

有限要素法による複合材料の縦弾性係数の複合則の検討と
近似解法の提案*野田 尚 昭*¹, 西谷 弘 信*²
高瀬 康*³, 武内 健一郎*⁴

Examination of Law of Mixture for Composites Using FEM Analysis

Nao-Aki NODA, Hironobu NISITANI,
Yasushi TAKASE and Ken-Ichiro TAKEUCHI

In this paper, effect of shape of inclusions on the elastic modulus of composite materials is considered when equally shaped 2D inclusions are arranged in matrix. The effective elastic modulus of the composite materials is numerically analyzed by the application of FEM. Accuracy of approximate formula based on law of mixture is examined. From the comparison between the results of rectangular and elliptical inclusions, it is found that the effective elastic modulus is determined by two major parameters, that is, (i) the area fraction of inclusions projected in tensile direction, and (ii) the volume fraction of inclusion, almost independent of shape of inclusion. A convenient method of calculation is newly proposed for the effective elastic modulus of composites by using the replacement of the equivalent rectangular inclusions.

Key Words: Elasticity, Law of Mixture, Composite Material, Finite Element Method, Micromechanics, Effective Elastic Modulus

1. 複合則について

異なる材料からなる複合材料の平均的な縦弾性係数 E を、その構成材料(母材と介在物)の弾性定数と体積率から予測する問題は古くから多くの研究者によって取り扱われている。特に、最も基本的な並列モデルと直列モデル(図1)を考えると、次式で表わされる複合則が成立することはよく知られている⁽¹⁾。

$$E^{*n} = V_I E_I^n + (1 - V_I) E_M^n \text{ ----- (1)}$$

ここで、 V_I は介在物(強化繊維)の体積率、 E_M 、 E_I は母材および繊維の縦弾性係数であり、 n の値は並列モデルに対して $n=1$ 、直列モデルに対して $n=-1$ である。

いま、同一形状介在物が周期配列をなす場合を考える。ここではまず図2に示すような基本的な2次元配列(板厚を1とする)を仮定して、介在物の形状が複合材料の縦弾性係数に及ぼす影響を考察する。このよ

うな複合材料の縦弾性係数を予測することは、粒子分散型複合材料の2次元モデル解析、あるいは繊維強化型複合材料が繊維と垂直方向に荷重を受ける場合の解析などに有用と考えられる。図2では多くの場合に介在物(強化粒子または強化繊維)が、だ円で近似できることを考慮してその形状をだ円として表わしている。これまでの研究では、図1のような問題に対しても、単純な複合則[式(1)]を拡張した取り扱いがなされている。すなわち、式(1)が介在物の体積率の関数となっていることから、実験結果を体積率の関数と

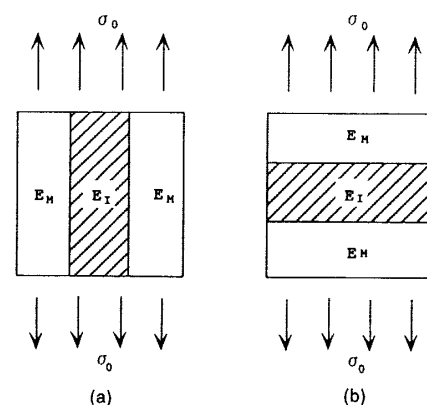


Fig.1 Parallel and serial models of composites

* 原稿受付 1997年7月14日。

¹ 正員,九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。² 正員,九州産業大学工学部(☎813-0004 福岡市東区松香台2-3-1)。³ 准員,九州工業大学工学部。⁴ 学生員,九州工業大学大学院。

して整理したり⁽¹⁾、または、以下で述べるような方法^{(2)・(6)}がよく用いられている。

図2 (a) を図2 (b) の分布で置き換え、その単位領域 (ユニットセル) を図3として取り出して考えるとき、図3のモデルのdx部分の縦弾性係数E(x)は、直列モデルを考えることによって、

$$E(x) = \frac{l_y}{\frac{l(x)}{E_I} + \frac{l_y - l(x)}{E_M}} \quad \text{----- (2)}$$

