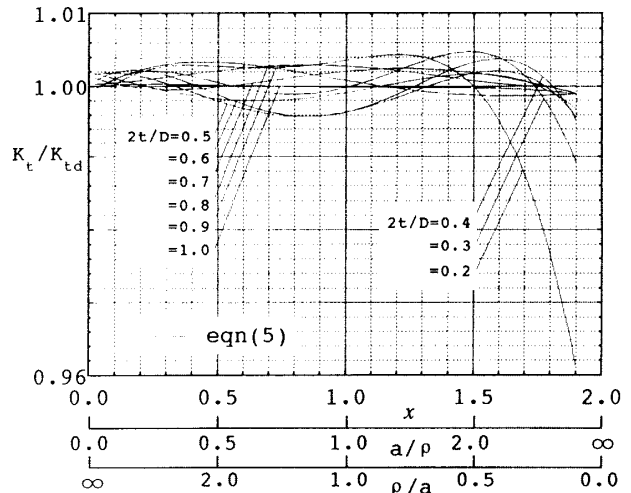


Fig.9 K_t/K_{td} vs a/ρ or ρ/a

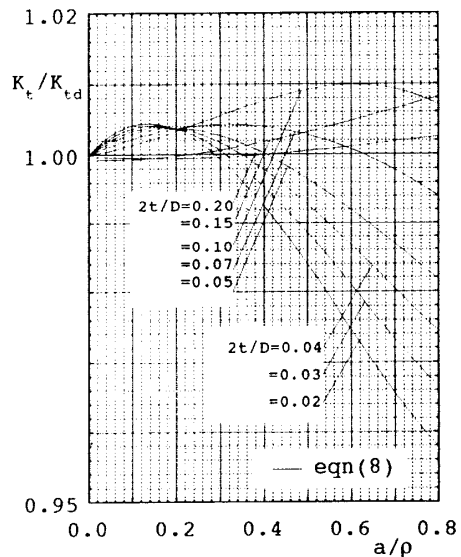


Fig.10 K_t/K_{td} vs a/ρ or ρ/a

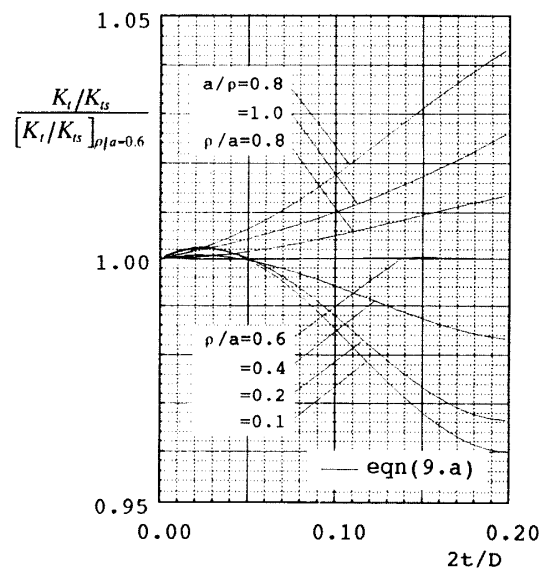


Fig.11 $(K_t/K_{ts}) / [(K_t/K_{ts})_{a/\rho=0.6}]$ vs $2t/D$

6・6 鈍く浅い切欠きの K_t [図6の領域7 : $a/\rho \leq 0.02$ かつ $2t/D \leq 0.02$]
 $K_t = 1.002$ (6)

6・7 浅い切欠きの K_t [図6の領域6 : $0.02 \leq a/\rho \leq 0.8$ ($0 \leq x \leq 0.8$) かつ $2t/D \leq 0.02$]
 $K_t/K_u = 1.0000$
 $- (0.96873 + 32.614x - 233.80x^2 + 811.76x^3 - 1423.4x^4 + 1222.9x^5 - 410.16x^6)\lambda$ (7)

6・8 鋭い切欠きの K_t [図6の領域4 : $a/\rho \leq 0.8$ ($0 \leq x \leq 0.8$) かつ $0.02 \leq 2t/D \leq 0.2$]
 $K_t/K_u = 1.0000 - 0.014793\lambda + 0.070689\lambda^2 + (0.095073 - 1.1067\lambda + 2.9132\lambda^2)x + (-0.42518 + 6.8626\lambda - 22.079\lambda^2)x^2 + (0.26412 - 4.8073\lambda + 15.994\lambda^2)x^3$ (8)

