

回転だ円体状介在物の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果

野田尚昭*¹, 泊賢治*², 松尾忠利*³Interaction Effect between Ellipsoidal Inclusions in an Infinite Body
under Asymmetric Uniaxial Tension

Nao-Aki NODA, Kenji TOMARI and Tadatoshi MATSUO

This paper deals with numerical solution of singular integral equations of the body force method in an interaction problem of two ellipsoidal inclusions under asymmetric uniaxial tension. The problem is solved on the superposition of two auxiliary loads; (i) biaxial tension and (ii) plane state of pure shear. These problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where the densities of body forces distributed in the r, θ, z directions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the ellipsoidal boundaries, the unknown functions are approximated by a linear combination of fundamental density functions and polynomials. The present method is found to yield rapidly converging numerical results for stress distributions along the boundaries.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Stress Concentration Factor, Ellipsoidal Inclusion

1. 緒言

多くの機械構造材料中には、き裂、空か、介在物などの欠陥が存在するため、その強度評価のためには、これらの欠陥によって生じる応力集中を把握することが必要である。だ円形介在物やだ円体状介在物の問題は、その特別な場合にき裂や空かも含んでおり、欠陥としての一般的性質をある程度有しているため重要な応力集中問題の一つである。複数の介在物が存在する場合の干渉効果を考察した研究は、2次元問題や3次元軸対称問題ではいくつかなされているものの、非軸対称一軸引張り問題については土田らの球かの解析⁽¹⁾⁽²⁾や、著者らの回転だ円体状空か⁽³⁾⁽⁴⁾の解析以外見当たらない。そこで本研究では、等大2個の回転だ円体状介在物を有する無限体の2つの問題(二軸引張り問題と純粋せん断問題)を体積方法の特異積分方程式を用いて厳密に解析し、これらを重ね合わせるこ

により、非軸対称問題(一軸引張り問題)へと発展させた。そして、形状比、距離及び剛性比を系統的に変化させ、応力集中の干渉効果を調べた。

2. 解析方法

図1(c)に示すような、主軸長 $2a, 2b$ の2個の等大回転だ円体状介在物を有する無限体が遠方で一様な x 方向の一軸引張り応力 σ^∞ を受けている干渉問題を体積方法を用いて解析する。本問題は、図1に示されるように2つの補助問題A, Bの重ね合わせにより構成される。いま直角座標系を (x, y, z) とし、円筒座標系を (r, θ, z) として図1(d)のように定義する[着力点に関する座標の記号は、 (ξ, η, ζ) と (ρ, ϕ, ζ) とする]。問題Aの軸対称問題については、前報の方法⁽⁵⁾により解析可能である。以下では、問題Bの純粋せん断についての解法を中心に説明する。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積方法の考え方により、介在物のない無限体中の二つの円周上 $[\rho = a \cos \alpha, \zeta = \pm(d + b \sin \alpha)]$ に大きさが $\cos 2\varphi$ または $\sin 2\varphi$ で変化する r, θ, z 方向の集中力の輪が作用するときの任意の点 $(r = a \cos \psi, z = d + b \sin \psi)$ の応力場の解

* 1997年3月29日 第74期通常総会講演会において講演、原稿受付 1997年7月31日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部(☎ 804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 学生員, 九州工業大学大学院。