で与えられる。さらに全体の縦弾性係数E*の近似式はdx部分を並べた並列モデルを考えることによって次式で与えられる。

$$E^* = \frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} E(x) dx = \frac{1}{l_x} \int_0^{l_x} \frac{l_y}{\frac{l(x)}{E_I} + \frac{l_y - l(x)}{E_M}} dx \quad \text{----- (3)}$$

式(2)、(3)の近似式による評価は $E_I/E_M \geq 1$ で有効である [たとえば、式(3)は $E_I=0$ で $E^*=1 - a'/l_x$ (a' はだ円の短半径)となるが、実際のEは a'/l_x のみでは決まらない]。式(2)、(3)で表わされるようなモデルや近似式による評価はGreszczuk⁽³⁾、山脇ら⁽⁴⁾、植村ら⁽⁵⁾、村上ら⁽⁶⁾によって検討されている。特に、村上ら⁽⁶⁾は単位領域 (ユニットセル) の寸法が 1×1 のとき、だ円形介在物の周期配列問題を体積法で系統的に解析し、だ円形介在物の荷重軸投影面積率が0.8以下であれば、式(3)は誤差20%以下であることを示した。しかし、介在物の形状が円形やだ円形などとは異なる場合や単位領域の寸法が 1×1 とは異なる場合にその縦弾性係数を正確に予測する方法はこれまで検討されていない。

そこで本研究では以下を目的とした。

(1) 縦弾性係数の拡張複合則 [式(3)] の精度の詳細な検討

(2) 介在物の形状が異なることの縦弾性係数への影響を調べること

(3) 有限要素法による簡便な縦弾性係数評価法を提案すること。

そして、これらの目的のため、周期的に配列している介在物 (図4) の有限要素法 (FEM) 解析を行った。特に介在物の形状が図4に示すような長方形の場合には領域の要素分割は極めて容易である。このため、上記の目的(2)に関連して、実際の介在物を等価な長方形介在物で置き換えることができる条件を求めれば、目的(3)が達成できるものと考えられる。

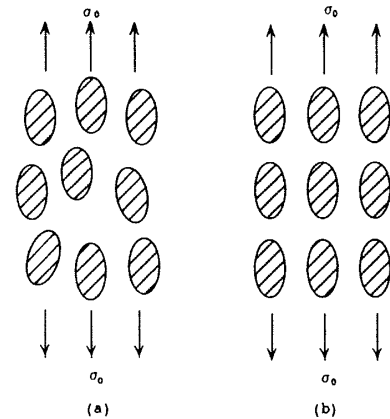


Fig.2 Periodic arrangement of elliptical inclusions

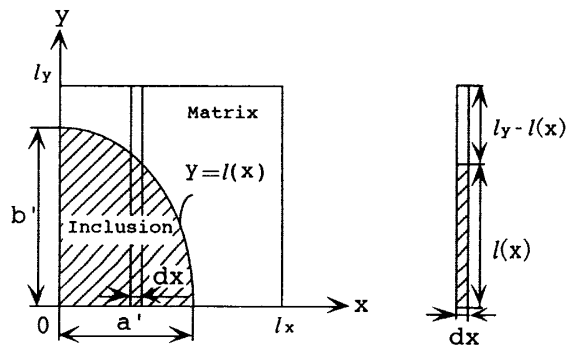


Fig.3 Illustration of eq(2)

