

面内曲げ応力集中問題における体積力法の  
特異積分方程式の数値解析法\*野田 尚昭\*<sup>1</sup>, 林田 一志\*<sup>2</sup>Numerical Solution of Singular Integral Equations  
of the Body Force Method in Stress Concentration Problems  
under In-Plane Bending

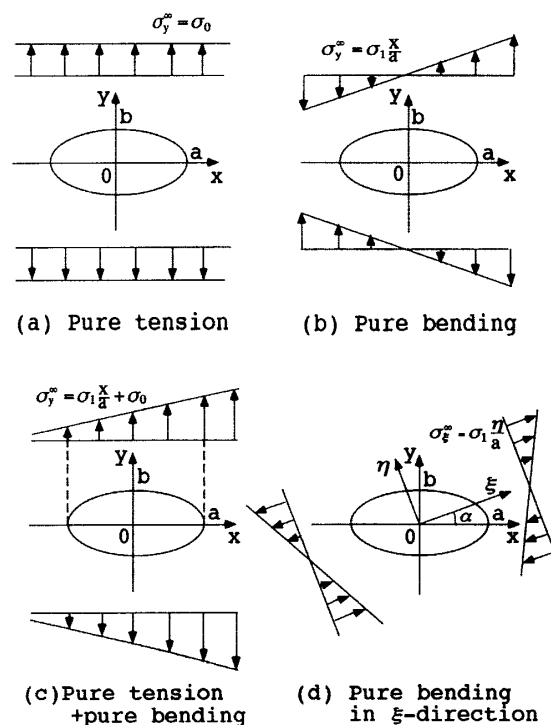
Nao-Aki NODA and Hitoshi HAYASHIDA

This paper deals with numerical solutions of singular integral equations in an interaction of elliptical holes under in-plane bending. The body force method is used to formulate the problem as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities, where unknowns are the densities of body forces distributed in an infinite plate. In order to satisfy the boundary conditions along elliptical boundaries, the unknown body force densities are approximated by a linear combination of fundamental densities functions and polynomials. The calculations are carried out for several arrangement of elliptical holes, and it is found that the present method yields rapidly converging numerical results. The body force densities and stress distributions along the boundaries are shown in figures to demonstrate the accuracy of present solutions.

**Key Words:** Elasticity, Stress Concentration, Body Force Method, In-Plane Bending, Interaction, Elliptical Holes, Numerical Analysis, Singular Integral Equation

## 1. 面内曲げ問題における従来の体積力法

だ円孔の応力集中問題は、その切欠き半径と切欠き深さを揃えれば種々の応力集中問題の評価に用いることができるので古くから研究<sup>(1)</sup>がなされている。このため、複数個のだ円孔の干渉問題や遠方で作用する応力が応力勾配を有する場合などのより一般的な場合に対して有効な解析方法を検討することは重要であると考えられる。このような問題に対して有力な応力解析法の一つである体積力法<sup>(2)</sup>は、もともと切欠きの干渉問題の近似計算法<sup>(3)</sup>の考え方を基礎として提案された。例えば、近似計算法<sup>(3)</sup>の論文では、引張応力場にだ円孔が単独に存在する場合の付加応力場の考え方の重要性が指摘されているが、通常の体積力法<sup>(2)</sup>では、引張応力場にだ円孔が単独に存在する場合を厳密に表現する体積力密度が基本密度関数として数値解析に用いられている。このため、このような従来の体積力法の手法をそのまま面内曲げや純粋せん断などの応力場に対

Fig.1 Infinite plate with an elliptical hole ( $\sigma_0 = \sigma_1 = 1$ )

\* 原稿受付 1997年10月27日.

\*<sup>1</sup> 正員, 九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).\*<sup>2</sup> 学生員, 九州工業大学大学院.

Table.1 Results of conventional body force method  
(a)  $\sigma_y$  at  $(a, 0)$  in Fig.1-(b)

M	a/b		
	0.5	1.0	2.0
1	1.3270	1.6926	2.4888
2	1.4109	1.8292	2.6903
4	1.4557	1.9127	2.8411
8	1.4776	1.9563	2.9207
16	1.4889	1.9782	2.9605
24	1.4926	1.9855	2.9737
32	1.4945	1.9891	2.9803
48	1.4963	1.9928	2.9869
64	1.4972	1.9946	2.9902
	⋮	⋮	⋮
∞	1.5000	2.0000	3.0000

(b)  $\sigma_y$  at  $(a, 0)$  in Fig.1-(c)

M	a/b		
	0.5	1.0	2.0
1	3.3267	4.6920	7.4872
2	3.4107	4.8288	7.6894
4	3.4550	4.9125	7.8405
8	3.4776	4.9562	7.9204
16	3.4888	4.9782	7.9603
32	3.4944	4.9891	7.9802
48	3.4963	4.9927	7.9868
64	3.4972	4.9946	7.9901
	⋮	⋮	⋮
∞	3.5000	5.0000	8.0000