*³ 正員, 福島工業高等専門学校(☎ 970-8034 いわき市平上荒川字長尾30)。

$(K_{nn}^{F_r}, K_{nn}^{F_\theta}, \dots, K_{nn}^{F_z}, K_{nn}^{F_z})$ と変位場の解 $(K_{ur}^{F_r}, K_{ur}^{F_\theta}, \dots, K_{uz}^{F_r}, K_{uz}^{F_\theta})$ を用いて解くことができる^{(3),(4)} (その具体的表示は紙面の都合上省略する)。このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_I, ν_I) と同じ弾性定数をもつ無限体 (これらを無限体M, 無限体Iとする) 中の仮想境界上に分布させた面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用させた体積力密度 $\rho_{rM}^*(\alpha), \rho_{\theta M}^*(\alpha), \rho_{zM}^*(\alpha), \rho_{rI}^*(\alpha), \rho_{\theta I}^*(\alpha), \rho_{zI}^*(\alpha)$ を未知関数とする特異積分方程式(1)~(6)で表現される。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\{\rho_{rM}^*(\psi)\cos\psi_0 + \rho_{zM}^*(\psi)\sin\psi_0\} \\
 & -\frac{1}{2}\{\rho_{rI}^*(\psi)\cos\psi_0 + \rho_{zI}^*(\psi)\sin\psi_0\} \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta M}^*(\alpha)ds \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrI}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrI}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta I}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrI}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = -\sigma_r^\infty \cos^2\psi_0 \cos 2\theta \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\{\rho_{\theta M}^*(\psi) + \rho_{\theta I}^*(\psi)\} \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta M}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta M}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta M}^*(\alpha)ds \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta M}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta I}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta I}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta I}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta I}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = -\tau_{r\theta}^\infty \cos\psi_0 \sin 2\theta \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\{-\rho_{rM}^*(\psi)\sin\psi_0 + \rho_{zM}^*(\psi)\cos\psi_0\} \\
 & -\frac{1}{2}\{-\rho_{rI}^*(\psi)\sin\psi_0 + \rho_{zI}^*(\psi)\cos\psi_0\} \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrM}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrM}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta M}^*(\alpha)ds \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrM}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrI}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrI}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta I}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nrI}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = \sigma_r^\infty \sin\psi_0 \cos\psi_0 \cos 2\theta \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta M}^*(\alpha)ds \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta I}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = -(\sigma_r^\infty - \nu_M \sigma_\theta^\infty) r / E_M \cdot \cos 2\theta \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta M}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta M}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta M}^*(\alpha)ds \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta M}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta I}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta I}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta I}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta I}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = -\tau_{r\theta}^\infty 2(1 + \nu_M) r / E_M \cdot \sin 2\theta \dots\dots\dots(5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta M}^*(\alpha)ds \\
 & + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{F_r}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{F_\theta}(\alpha, \psi)\rho_{\theta I}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{F_z}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = -\nu_M (\sigma_r^\infty + \sigma_\theta^\infty) z / E_M \cdot \cos 2\theta \dots\dots\dots(6)
 \end{aligned}$$

ここで、 $-dp = a \sin \alpha d\alpha, d\zeta = b \cos \alpha d\alpha, ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} d\alpha$ である。また、 ψ_0 は点 (r, z) における介在物の外向き法線と r 軸とのなす角である。特異積分方程式の未知関数である $\rho_{rM}^*(\alpha), \rho_{\theta M}^*(\alpha), \rho_{zM}^*(\alpha)$ は次式で定義される ($\rho_{rI}^*(\alpha), \rho_{\theta I}^*(\alpha), \rho_{zI}^*(\alpha)$ も同様)。

$$\begin{aligned}
 \rho_{rM}^*(\alpha) \cos 2\varphi &= \frac{dF_r}{\rho d\phi ds}, \quad \rho_{\theta M}^*(\alpha) \sin 2\varphi = \frac{dF_\theta}{\rho ds d\phi}, \\
 \rho_{zM}^*(\alpha) \cos 2\varphi &= \frac{-dF_z}{\rho d\phi ds} \dots\dots\dots(7)
 \end{aligned}$$

ここで、 dF_r, dF_θ, dF_z は、面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用する体積力の合力の r, θ, z 方向の成分である。式(1)~(6)は仮想境界上における境界条件 $\sigma_{nn} - \sigma_{ni} = 0, \tau_{n\theta n} - \tau_{n\theta i} = 0, \tau_{nrM} - \tau_{nrI} = 0, u_{rM} - u_{rI} = 0, u_{\theta M} - u_{\theta I} = 0, u_{zM} - u_{zI} = 0$ に相当している。式(1), (2), (3)はコーシー形, 式(4), (5), (6)は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため式(1), (2), (3)に含まれる積分が特異性を含むときコーシーの主値をとるものとする。

結局問題は式(1)~(6)の未知関数 $\rho_{rM}^*(\alpha) \sim \rho_{zI}^*(\alpha)$ を求めることに帰着されるが、それらを直接求めるかわりに以下のような補助関数 ($f_1(\alpha), f_2(\alpha)$) を求める。以