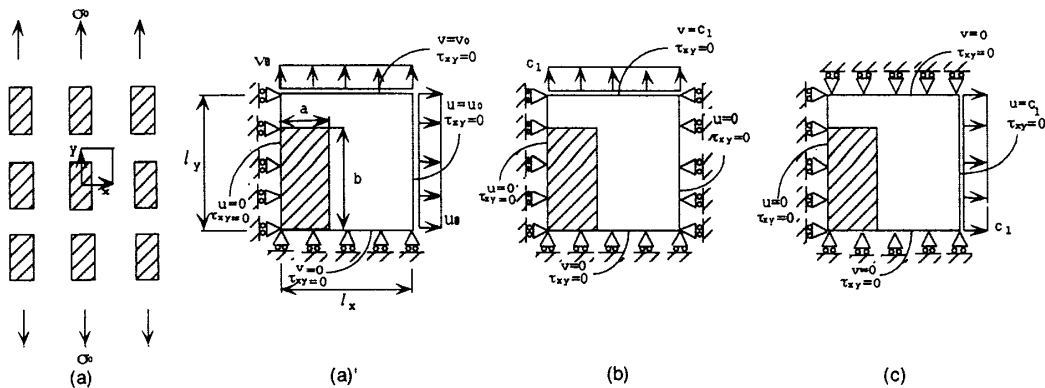


Fig.4 Given problem(a) and auxiliary problems (b)(c)

2. FEMによる解析方法と精度の検討

図4 (a) の長方形介在物が周期的に長方形配列をなす問題について、各配列の弾性特性の解析を有限要素法を用いて解析する手順を以下に示す。

2.1 境界条件の与え方 有限要素法で解析するために図4 (a) から (a)' に示すようなユニットセルを取り出す。このときの境界条件は、図4 (a)' について

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} & x=0 \text{ で } 0 \leq y \leq l_y \text{ のとき } u=0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(II)} & x=l_x \text{ で } 0 \leq y \leq l_y \text{ のとき } u=u_0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(III)} & y=0 \text{ で } 0 \leq x \leq l_x \text{ のとき } v=0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(IV)} & y=l_y \text{ で } 0 \leq x \leq l_x \text{ のとき } v=v_0, \tau_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \text{----- (4)}$$

また $\int_0^{l_x} \sigma_x|_{y=0, l_y} dx = \sigma_0 \times l_x, \int_0^{l_y} \sigma_y|_{x=0, l_x} dy = 0 \text{ --- (5)}$

式 (4) の u_0, v_0 は未知であるので境界条件 (4), (5) を直接満たすことはできない。そこで以下の補助問題 [図4 (b), (c)] を解析する。

補助問題：図4 (b) の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} & x=0 \text{ で } 0 \leq y \leq l_y \text{ のとき } u=0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(II)} & x=l_x \text{ で } 0 \leq y \leq l_y \text{ のとき } u=0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(III)} & y=0 \text{ で } 0 \leq x \leq l_x \text{ のとき } v=0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(IV)} & y=l_y \text{ で } 0 \leq x \leq l_x \text{ のとき } v=C_1, \tau_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \text{----- (6)}$$

ここで C_1 は適当に与えた定数である。式 (6) の境界条件のもとでFEMで解析したとき境界 $x=0, l_x$ で $0 \leq y \leq l_y$ のとき得られる x 方向の合力を F_1 , 境界 $y=0, l_y$ で $0 \leq x \leq l_x$ のとき得られる y 方向の合力を F_2 とすると

$$\int_0^{l_y} \sigma_x|_{x=0, l_x} dy = F_1, \int_0^{l_x} \sigma_y|_{y=0, l_y} dx = F_2 \text{ --- (7)}$$

一方、補助問題：図4 (c) の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} & x=0 \text{ で } 0 \leq y \leq l_y \text{ のとき } u=0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(II)} & x=l_x \text{ で } 0 \leq y \leq l_y \text{ のとき } u=C_1, \tau_{xy}=0 \\ \text{(III)} & y=0 \text{ で } 0 \leq x \leq l_x \text{ のとき } v=0, \tau_{xy}=0 \\ \text{(IV)} & y=l_y \text{ で } 0 \leq x \leq l_x \text{ のとき } v=0, \tau_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

式 (5) の境界条件のもとでFEMで解析したとき境界 $x=0, l_x$ で $0 \leq y \leq l_y$ のとき得られる x 方向の合

力を F_3 , 境界 $y=0, l_y$ で $0 \leq x \leq l_x$ のとき得られる y 方向の合力を F_4 とすると

$$\int_0^{l_y} \sigma_x|_{x=0, l_x} dy = F_3, \int_0^{l_x} \sigma_y|_{y=0, l_y} dx = F_4 \text{ --- (9)}$$