図10に、式(8)の K_t/K_{ud} の値を図示する。

6・9 その他の切欠きの K_t [図6の領域5 : $0.1 \leq \rho/a \leq 1.2$ かつ $2t/D \leq 0.2$]
 $K_t/K_u = \{1.0002 - 0.0026876(\rho/a) + 0.0070447(\rho/a)^2 - 0.0061187(\rho/a)^3 + 0.0017046(\rho/a)^4 + (0.18110 + 0.75835(\rho/a) - 4.7083(\rho/a)^2 + 6.3820(\rho/a)^3 + 2.5438(\rho/a)^4)\lambda$

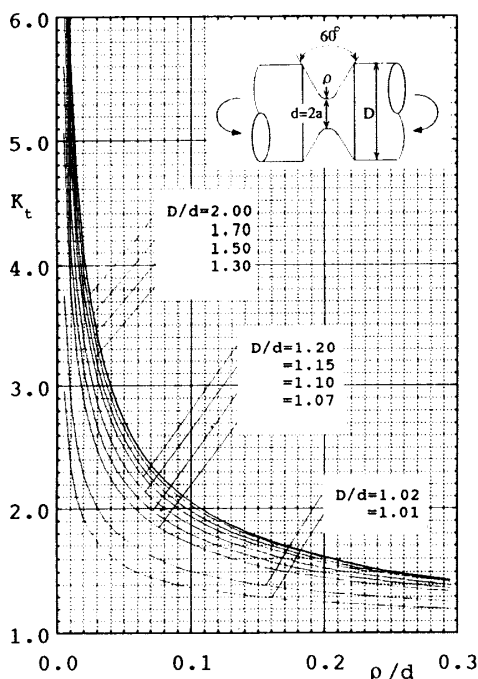


Fig. 12 K_t vs ρ/d

$$+ (-5.0005 - 8.5836(\rho/a) + 76.517(\rho/a)^2 - 105.46(\rho/a)^3 + 42.876(\rho/a)^4)\lambda^2 + (15.016 + 26.229(\rho/a) - 237.78(\rho/a)^2 + 333.28(\rho/a)^3 - 136.89(\rho/a)^4)\lambda^3 \left(\left[K_t/K_u \right]_{\rho/a=0.6} \right) \dots \dots \dots (9.a)$$

$$\left[K_t/K_u \right]_{\rho/a=0.6} = 0.99826 - 3.3823\lambda + 14.184\lambda^2 - 51.123\lambda^3 + 118.36\lambda^4 - 160.19\lambda^5 + 114.63\lambda^6 - 33.480\lambda^7 \dots \dots \dots (9.b)$$

図11に、式(9.a)の $(K_t/K_u) / \left(\left[K_t/K_u \right]_{\rho/a=0.6} \right)$ の値を図示する。

以上の式および線図を利用することにより全範囲の応力集中係数 K_t が求まる。図12は、 K_t の値を線図にしたものである。これは、著者らが以前に作製した線図⁽²⁾と比べて利用範囲が広い。

7. 結 言

本論文では切欠きを有する丸棒(図1)の応力集中係数 K_t を切欠き形状の全範囲で正確に与えることを目的とした。そのため、切欠きが浅い場合に相当する半無限板の応力集中係数 K_{ts} と特に切欠きが深い場合(図3)の応力集中係数 K_{td} を正確に計算式として求め利用した。

(1) K_t を K_{ts} を用いて精度良く求めることのできる範囲は、図2に示すように、引張の場合に比べて曲げでは狭い範囲となる。

(2) K_t を K_{td} で近似できる範囲は、図4に示すように、引張の場合に比べて曲げでは広範囲となる。

以上のような曲げ応力集中係数の特徴を考慮して、すべての切欠き形状に対して誤差1%程度以内で応力集中係数を与える計算式を提案した。

文 献

(1) Neuber, H., *Kerbspannungslehre*, (1957), 11, Springer-Verlag.
 (2) 野田尚昭・高瀬康・門田圭司, 切欠きを有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式, *機械の研究*, 48-7, (1996), 757-762.
 (3) 野田尚昭・西谷弘信・高瀬康・篠崎正孝, 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式(鋭い60°V形および鈍い円弧形切欠きを有する丸棒引張試験片), *機論*, 63-613, A(1997), 1926-1931.
 (4) 村上敬宜・野田尚昭・西谷弘信, 体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析(第3報, V形およびU形切欠きを有する丸棒の曲げ), *機論*, 48-430, A(1982), 800-809.