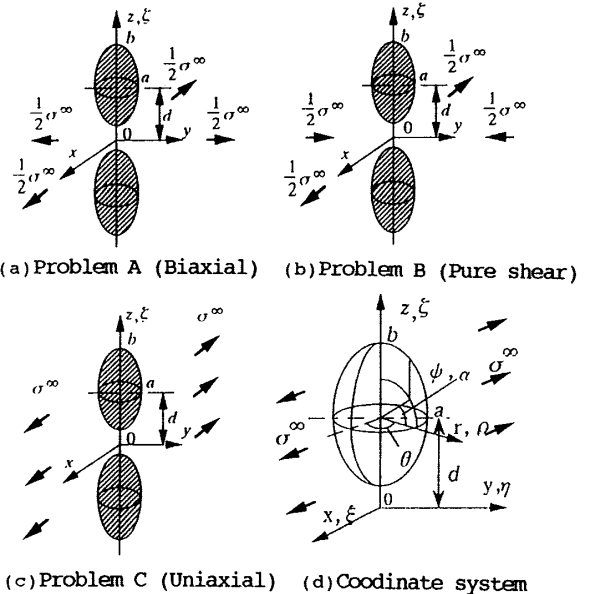


Fig.1 Problem and coordinate system

下で $f(\alpha)$ は $\rho_{rM}^*(\alpha) \sim \rho_{zI}^*(\alpha)$ の各関数を意味している。そして、 $f(\alpha)$ から得られる補助関数 $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ を式(8)で定義する。

$$f_1(\alpha) = \{f(\alpha) + f(-\alpha)\} / 2, f_2(\alpha) = \{f(\alpha) - f(-\alpha)\} / 2 \quad \dots\dots(8)$$

ここで、 $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ は以下の関係を満たす。

$$f_1(\alpha) = f_1(-\alpha), f_2(\alpha) = -f_2(-\alpha) \quad \dots\dots(9)$$

すなわち、未知関数 $f(\alpha)$ を $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ で求めることは式(9)を満たす補助関数 $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ を $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ で求めることに等しい。つまり、 $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ で $f_1(\alpha), f_2(\alpha)$ が与えられるとき、次式に示すように $f(\alpha)$ が $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ で与えられる。

$$f(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) \\ f(-\alpha) = f_1(-\alpha) - f_2(-\alpha) = f_1(\alpha) - f_2(\alpha) \quad \dots\dots(10)$$

いま、基本密度関数を以下のように定義する。

$$w_{r3}(\alpha) = w_{\theta3}(\alpha) = n_r(\alpha), w_{r4}(\alpha) = w_{\theta4}(\alpha) = n_r(\alpha) \sin \alpha, \\ w_{z1}(\alpha) = n_z(\alpha) / \sin \alpha, w_{z2}(\alpha) = n_z(\alpha) \quad \dots\dots(11)$$

$$n_r(\alpha) = \frac{b \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}, n_z(\alpha) = \frac{a \sin \alpha}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}} \quad \dots\dots(12)$$

ここで、 $w_{r3}(\alpha), w_{\theta3}(\alpha), w_{z1}(\alpha)$ は式(9)の第1式を、 $w_{r4}(\alpha), w_{\theta4}(\alpha), w_{z2}(\alpha)$ は式(9)の第2式を満足する連続関数である。また、 $w_{r3}(\alpha), w_{\theta3}(\alpha), w_{z2}(\alpha)$ は純粹せん断を受けている回転だ円体状介在物が単独に存在する場合を厳密に表現する体積力の基本密度関数である。

そして、 $\rho_{rM}^*(\alpha) \sim \rho_{zI}^*(\alpha)$ を以下のように基本密度関数と重み関数 $\rho_{r3M}(\alpha)$ 等で表現する。

$$\rho_{rM}^*(\alpha) = \rho_{r3M}(\alpha) w_{r3}(\alpha) + \rho_{r4M}(\alpha) w_{r4}(\alpha) \\ \rho_{\theta M}^*(\alpha) = \rho_{\theta3M}(\alpha) w_{\theta3}(\alpha) + \rho_{\theta4M}(\alpha) w_{\theta4}(\alpha) \\ \rho_{z M}^*(\alpha) = \rho_{z2M}(\alpha) w_{z2}(\alpha) + \rho_{z1M}(\alpha) w_{z1}(\alpha) \quad \dots\dots(13) \\ \rho_{r'}^*(\alpha) = \rho_{r3I}(\alpha) w_{r3}(\alpha) + \rho_{r4I}(\alpha) w_{r4}(\alpha) \\ \rho_{\theta I}^*(\alpha) = \rho_{\theta3I}(\alpha) w_{\theta3}(\alpha) + \rho_{\theta4I}(\alpha) w_{\theta4}(\alpha) \\ \rho_{z'}^*(\alpha) = \rho_{z2I}(\alpha) w_{z2}(\alpha) + \rho_{z1I}(\alpha) w_{z1}(\alpha)$$