以上より図4 (a) の解を (σ_a, u_a) , 図4 (b) の解を (σ_b, u_b) , 図4 (c) の解を (σ_c, u_c) とするとき

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= A\sigma_b + B\sigma_c, u_a = Au_b + Bu_c \\ A &= \frac{\sigma_0 l_x}{F_2 - F_4(F_1/F_3)}, B = -\frac{(F_1/F_3)\sigma_0 l_x}{F_2 - F_4(F_1/F_3)} \end{aligned} \right\} \text{----- (10)}$$

ここで、A, Bは

$$\left. \begin{aligned} A \times F_1 + B \times F_3 &= 0 \\ A \times F_2 + B \times F_4 &= \sigma_0 l_x \end{aligned} \right\} \text{----- (11)}$$

が成立するように決められた定数である。図4 (a) および式 (1), (2) に示される変位 u_0, v_0 は、以下のように示される。

$$u_0 = BC_1, v_0 = AC_1 \text{ ----- (12)}$$

以上の手順によって、図4 (a) に示すような複合材料の平均的な弾性定数 E と ν が以下のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{\sigma_0}{(v_0/l_y)} = \frac{\{F_2 - F_4(F_1/F_3)\}/l_x}{C_1/l_y} \\ \nu &= \frac{u_0/l_x}{v_0/l_y} = \frac{F_3 l_y}{F_1 l_x} \end{aligned} \right\} \text{--- (13)}$$

2.2 解析精度の検討

以下の計算では平面応力で行った。いま介在物の体積率 V_1 は図4のユニットセルの寸法 $l_x \times l_y = 1 \times 1$ とする (板厚を1とする) と長方形介在物のとき $V_1 = a b$, だ円形介在物のとき $V_1 = \pi a' b'/4$ (a', b' はだ円の短半径と長半径)

Table.1 Results of circular inclusions

$\lambda = a/l_x$	$\sigma_{\theta\theta}/\sigma_0$		$\Delta C/C_0$	
	EVEEM -0.5	EVEEM -2.0	EVEEM -0.5	EVEEM -2.0
0.2	1.490 (1.500)	0.609 (0.616)	0.018 (0.019)	-0.019 (-0.019)
0.5	1.537 (1.534)	0.582 (0.577)	0.150 (0.151)	-0.117 (-0.118)
0.8	1.749 (1.769)			

$$\sigma_0 = \sigma_{\theta\theta}|_{\lambda \rightarrow 0}, C_0 = c|_{\lambda \rightarrow 0}, \Delta c/c_0 = E_M/E - 1$$

である。また、ポアソン比は母材と介在物の両方で $\nu_M = \nu_I = 0.3$ とした。

まず、はじめに表1に示す周期的に配列された円形介在物群を持つ板の引張を解析し、石田らによるローラン展開法による解⁽⁸⁾との比較を行った。解析には四辺形4節点要素を用いて行った。図5(a)に要素分割図の例を示す。図5(a)の円形介在物では要素数1560、節点数1613、図5(b)の長方形介在物では要素数2500、節点数2601である。計算に際しては介在物断面比 a/l_x 、剛性比 E_I/E_M をパラメータとして点Aにおける母材と介在物の応力とコンプライアンス増加率を表1に示した。

表1の結果からわかる通り、石田らのローラン展開法による解(図からの読取値)との誤差は最大でも1%程度であり、図5程度の要素分割で良好な結果が得られていると考えられる。

3. 拡張複合則 [式(3)] の精度の検討

3.1 ユニットセル形状比 l_x/l_y と介在物体積率 V_I を固定した場合の E/E_M と a/b の関係

図6は介在物体積率を一定 ($V_I = 0.16$) として形状比 a/b を変化させたとき、上述の方法で解析した長方形介在物の縦弾性係数の変化を示す。ここでユニットセルの形状比 $l_x/l_y = 1$ と固定した。 $E_I/E_M = 2$ では体積率一定のときの縦弾性係数の変化は小さい。しかし、 $E_I/E_M = 5, 20, 10^5$ と弾性比が大きくなるにつれて体積率一定でも縦弾性係数は形状比によって大きく異なることがわかる。また、式(3)の誤差は $E_I/E_M = 10^5$ の場合に特に大きく現われるので、以下ではこの場合を詳細に検討する。