して適用した場合、その有効性は引張応力場に適用した場合ほど明確でない。

いま、一つの円孔が応力勾配のある遠方荷重を受ける場合に、通常体積力法で用いられるような、上述の基本密度関数と階段関数を使って体積力密度を近似して解析し、その精度を検討する。簡単のため図1(b)に示すような、面内曲げ応力場の場合の応力集中係数の収束性を表1に示す。ここでMは $0 \leq \phi \leq \pi/2$ の選点数を意味する。 $0 \leq \phi \leq \pi/2$ の範囲で体積力密度を基本密度とM個の段からなる階段関数で近似しその中点で境界条件を満足させる。図1(a)に示すような引張応力場の場合には、当然ではあるが選点数1で厳密解が得られるのに対し、面内曲げ応力場では高い精度を得るには選点数をかなり大きくしなければならない。もちろん、この場合も、体積力の基本密度として、純曲げ応力場に単独に存在する円孔を厳密に表現する密度を用いれば選点数1で厳密解が得られる。しかし、一般的な遠方での荷重として図1(c)に示すような純引張りと同曲げの組み合わせや図1(d)のような $\pm$ 方向の純曲げまたはその他の応力場との組み合わせも考える必要がある。純曲げ問題の厳密解を有効に用いることはそれほど容易ではない。このような検討から、たとえば、面内曲げ応力場における複数の円孔の干渉問題を

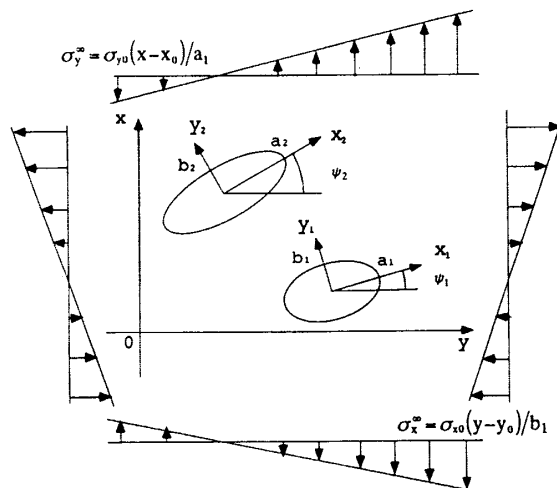


Fig.2 Arbitrarily distributed elliptical holes

従来の体積力法で取り扱った場合は引張応力場の場合と比較して精度は多少低下することも予想される。

一方、著者らはさきに、応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法を考察し、従来の体積力法の問題点として、

- (1) 未知関数である体積力密度が分割数を増加させても収束しない場合があること<sup>(4)</sup>,
- (2) 境界条件を完全には満足させることができない場合があること<sup>(5)</sup>,
- (3) 重み関数(未知関数)の近似に階段関数を用いているため境界上の滑らかな応力分布が求めにくいこと<sup>(4)</sup>,
- (4) 引張応力場の解析が主になされており、例えば面外せん断応力場の解析がなされていないこと<sup>(6)</sup>,  
等を指摘した。さらに、これらの問題点を解決するための数値解析法として、

- (1) 新しい8種類の基本密度関数を用いること<sup>(4)</sup>,
- (2) 重み関数の近似に多項式を用いること<sup>(4)(5)</sup>,
- (3) 体積力密度を基本密度関数と重み関数の一次結合で表現すること<sup>(4)(6)</sup>,

を提案し、このような方法で上述の問題点がすべて解決できることを示した<sup>(4)~(8)</sup>。さらにこれらの方法を応用して、二次元平面問題と三次元問題<sup>(7)(8)</sup>、面外せん断問題<sup>(9)</sup>を取り扱った。しかしこのような方法が面内曲げ問題において有効かどうかはまだ検討されていない。そこで本研究では体積力法の特異積分方程式を用いて、面内曲げ応力場における円孔の干渉の具体的問題を考察し、解法の有効性を検証する。

## 2. 体積力法の特異積分方程式の数値解析法

本解析法を図2に示すような、無限遠で  $\sigma_x^{\infty} = \sigma_{x0}(y-y_0)/b_1$ ,  $\sigma_y^{\infty} = \sigma_{y0}(x-x_0)/a_1$  を受ける無限