式(13)で $\rho_{rM}^*(\alpha)$ を例にとると $\rho_{r3M}(\alpha) w_{r3}(\alpha)$ は式(10)の $f_1(\alpha)$ に、 $\rho_{r4M}(\alpha) w_{r4}(\alpha)$ は式(10)の $f_2(\alpha)$ にそれぞれ対応している。このとき $\rho_{r3M}(\alpha), \rho_{r4M}(\alpha)$ 等が満足すべき条件は

$$g(\alpha) = g(-\alpha) \quad \dots\dots(14)$$

ここで、 $g(\alpha)$ は $\rho_{r3M}(\alpha), \rho_{r4M}(\alpha), \dots, \rho_{z1I}(\alpha)$ の各関数

(重み関数) を意味する。問題Bでは、未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

$$\left(\begin{array}{l} \rho_{r3M}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} a_{nM} t_n(\alpha) \\ \rho_{r4M}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} b_{nM} t_n(\alpha) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \rho_{\theta3M}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} c_{nM} t_n(\alpha) \\ \rho_{\theta4M}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} d_{nM} t_n(\alpha) \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \rho_{z2M}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} e_{nM} t_n(\alpha) \\ \rho_{z1M}(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} f_{nM} t_n(\alpha) \end{array} \right) \quad \dots\dots(15)$$

$$t_n(\alpha) = \cos\{2(n-1)\alpha\} \quad \dots\dots(16)$$

式(15), (16)の表現は式(14)を満足する。ここで、 M は、 $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ の範囲の選点数である。

以上の離散化の方法により、特異積分方程式は、係数 $a_{nM}, b_{nM}, c_{nM}, d_{nM}, e_{nM}, f_{nM}, a_{nI}, b_{nI}, c_{nI}, d_{nI}, e_{nI}, f_{nI}$ についての4M元の連立方程式に還元される。

以上の解析方法により無限体中の2個の等大回転だ円体状介在物の境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

3. 解析結果及び考察

以下では $\nu_M = \nu_I = 0.3$ として解析した。本解析において、問題Bの未知関数の収束性の例を表1に示す。未知関数 $\rho_{r3M}(\alpha), \rho_{\theta3M}(\alpha), \rho_{z2M}(\alpha), \rho_{r4M}(\alpha), \rho_{\theta4M}(\alpha), \rho_{z1M}(\alpha)$ は選点数 $M=20$ で有効数字5桁程度収束しており、良好な収束性を示している。この場合、境界条件 $(\sigma_{nm} - \sigma_{ni}, \tau_{n\theta M} - \tau_{n\theta I}, \tau_{nI} - \tau_{nI}, u_{rM} - u_{rI}, u_{\theta M} - u_{\theta I}, u_{z M} - u_{z I})$ につい

Table 1 Convergence of unknown function (Problem B, a/b=1.0, b/d=0.8, $E_I/E_M=10^5$)

Ψ	M	ρ_{r3M}	$\rho_{\theta3M}$	ρ_{z2M}	ρ_{r4M}	$\rho_{\theta4M}$	ρ_{z1M}
0	12	-2.046	-2.060	-0.077	-0.092	-0.057	0.036
	16	-2.045	-2.060	-0.076	-0.092	-0.057	0.036
	20	-2.046	-2.060	-0.076	-0.092	-0.057	0.036
10	12	-2.042	-2.058	-0.078	-0.095	-0.059	0.038
	16	-2.042	-2.058	-0.078	-0.095	-0.059	0.038
	20	-2.043	-2.058	-0.078	-0.095	-0.059	0.038
30	12	-2.015	-2.040	-0.087	-0.119	-0.077	0.054
	16	-2.015	-2.039	-0.087	-0.119	-0.077	0.054
	20	-2.015	-2.040	-0.087	-0.119	-0.077	0.054
60	12	-1.896	-1.928	-0.074	-0.217	-0.180	0.066
	16	-1.896	-1.928	-0.074	-0.217	-0.180	0.066
	20	-1.896	-1.928	-0.074	-0.217	-0.180	0.066
80	12	-1.783	-1.789	-0.014	-0.308	-0.301	0.014
	16	-1.783	-1.790	-0.014	-0.307	-0.301	0.014
	20	-1.783	-1.790	-0.014	-0.307	-0.301	0.014
90	12	-1.761	-1.761	-0.000	-0.325	-0.325	0.000
	16	-1.761	-1.761	-0.000	-0.325	-0.325	0.000
	20	-1.761	-1.761	-0.000	-0.325	-0.325	0.000