表2に $E_I/E_M = 10^5$ として、介在物体積率が $V_I = 0.16$ 、または $V_I = 0.36$ と一定の場合、縦弾性係数の変化を拡張複合則 [式(3)] の結果と比較し

て示す。介在物の形状が引張方向に細長くなるにつれて縦弾性係数は大きくなるが、特に $b/l_y = 0.8 \sim 0.9$ 付近で近似式の精度は低下していることがわかる。

3.2 介在物の体積率 V_I を固定した場合の E/E_M と l_x/l_y (a/b) の関係

表3は V_I が一定でユニットセルの形状比を、介在物の形状比とともに変

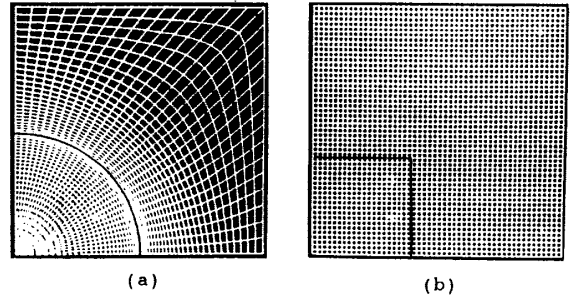


Fig.5 Typical finite element mesh for (a)circular inclusion (b)rectangular inclusion

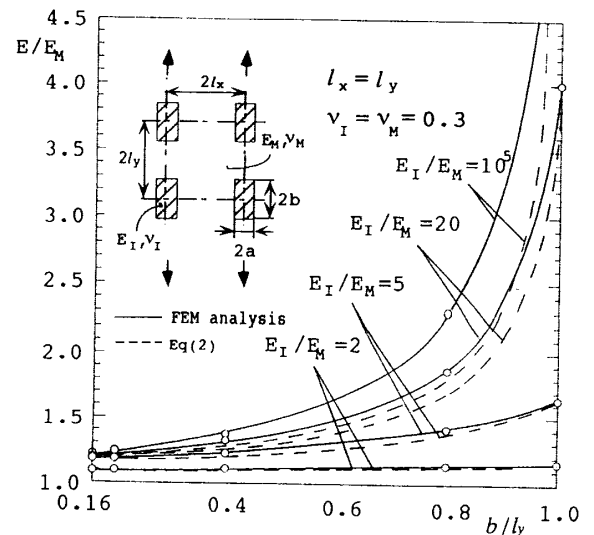


Fig.6 E/E_M vs. b/l_y relation ($V_I = ab/(l_x l_y) = 0.16$)

Table.2 E/E_M vs. b/l_y relation under $V_I = \text{const}$ when $E_I/E_M = 10^5$

$V_I = 0.16$					
	E/E_M	1.19	1.24	1.37	2.30
E^*/E_M	1.19	1.20	1.27	1.80	16001
$V_I = 0.36$					
	E/E_M	1.56	1.79	2.24	5.59
E^*/E_M	1.56	1.60	1.90	4.60	36001

化させたとき ($l_x/l_y = a/b$) の、縦弾性係数の変化を示す。ここで $a/l_x = 0.8$, $b/l_y = 0.2$ または $a/l_x = 0.2$, $b/l_y = 0.8$ と固定している。このとき、ユニットセルと介在物の形状比を同時に変化させているので、式(3)の値は $l_x/l_y (= a/b)$ の変化によらず一定である。

表3で、 $a/l_x = 0.8$ と固定(表3の左部分)して $l_x/l_y (= a/b)$ を変化させた場合では縦弾性係数の変化は小さい。一方、 $b/l_y = 0.8$ と固定(表3の右部分)して $l_x/l_y (= a/b)$ を変化させた場合では縦弾性係数の変化は大きくなる。これは a/l_x が小さくなるにしたがって介在物の体積も小さくなるが、その小さくなった介在物の影響が周囲の母材に分散されることによるものと考えられる。したがって式(3)の精度は一般に介在物が引張方向に細長くなると極端に低下する(たとえば $a/l_x = 0.2$, $b/l_y = 0.8$, $l_x/l_y = 1/4$ のとき誤差は -6.2% である)。