板中のk=1~m個のだ円孔の干渉問題を例として説明する。この問題は重ね合せの原理に基づく体積力法の考え方により、無限板中の1点(ξ<sub>k</sub>, η<sub>k</sub>)に集中力が作用するときの任意の点(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)の応力場の解を用いて解くことができる。ここでx<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>はi番目のだ円孔の表す座標である。(図2)このとき問題はk番目のだ円孔となるべき仮想境界上に分布させたx, y方向の体積力密度ρ<sub>x</sub><sup>k\*</sup>, ρ<sub>y</sub><sup>k\*</sup>(k=1, ..., m)を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される。ここで、φ<sub>k</sub>(ξ<sub>k</sub> = a<sub>k</sub> cos φ<sub>k</sub>, η<sub>k</sub> = b<sub>k</sub> sin φ<sub>k</sub>)は着力点を表わす角度で注目点を表わす角度θ<sub>i</sub>(x<sub>i</sub> = a<sub>i</sub> cos θ<sub>i</sub>, y<sub>i</sub> = b<sub>i</sub> sin θ<sub>i</sub>)と区別して用いる。

$$-(1/2) \left\{ \rho_x^{i*}(\theta_i) \cos \theta_{i0} + \rho_y^{i*}(\theta_i) \sin \theta_{i0} \right\} + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_m^{F_x}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^{k*}(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_m^{F_y}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^{k*}(\phi_k) ds = -(\sigma_x^\infty \cos^2 \theta'_{i0} + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta'_{i0}) \quad \dots\dots\dots(1-a)$$

$$-(1/2) \left\{ -\rho_x^{i*}(\theta_i) \sin \theta_{i0} + \rho_y^{i*}(\theta_i) \cos \theta_{i0} \right\} + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_m^{F_x}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^{k*}(\phi_k) ds + \sum_{k=1}^m \int_0^{2\pi} K_m^{F_y}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^{k*}(\phi_k) ds = -(\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \cos \theta'_{i0} \sin \theta'_{i0} \quad \dots\dots\dots(1-b)$$

式(1)で、θ'\_{i0} = θ\_{i0} + ψ<sub>i</sub>で、θ\_{i0}はi番目のだ円孔の境界上の点(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)におけるだ円の外向き法線とx軸のなす角度、ψ<sub>i</sub>はx軸とx軸のなす角度である。また、式(1)に含まれる被積分関数のうち、K<sub>m</sub><sup>F<sub>x</sub></sup>(φ<sub>k</sub>, θ<sub>i</sub>)を例にとると、これは、孔のない無限板Mのk番目のだ円となる仮想境界上の一点に単位大きさ集中力(x方向)が作用するときのi番目のだ円となる境界上の点に生じる法線方向の応力σ<sub>x</sub>を意味する。特異積分方程式(1)の未知関数ρ<sub>x</sub><sup>k\*</sup>, ρ<sub>y</sub><sup>k\*</sup>は次式で表される。

$$\rho_x^{k*} = \frac{dF_x^{k*}}{ds}, \quad \rho_y^{k*} = \frac{dF_y^{k*}}{ds} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここでdF<sub>x</sub><sup>k\*</sup>を例にとると、これは微小長さds = √(dx<sub>k</sub>)<sup>2</sup> + (dy<sub>k</sub>)<sup>2</sup>に作用する体積力の合力のx<sub>k</sub>方向成分である。

以下では、ρ<sub>x</sub><sup>k\*</sup>を例にとって説明するが、ρ<sub>y</sub><sup>k\*</sup>についても同様に説明できる。いま、式(3)で定義される関数を考えると、これらの関数は、それぞれ式(4.a)~(4.d)の関係を満たす。

$$\begin{aligned} \rho_{x1}^{k*}(\phi_k) &= \{ \rho_x^{k*}(\phi_k) + \rho_x^{k*}(\pi - \phi_k) + \rho_x^{k*}(\pi + \phi_k) + \rho_x^{k*}(-\phi_k) \} / 4 \\ \rho_{x2}^{k*}(\phi_k) &= \{ \rho_x^{k*}(\phi_k) + \rho_x^{k*}(\pi - \phi_k) - \rho_x^{k*}(\pi + \phi_k) - \rho_x^{k*}(-\phi_k) \} / 4 \\ \rho_{x3}^{k*}(\phi_k) &= \{ \rho_x^{k*}(\phi_k) - \rho_x^{k*}(\pi - \phi_k) - \rho_x^{k*}(\pi + \phi_k) + \rho_x^{k*}(-\phi_k) \} / 4 \\ \rho_{x4}^{k*}(\phi_k) &= \{ \rho_x^{k*}(\phi_k) - \rho_x^{k*}(\pi - \phi_k) + \rho_x^{k*}(\pi + \phi_k) - \rho_x^{k*}(-\phi_k) \} / 4 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\begin{aligned} \rho_{x1}^{k*}(\phi_k) &= \rho_{x1}^{k*}(\pi - \phi_k) = \rho_{x1}^{k*}(\pi + \phi_k) = \rho_{x1}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots\dots(4.a) \\ \rho_{x2}^{k*}(\phi_k) &= \rho_{x2}^{k*}(\pi - \phi_k) = -\rho_{x2}^{k*}(\pi + \phi_k) = -\rho_{x2}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots(4.b) \\ \rho_{x3}^{k*}(\phi_k) &= -\rho_{x3}^{k*}(\pi - \phi_k) = -\rho_{x3}^{k*}(\pi + \phi_k) = \rho_{x3}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots(4.c) \\ \rho_{x4}^{k*}(\phi_k) &= -\rho_{x4}^{k*}(\pi - \phi_k) = \rho_{x4}^{k*}(\pi + \phi_k) = -\rho_{x4}^{k*}(-\phi_k) \quad \dots(4.d) \end{aligned}$$