は 10^{-4} 以下で境界上の任意の点で満足されていることがわかった。このような検討によって本解析結果の良好な収束性と高い境界条件の満足度が確認された。

図2は、遠方で応力 $\sigma_x^\infty=1.0$ を受ける無限体中に球状介在物 ($a/b=1.0, E_I/E_M=10^5$) が単独に存在する場合と等大球状介在物が2個存在する場合 ($b/d=0.8$) の境界上の応力分布を示したものである。但し、 $\tau_{n\theta}$ は $\theta=\pi/4$ の面における応力分布であり、それ以外の応力成分については $\theta=0$ の面の応力分布である。ここで、 σ_1 は $\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}$ から得られる主応力である。特に、 $\psi=-\pi/2$ 付近で σ_n に大きな干渉効果が生じている。図3は剛性比 $E_I/E_M=0.1$ の場合である。このとき、 σ_θ が他の応力と比べて大きな値となり $\psi=\pi/2$ 付近で顕著な干渉効果が生じる。図2, 図3より、 $E_I/E_M > 1$ のとき $\theta=0$ の面の σ_n , $E_I/E_M < 1$ のとき $\theta=\pi/2$ の面の σ_θ に注目して干渉効果を詳しく議論する。

まず、図4と図5は回転だ円体状介在物が単独に存在するときの σ_n を $a/b=0.5, 1.0, 2.0$ の各場合について示したものである。図4では $\theta=0$ での σ_n の分布を示している。また、図5では $\theta=\pi/2$ での σ_θ の分布を示しているが、 $E_I/E_M=10^5$ のときは $\theta=0$ での σ_θ の値が大きいのでその分布も示している。

以下では、これらの介在物が単独に存在するときの応力分布が2個の介在物の干渉によってどのように変化するかを $E_I/E_M=10^5$ を例として図6~8に示す。また、 $E_I/E_M=0.1$ のときを例として図9~11に示す。

図6は形状比 $a/b=1.0$ のとき寸法比 b/d を0から0.9まで変化させた場合の結果である。 $b/d=0.7$ 以上になると干渉効果は顕著となり、その効果は $\psi=-90^\circ$ 付近で大きな圧縮応力となって表われる。しかし、 $\psi=0^\circ$ 付近の剥離に影響する引張応力 σ_n はほとんど干渉によって影

響しない。同様の傾向は $a/b=2.0$ の図7および $a/b=0.5$ の図8でも認められる。図9~図11は $E_I/E_M=0.1$ の場合であるがその干渉効果は前報⁽³⁾で報告した空か (E_I/E_M)

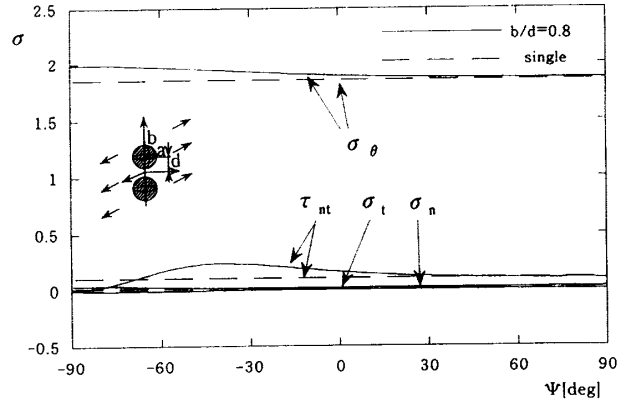


Fig.3 Interface stresses $\sigma_n, \sigma_\theta, \sigma_t, \tau_{nt}$ on $\theta = \pi/2$ ($a/b=1.0, E_I/E_M=0.1$)

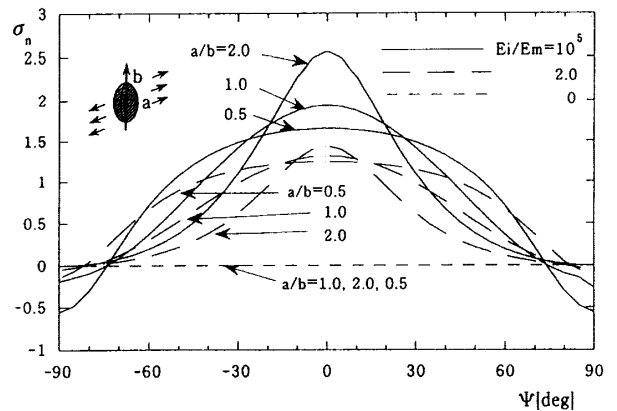


Fig.4 Interface stress σ_n on $\theta = 0$ ($E_I/E_M=10^5, 2.0, 0$)