Table.3 E/E_M vs. $l_x/l_y (= a/b)$ relation under $V_I = \text{const}$ when $E_I/E_M = 10^5$

$a/l_x = 0.8, b/l_y = 0.2$	E/E_M	E^*/E_M	$a/l_x = 0.2, b/l_y = 0.8$	E/E_M	E^*/E_M
	1.24	1.20		2.30	1.80
	1.27	1.20		3.03	1.80
	1.31	1.20		4.71	1.80

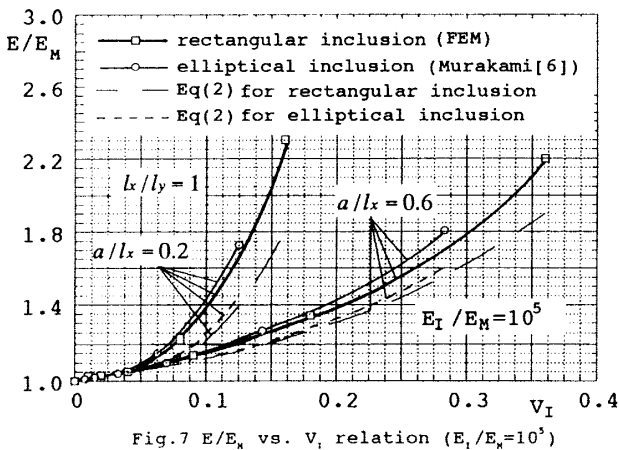


Fig.7 E/E_M vs. V_I relation ($E_I/E_M = 10^5$)

4. 形状の異なる介在物を有する複合材料の縦弾性係数が等しくなる条件

図7, 8は長方形介在物の周期配列の縦弾性係数と村上らが体積法で解析した円形介在物の周期配列との縦弾性係数とを比較したものである。図8に示すように $E_I/E_M = 10^{-5}$ すなわち、長方形穴と円穴の場合は $V_I \rightarrow 0$ に従い、石田らによって得られている周期き裂群の結果⁽⁸⁾に一致する。同様に図7の $E_I/E_M = 10^5$ すなわち、剛体介在物の場合も $V_I \rightarrow 0$ に従って線状剛体介在物の結果に一致すると考えられる。図7では $V_I \rightarrow 0$ に従って $E/E_M = 1$ に近づいており線状剛体介在物が存在しても、それが垂直方向の縦弾性係数に与える影響は小さいことがわかる。

図7, 8より介在物の体積率が同じでも介在物の荷重軸方向の投影面積率 a/l_x が異なれば縦弾性係数は大きく異なることがわかる。また、長方形介在物の問題[図9(a)]と円形介在物の問題[図9(b)]を比較すると

- (I) $a = a'$ (投影面積率が等しい) と
- (II) $ab = \pi a' b' / 4$ (体積率が等しい) という2条件を満たせば縦弾性係数はほぼ等しいことがわかる。

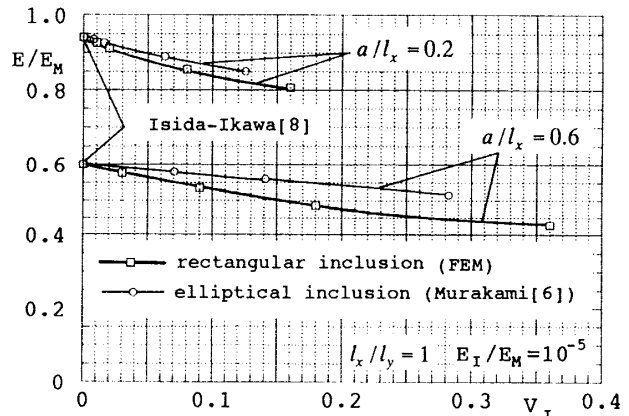


Fig.8 E/E_M vs. V_I relation ($E_I/E_M = 10^5$)