式(4)より、関数ρ<sub>x1</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)~ρ<sub>x4</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)を0 ≤ φ<sub>k</sub> ≤ π/2の範囲で求めることは、関数ρ<sub>x</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)を0 ≤ φ<sub>k</sub> ≤ 2πの全範囲で求めることに等しい。すなわち、0 ≤ φ<sub>k</sub> ≤ π/2でρ<sub>x1</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)~ρ<sub>x4</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)が与えられるとき、式(5)に示されるように、0 ≤ φ<sub>k</sub> ≤ 2πでのρ<sub>x</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)が与えられる。

$$\begin{aligned} \rho_x^{k*}(\phi_k) &= \rho_{x1}^{k*}(\phi_k) + \rho_{x2}^{k*}(\phi_k) + \rho_{x3}^{k*}(\phi_k) + \rho_{x4}^{k*}(\phi_k) \quad \dots\dots(5.a) \\ \rho_x^{k*}(\pi - \phi_k) &= \rho_{x1}^{k*}(\phi_k) + \rho_{x2}^{k*}(\phi_k) - \rho_{x3}^{k*}(\phi_k) - \rho_{x4}^{k*}(\phi_k) \quad \dots(5.b) \\ \rho_x^{k*}(\pi + \phi_k) &= \rho_{x1}^{k*}(\phi_k) - \rho_{x2}^{k*}(\phi_k) - \rho_{x3}^{k*}(\phi_k) + \rho_{x4}^{k*}(\phi_k) \quad \dots(5.c) \\ \rho_x^{k*}(-\phi_k) &= \rho_{x1}^{k*}(\phi_k) - \rho_{x2}^{k*}(\phi_k) + \rho_{x3}^{k*}(\phi_k) - \rho_{x4}^{k*}(\phi_k) \quad \dots(5.d) \end{aligned}$$

いま、基本密度関数w<sub>x1</sub>(φ<sub>k</sub>)~w<sub>x4</sub>(φ<sub>k</sub>)およびw<sub>y1</sub>(φ<sub>k</sub>)~w<sub>y4</sub>(φ<sub>k</sub>)を式(6.a)~(6.h)で定義すると、式(6.a)~(6.h)はそれぞれ(4.a)~(4.d)を満足する。

$$\begin{aligned} w_{x1}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) / \cos \phi_k \quad \dots\dots\dots(6.a) \\ w_{x2}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \tan \phi_k \quad \dots\dots\dots(6.b) \\ w_{x3}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(6.c) \\ w_{x4}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \sin \phi_k \quad \dots\dots\dots(6.d) \\ w_{y1}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) / \sin \phi_k \quad \dots\dots\dots(6.e) \\ w_{y2}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \quad \dots\dots\dots(6.f) \\ w_{y3}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cot \phi_k \quad \dots\dots\dots(6.g) \\ w_{y4}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cos \phi_k \quad \dots\dots\dots(6.h) \end{aligned}$$

ここで、w<sub>x3</sub>(φ<sub>k</sub>), w<sub>y2</sub>(φ<sub>k</sub>)は引張り応力場のだ円孔を厳密に表現する密度であり、w<sub>x2</sub>(φ<sub>k</sub>), w<sub>y3</sub>(φ<sub>k</sub>)は純粋せん断を受けるだ円孔を厳密に表現する密度である。またn<sub>x</sub>, n<sub>y</sub>は、仮想境界上の点(x<sub>k</sub>, y<sub>k</sub>)における単位外向き法線ベクトルのx<sub>k</sub>座標成分cos θ<sub>k0</sub>およびy<sub>k</sub>座標成分sin θ<sub>k0</sub>であり、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} n_x(\phi_k) &= \frac{b_k \cos \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} = \cos \theta_{k0} \\ n_y(\phi_k) &= \frac{b_k \sin \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} = \sin \theta_{k0} \end{aligned} \quad \dots\dots(7)$$

このような、関数を用いてρ<sub>x1</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)~ρ<sub>x4</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)を式(8)のように表現すると、基本密度に乗ずる重み関数ρ<sub>x1</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>)~ρ<sub>x4</sub><sup>k\*</sup>(φ<sub>k</sub>) (未知関数)が満足すべき条件は式(9)で表される。

$$\begin{aligned} \rho_{x1}^{k*}(\phi_k) &= \rho_{x1}(\phi_k) w_{x1}(\phi_k), \rho_{x2}^{k*}(\phi_k) = \rho_{x2}(\phi_k) w_{x2}(\phi_k) \quad \dots\dots(8) \\ \rho_{x3}^{k*}(\phi_k) &= \rho_{x3}(\phi_k) w_{x3}(\phi_k), \rho_{x4}^{k*}(\phi_k) = \rho_{x4}(\phi_k) w_{x4}(\phi_k) \end{aligned}$$

$$f(\phi_k) = f(\pi - \phi_k) = f(\pi + \phi_k) = f(-\phi_k) \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここでf(φ<sub>k</sub>)はρ<sub>x1</sub>(φ<sub>k</sub>)~ρ<sub>x4</sub>(φ<sub>k</sub>)またはρ<sub>y1</sub>(φ<sub>k</sub>)~ρ<sub>y4</sub>(φ<sub>k</sub>)を意味する。