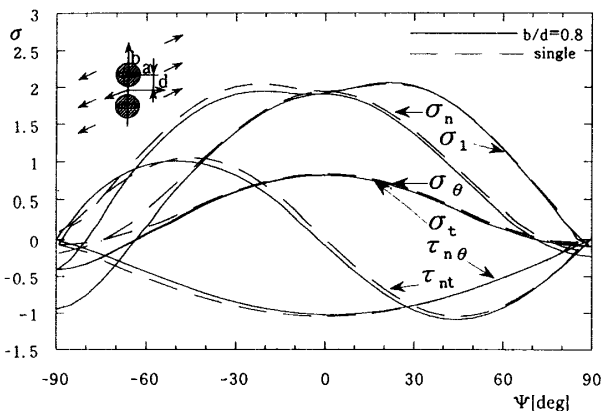


Fig.2 Interface stresses $\sigma_n, \sigma_\theta, \sigma_t, \tau_{nt}, \sigma_1$ on $\theta = 0$ and $\tau_{n\theta}$ on $\theta = \pi/4$ ($a/b=1.0, E_I/E_M=10^5$)

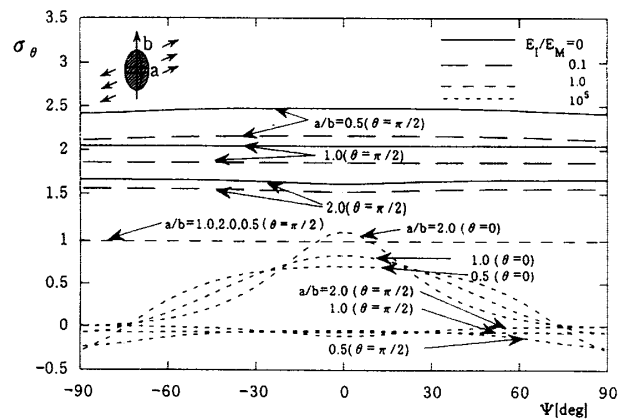


Fig.5 Interface stress σ_θ on $\theta = \pi/2$ ($E_I/E_M=10^5, 1.0, 0.1, 0$)

$E_M=0$) の場合とよく似た傾向を示しており, 引張応力の増加としてその干渉効果が現われている. 図6~図11より同じ寸法比 b/d と剛性比 E_I/E_M で比較すると a/b の増加に伴って干渉が大きく表われることがわかる.

表2~4に各条件における σ_n と σ_θ の最大応力とその発生位置を示す. 剛性比 E_I/E_M が10, 10^5 のとき, 最大応

力は $\psi=0^\circ$ 付近で発生しており, b/d が大きくなってても干渉の影響は比較的小さく, 引張応力の減少として表われる. 但し, 剛性比 $E_I/E_M=10^5$ では, $b/d=0.9$ のとき $\psi=-90^\circ$ の σ_n が干渉によって大きな圧縮応力として生じる. また, 剛性比 E_I/E_M が0, 0.1のときには最大応力の生じる位置は b/d の変化に伴って大きく変化する.

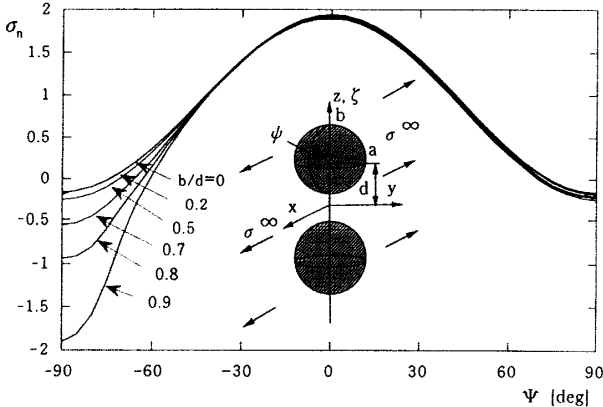


Fig.6 Interface stress σ_n on $\theta=0$ ($a/b=1.0, E_I/E_M=10^5$)

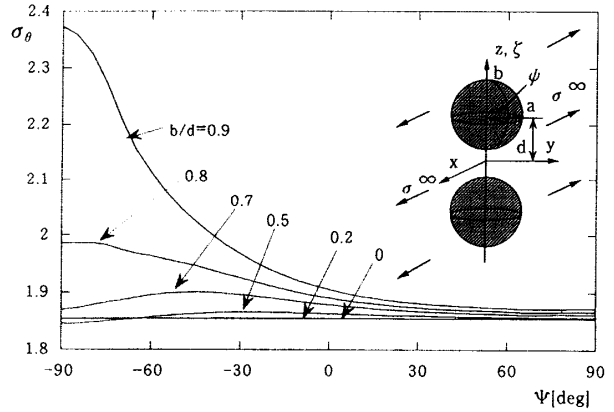


Fig.9 Interface stress σ_θ on $\theta=\pi/2$ ($a/b=1.0, E_I/E_M=0.1$)