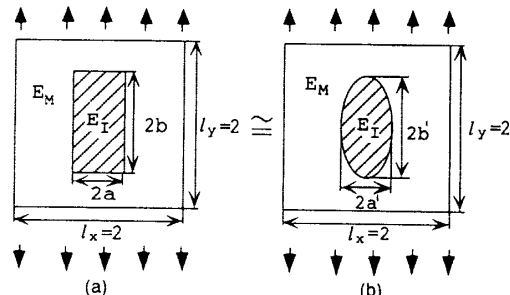


Fig.9 Elastic modulus is almost equal on the condition that (1) $a = a'$ and (2) $ab = \pi a' b' / 4$

5. FEMによる複合材料の縦弾性係数の近似解法

前節の議論から、周期配列をなす介在物があるとき、次の2つの条件

- (I) 介在物の荷重軸投影面積率が等しいこと。
- (II) 介在物の体積率が等しいこと。

を満たす等価な長方形介在物に置き換えて計算すれば、もとの介在物が周期配列をなす場合の平均的な縦弾性係数を近似的に評価できる。このような評価は、もとの介在物形状がだ円形で近似できる限りでは有効である。この場合のFEM解析は2つの補助問題を解くことによって可能となり(図4)、その具体的な解析手順を2節に示した。

6. 結 言

本研究では、同一形状介在物が2次元周期配列をなす場合の、介在物形状が複合材料の縦弾性係数に及ぼす影響を考察した。

(1) 従来複合則の一種の拡張として利用されている近似式(3)の精度を、長方形介在物の周期配列(図4)をFEM解析することによって検討した。式(3)は $E_1/E_M \geq 1$ で有効であるが、 E_1/E_M の増加にしたがって誤差は増加する。そこで $E_1/E_M = 10^5$ の場合に詳しく検討した結果、特に $b/l_y = 0.8 \sim 0.9$ 付近でその精度は低下することや、 l_x/l_y が小さくなるにしたがって近似式の精度は極端に低下することが明らかとなった(たとえば $a/l_x = 0.2$, $b/l_y = 0.8$, $l_x/l_y = 1/4$ のとき誤差は -6.2% である)。

(2) 介在物の形状が異なることの影響を長方形介在

物とだ円形介在物の解析結果を比較して検討した結果、

- (I) 介在物の荷重軸投影面積率が等しく、
- (II) 介在物の体積率が等しい

という2条件を満たせば異なる介在物を含む複合材料の縦弾性係数はほぼ等しいことが明らかとなった。

(3) 周期配列をなす介在物形状があるとき、その介在物を荷重軸投影面積率が等しく、体積率が等しい等価な長方形介在物に置き換えて計算すれば、もとの介在物が周期配列をなす場合の平均的な縦弾性係数を近似的に評価できる。このような評価は、もとの介在物形状がだ円形で近似できる限りでは有効である。この場合のFEM解析は2つの補助問題を解くことによって可能となる(図4)。

文 献

- (1) 例えば、複合材料ハンドブック、日本複合材料学会編、(1989)、16、日刊工業新聞社；複合材料工学、林毅編、(1971)、27-33、日科技連。
- (2) 例えば、福田 博、邊 吾一、複合材料の力学序説、古今書院、(1989)、206-217。
- (3) L.B.Greszuck, Theoretical and Experimental Studies on Properties and Behavior of Filamentary Composites, 21th Soc. Plastic Ind, Sect. 8-A, Chicago, Feb.(1966), 1-10.
- (4) 山脇弘一、植村益次、一方向と多層積層複合材の弾性定数の一解析、東京大学宇宙航空研究所報告、7, 2A (1971), 315-333.
- (5) 植村益次、山田直樹、炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数、材料、24(1975), 156-163.
- (6) 内山幸彦、八田正俊、村上敬宜、周期的に配列されただ円形介在物を有する複合材料の弾性係数の解析、日本複合材料学会誌、11, 6(1985), 275-286.
- (7) 石田誠、佐藤力男、円孔や円形介在物を持つ任意形状有限体の解析と周期介在物群への応用、機論、50-457A(1984), 1619-1627.
- (8) 石田誠、井川秀信、二重周期き裂群および千鳥分布き裂群をもつ無限体の引張り、機論、55-510A(1989), 238-245.