結局、 $\rho_{xi}^*(\phi_k)$  は  $\rho_{xi}^*(\phi_k) \sim \rho_{xi}^*(\phi_k)$  と  $w_{x1}(\phi_k) \sim w_{x4}(\phi_k)$  を用いて次のように表される。

$$\rho_{xi}^*(\phi_k) = \rho_{x1}(\phi_k)w_{x1}(\phi_k) + \rho_{x2}(\phi_k)w_{x2}(\phi_k) + \rho_{x3}(\phi_k)w_{x3}(\phi_k) + \rho_{x4}(\phi_k)w_{x4}(\phi_k) \dots\dots(10)$$

さらに、重み関数を連続関数として近似するために多項式を用いる。ここでは次のような表現を用いる。

$$\begin{aligned} \rho_{x1}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M a_n^k t_n(\phi), & \rho_{x2}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M b_n^k t_n(\phi), \\ \rho_{x3}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M c_n^k t_n(\phi), & \rho_{x4}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M d_n^k t_n(\phi), \\ \rho_{y1}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M e_n^k t_n(\phi), & \rho_{y2}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M f_n^k t_n(\phi), \\ \rho_{y3}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M g_n^k t_n(\phi), & \rho_{y4}^k(\phi) &= \sum_{n=1}^M h_n^k t_n(\phi), \end{aligned} \dots\dots(11)$$

$$t_n(\phi_k) = \cos\{2(n-1)\phi_k\} \dots\dots\dots(12)$$

ここで、Mは  $0 \leq \phi \leq \pi/2$  の範囲の選点数である<sup>1)</sup>。以上の離散化の方法により、式(1),(2)は係数  $a_n^k \sim h_n^k$  ( $k=1, \dots, m$ ) についての8Mm元の連立方程式に還元できる。

### 3. 新解析法によるだ円孔が単独に存在するときの解析結果

2節に示した方法によって図1(b),(c),(d)の問題を解析した。表2(a)~(c)は応力集中係数の収束状況を示しているが、選点数2以上で厳密解が得られた。表1と比較すれば式(1)~(12)で示される方法の有効性が明らかである。図3は図1(b)の問題において選点数  $M \geq 2$  のときの未知関数  $\rho_{xi} \sim \rho_{y4}$  の解析結果を図示したものである。図3からわかるようにだ円の形状比に関わらず、未知関数  $\rho_{xi}$ ,  $\rho_{y4}$  以外はすべて0となっている。これは図1(b)の曲げ応力場は、x軸については対称性、y軸については逆対称性があり、この条件をみたまものは式(6)の基本密度の中で  $w_{x1}$  と  $w_{y4}$  のみであるためである。図3より  $\rho_{x1} \propto \cos 2\phi$  であることがわかる。

図4は図1(d)の問題において選点数  $M \geq 2$  のときの未知関数  $\rho_{xi} \sim \rho_{y4}$  の解析結果を図示したものである。図からもわかるようにだ円の形状比に関わらず、未知関数  $\rho_{x1}, \rho_{x4}, \rho_{y1}, \rho_{y4}$  以外はすべて0となっている。図1(d)の問題でだ円境界上で打ち消すべき応力  $\sigma_x^*, \tau_{xy}^*$  は次式で表される。

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x^* \cos^2 \theta_0 + \sigma_y^* \sin^2 \theta_0 + 2\tau_{xy}^* \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ \tau_{xy}^* &= (\sigma_x^* - \sigma_y^*) \sin \theta_0 \cos \theta_0 + \tau_{xy}^* (\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0) \end{aligned} \dots\dots(13)$$

脚注<sup>1)</sup>。M=1,2,3.であるが、後述するようにM $\geq$ 2とする必要がある。これはM=2の式(12)の表現がだ円孔が純曲げを受ける場合を表現するため必要であるからである。

Table.2 Results of new method as shown in eqn (1)~(12)

(a)  $\sigma_y$  at (a,0) in Fig.1-(b)

M	a/b		
	0.5	1	2
1	1.3836	1.8250	2.8298
2	1.5000	2.0000	3.0000
3	1.5000	2.0000	3.0000
	⋮	⋮	⋮
∞	1.5000	2.0000	3.0000

(b)  $\sigma_y$  at (a,0) in Fig.1-(c)