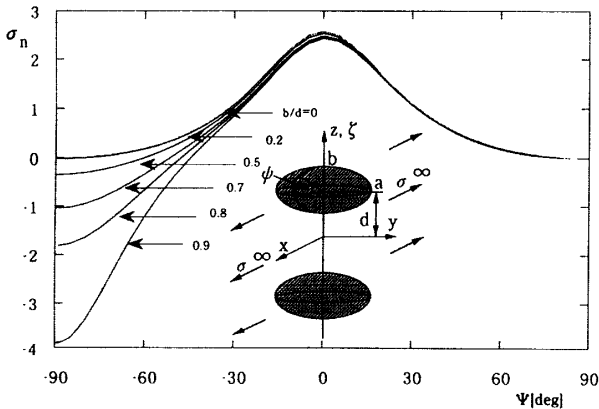


Fig.7 Interface stress σ_n on $\theta=0$ ($a/b=2.0, E_I/E_M=10^5$)

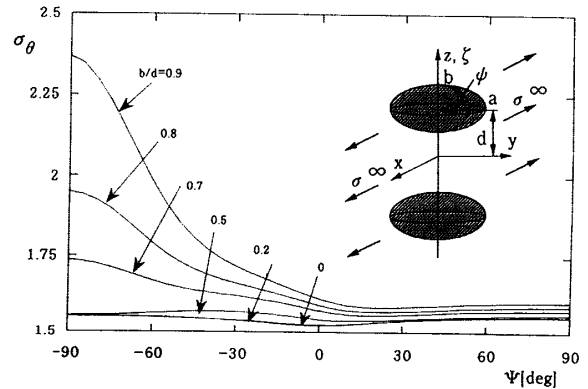


Fig.10 Interface stress σ_θ on $\theta=\pi/2$ ($a/b=2.0, E_I/E_M=0.1$)

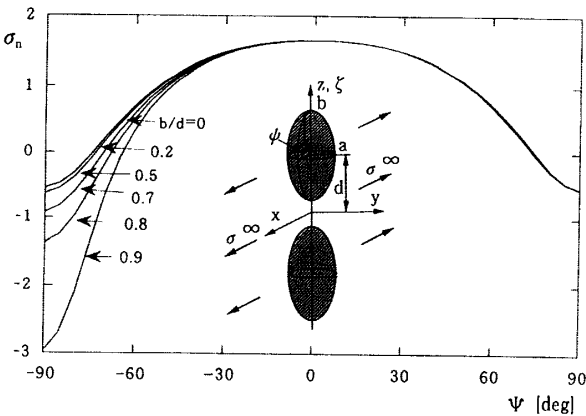


Fig.8 Interface stress σ_n on $\theta=0$ ($a/b=0.5, E_I/E_M=10^5$)

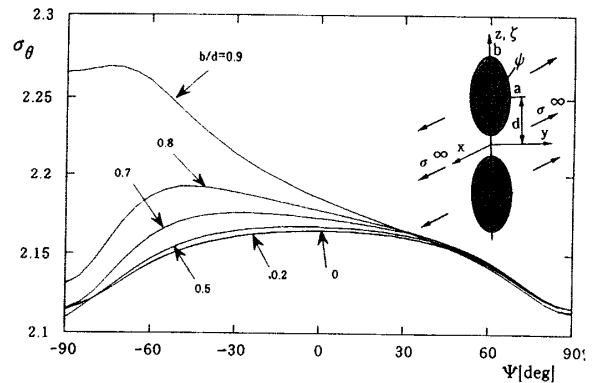


Fig.11 Interface stress σ_θ on $\theta=\pi/2$ ($a/b=0.5, E_I/E_M=0.1$)