M	a/b		
	0.5	1	2
1	3.3836	4.8250	7.8298
2	3.5000	5.0000	8.0000
3	3.5000	5.0000	8.0000
	⋮	⋮	⋮
∞	3.5000	5.0000	8.0000

(c)  $\sigma_x$  at A in Fig.1-(d) when  $\alpha=60^\circ$

M	a/b=1.0
1	1.7500
2	2.0000
3	2.0000
	⋮
∞	2.0000

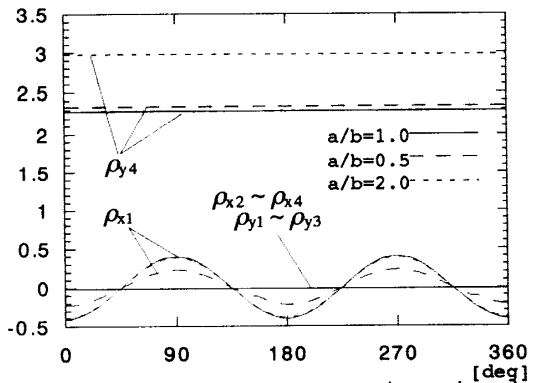
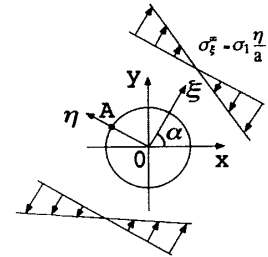


Fig.3 Values of unknown functions in Fig.1(b)

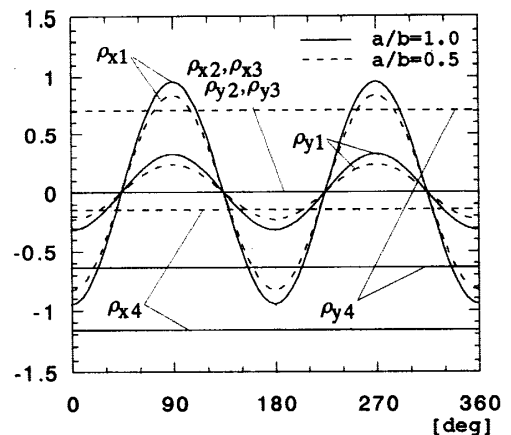


Fig4. Values of unknown functions in Fig.1(d) when  $\alpha=60^\circ$

ここで $\theta_0$ はだ円孔の外向き法線とx軸のなす角度である。また $\sigma_x^{\infty}, \sigma_y^{\infty}, \tau_{xy}^{\infty}$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} \sigma_x^{\infty} &= \sigma_{\xi}^{\infty} \cos^2 \alpha = -C \sin \alpha \cos^2 \alpha \cdot x + C \cos^3 \alpha \cdot y \\ \sigma_y^{\infty} &= \sigma_{\xi}^{\infty} \sin^2 \alpha = -C \sin^3 \alpha \cdot x + C \sin^2 \alpha \cos \alpha \cdot y \\ \tau_{xy}^{\infty} &= \sigma_{\xi}^{\infty} \sin \alpha \cos \alpha = -C \sin^2 \alpha \cos \alpha \cdot x + C \sin \alpha \cos^2 \alpha \cdot y \\ \sigma_{\xi}^{\infty} &= C \eta = C(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \\ (C &= \sigma_0/a : \text{const}) \end{aligned} \quad \dots\dots(14)$$

式(14)からわかるように境界条件は

- (1) x軸について逆対称, y軸について対称な場合
  - (2) x軸について対称, y軸について逆対称な場合
- の組み合わせで表現される。従って, その条件を満足する未知関数 $\rho_{x1}, \rho_{x4}, \rho_{y1}, \rho_{y4}$ 以外はすべて0となる。結局, 図1(d)の問題を表現する体積力の密度は

$$\begin{aligned} \rho_x^*(\phi) &= \rho_{x1} w_{x1} + \rho_{x4} w_{x4} = \frac{(C_1 \cos 2\phi + C_2 \sin 2\phi)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} \\ \rho_y^*(\phi) &= \rho_{y1} w_{y1} + \rho_{y4} w_{y4} = \frac{(C_3 \cos 2\phi + C_4 \sin 2\phi)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}} \end{aligned} \quad \dots(15)$$

の形式で表されることがわかる( $c_1 \sim c_4$ は定数)。式(1)-(12)に示した解析法の式(11),(12)で $M=2$ 以上にすれば式(15)の体積力密度を表現できることがわかる。

**4. 新解析法によるだ円孔の干渉問題の解析結果**

次に図5に示すような, 遠方でy方向の面内曲げ応力 $\sigma_{y0} x/a$ を受ける無限板中に大きさの等しい2つのだ円孔が存在するときの干渉問題を示す。表3は図5において,  $(x_1, y_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), a=0.6, b=0.7$ のときの未知関数 $\rho_{x1} \sim \rho_{x4}$ の収束状況を示している。この表からもわかるように未知関数は選点数 $M=8, 12$ で有効数字4桁程度までほぼ一致した。また, だ円孔縁全周における境界条件の満足度をしらべると

$$\begin{aligned} M=4 \text{ のとき, } & 10^{-4} \leq |\sigma_n \text{ or } \tau_n| \leq 10^{-2} \\ M=8 \text{ のとき, } & 10^{-6} \leq |\sigma_n \text{ or } \tau_n| \leq 10^{-6} \\ M=12 \text{ のとき, } & 10^{-11} \leq |\sigma_n \text{ or } \tau_n| \leq 10^{-9} \end{aligned}$$

であり, 高い境界条件の満足度が得られた。

図6~8は図5において,  $a=0.6, b=0.7$ として, だ円孔 $i=2$ は原点 $(0,0)$ に固定し, だ円孔 $i=1$ の中心座標を $(2,0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0,2)$ と変化させたときの境界上( $i=1,2$ )の応力分布を示している。だ円孔 $i=1$ が $(0,2)$ の位置にあるときは対称性より $i=1$ の分布を省略した。図6~8からわかるようにだ円孔 $i=2$ がだ円孔 $i=1$ に及ぼす干渉の効果は, だ円孔 $i=1$ がだ円孔 $i=2$ に及ぼす干渉の効果に比べ小さくなっている。これは $i=2$ で打ち消す応力場が純曲げであるため表面力の合力が0になり, 応力が解放されて

もその周辺での影響が少ないためである。干渉の効果が大きく現れるのは2つの孔が最も近くなる位置で, 離れた位置ではあまり影響がない。

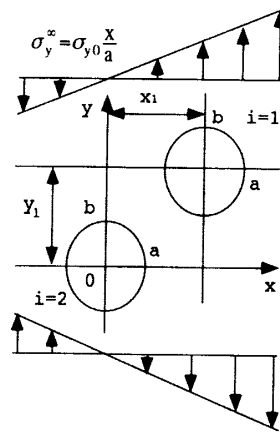


Fig.5 Two equal elliptical holes

Table.3 Convergence of unknown functions when  $(x_1, y_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}), a=0.6, b=0.7, i=2$  in Fig.5

	M	$\rho_{x1}$	$\rho_{x2}$	$\rho_{x3}$	$\rho_{x4}$
0	4	-0.5058	-0.5101	-0.4566	-0.4666
	8	-0.5060	-0.5099	-0.4567	-0.4658
	12	-0.5060	-0.5099	-0.4567	-0.4658
20	4	-0.4065	-0.4569	-0.4684	-0.4431
	8	-0.4064	-0.4570	-0.4682	-0.4430
	12	-0.4064	-0.4570	-0.4682	-0.4430
40	4	-0.1172	-0.3172	-0.4694	-0.3726
	8	-0.1173	-0.3172	-0.4695	-0.3727
	12	-0.1173	-0.3172	-0.4695	-0.3727
60	4	0.2585	-0.1616	-0.4255	-0.2778
	8	0.2586	-0.1616	-0.4253	-0.2776
	12	0.2586	-0.1616	-0.4253	-0.2776
80	4	0.5181	-0.0698	-0.3742	-0.2106
	8	0.5181	-0.0698	-0.3745	-0.2112
	12	0.5181	-0.0698	-0.3745	-0.2112
90	4	0.5541	-0.0581	-0.3659	-0.2012
	8	0.5540	-0.0580	-0.3664	-0.2020
	12	0.5540	-0.0580	-0.3664	-0.2020

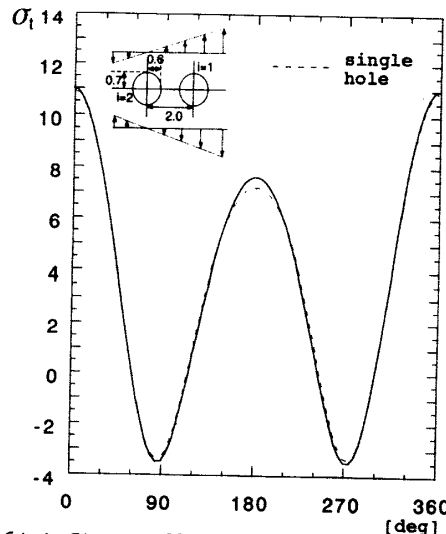


Fig.6(a) Stress distribution along boundary  $i=1$

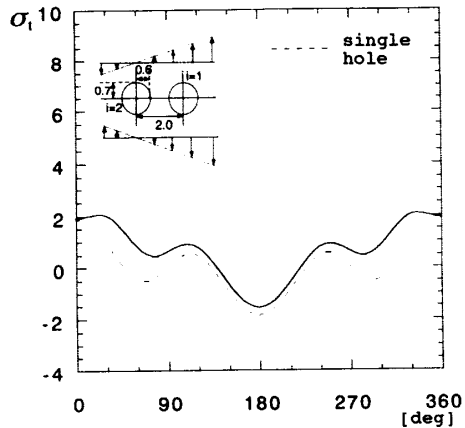


Fig.6(b) Stress distribution along boundary i=2

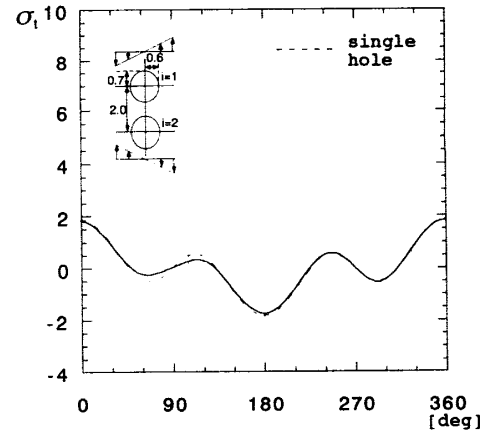


Fig.8 Stress distribution along boundary i=2

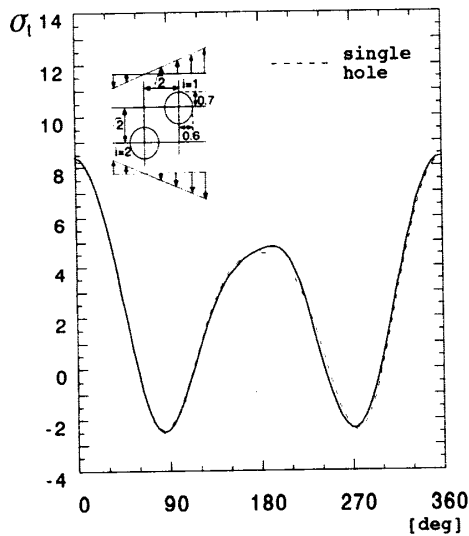


Fig.7(a) Stress distribution along boundary i=1

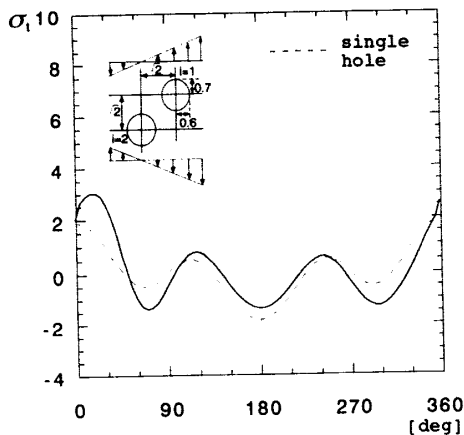


Fig.7(b) Stress distribution along boundary i=2

## 5. 結 言

本研究では、面内曲げ問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法の精度と有効性を考察した。その結果、以下のような知見が得られた。

(1) 従来の体積力法で1だ円孔問題を解析すると、引張応力場では選点数1で厳密解となるが、曲げ応力場では選点数をある程度大きくする必要がある [表1(a),(b)].

(2) 純曲げ[図1(d)]を受ける1だ円孔を厳密に表現する体積力の密度は以下の形式となる( $c_1 \sim c_4$ : 定数)。

$$\rho_x(\phi) = \frac{(c_1 \cos 2\phi + c_2 \sin 2\phi)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}, \quad \rho_y(\phi) = \frac{(c_3 \cos 2\phi + c_4 \sin 2\phi)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}}$$

(3) 著者が提案する新解析法 [式(1)~(12)]では選点数  $M \geq 2$  とすることで、純曲げまたはそれ他の応力場の組み合わせを受ける1だ円孔の問題[図1(b)~(d)]に対して厳密解を与える。

(4) 新解析法を面内曲げを受ける2だ円孔の干渉問題に適用した場合、良好な未知関数の収束性と高い境界条件の満足度が得られ、その有効性が確認された。

## 文 献

- (1) 例えば Timoshenko, S.P., Theory of Elasticity, (Third Ed), McGraw-Hill 187-194.
- (2) 西谷弘信, 電子計算機による二次元応力問題の解法, 機誌, 70-580, (1967), 627-635.
- (3) 西谷弘信, 切欠き干渉効果の近似計算法とその応用, 機誌, 71-589, (1968), 209-221.
- (4) 野田尚昭, 松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法 (第1報, 基礎の理論と境界条件の満足度の検討), 機論, 58-555, A(1992), 2179-2184.
- (5) 野田尚昭, 松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法 (第2報, 切欠きの干渉問題の一般的解析法), 機論, 59-559, A(1993), 785-791.
- (6) 野田尚昭, 松尾忠利, せん断応力場におけるだ円形介在物の干渉効果の解析, 機論, 60-580, (1994), 2767-2773.
- (7) 野田尚昭, 松尾忠利, 応力集中問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法 (第3報, 三次元問題への応用), 機論, 59-564, A(1994), 1964-1970.
- (8) 野田尚昭, 小笠原望, 松尾忠利, 回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 62-596, (1996), 1051-1058.