Table 2 Maximum stress of two ellipsoidal inclusions (a/b=1.0)

a/b=1.0		Matrix			
E1/E2	b/d	ψ (deg)	σ_n	ψ (deg)	σ_θ
$\theta = \pi/2$					
0	0			-90~90	2.0455
	0.2			-90	2.0462
	0.5			-25	2.0599
	0.7			-90	2.1569
	0.8			-90	2.2302
	0.9			-90	2.7773
		$\theta = 0$		$\theta = \pi/2$	
0.1	0	0	0.1919	-90~90	1.8540
	0.2	0	0.1920	-90~90	1.8546
	0.5	0	0.1931	-25	1.8643
	0.7	0	0.1955	-45	1.8956
	0.8	0	0.1972	-90	1.9931
	0.9	0	0.1992	-90	2.3860
		$\theta = 0$		$\theta = 0$	
10	0	0	1.7684	0	0.6698
	0.2	0	1.7682	0	0.6697
	0.5	0	1.7627	0	0.6681
	0.7	0	1.7492	0	0.6636
	0.8	0	1.7386	0	0.6602
	0.9	0	1.7261	0	0.6561
		$\theta = 0$		$\theta = 0$	
10^5	0	0	1.9383	0	0.8307
	0.2	0	1.9381	0	0.8306
	0.5	0	1.9316	0	0.8278
	0.7	0	1.9155	0	0.8208
	0.8	0	1.9033	0	0.8156
	0.9	(-90)	(-0.9528)	(-90)	(-0.4083)
					0.8094
					(-0.8198)

Table 4 Maximum stress of two ellipsoidal inclusions (a/b=0.5)

a/b=0.5		Matrix			
E1/E2	b/d	ψ (deg)	σ_n	ψ (deg)	σ_θ
$\theta = \pi/2$					
0	0			0	2.4804
	0.2			0	2.4806
	0.5			-7	2.4846
	0.7			-30	2.4979
	0.8			-47	2.5240
	0.9			-73	2.6363
		$\theta = 0$		$\theta = \pi/2$	
0.1	0	0	0.2246	0	2.1643
	0.2	0	0.2247	0	2.1644
	0.5	0	0.2249	-5	2.1671
	0.7	0	0.2256	-28	2.1755
	0.8	0	0.2262	-46	2.1923
	0.9	0	0.2272	-73	2.2694
		$\theta = 0$		$\theta = 0$	
10	0	0	1.5488	0	0.5879
	0.2	0	1.5487	0	0.5879
	0.5	0	1.5482	0	0.5878
	0.7	0	1.5463	0	0.5874
	0.8	0	1.5444	0	0.5870
	0.9	(-90)	(-1.6973)	0	0.5864
		$\theta = 0$		$\theta = 0$	
10^5	0	0	1.6523	0	0.7081
	0.2	0	1.6523	0	0.7081
	0.5	0	1.6519	0	0.7079
	0.7	0	1.6502	0	0.7072
	0.8	1	1.6484	0	0.7065
	0.9	1	1.6459	0	0.7054
					(-2.9225)
					(-90)
					(-1.2785)

Table 3 Maximum stress of two ellipsoidal inclusions (a/b=2.0)

a/b=2.0		Matrix				
E1/E2	b/d	ψ (deg)	σ_n	ψ (deg)	σ_θ	
$\theta = \pi/2$						
0	0			± 90	1.6601	
	0.2			90	1.6595	
	0.5			-32	1.6748	
	0.7			-90	1.8863	
	0.8			-90	2.1725	
	0.9			-90	2.7818	
		$\theta = 0$		$\theta = \pi/2$		
0.1	0	0	0.1559	± 85	1.5565	
	0.2	0	0.1562	90	1.5565	
	0.5	0	0.1599	-36	1.5699	
	0.7	1	0.1621	-90	1.7363	
	0.8	1	0.1623	-90	1.9502	
	0.9	1	0.1636	-90	2.3688	
		$\theta = 0$		$\theta = 0$		
10	0	0	2.2084	0	0.8337	
	0.2	0	2.2074	0	0.8335	
	0.5	1	2.1817	0	0.8272	
	0.7	1	2.1490	0	0.8171	
	0.8	1	2.1331	0	0.8133	
	0.9	1	2.1190	0	0.8102	
					(-0.9700)	
		$\theta = 0$		$\theta = 0$		
10^5	0	0	2.5575	0	1.0961	
	0.2	0	2.5558	0	1.0951	
	0.5	0	2.5152	0	1.0766	
	0.7	1	2.4613	0	1.0533	
	0.8	(-90)	(-1.8246)	(-90)	(-0.7611)	1.0432
	0.9	1	2.4154	0	1.0326	
					(-3.9027)	
					(-90)	
					(-1.6664)	

4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を用いて、2個の回転だ円体状介在物を有する無限体の非軸対称一軸引張り問題を高い精度で解析する方法を示し、その干渉効果を考察した。本解析では2個の回転だ円体状介在物を有する無限体が2種類の荷重を受ける問題（二軸引張り問題、純粋せん断問題）を厳密に解析し、これらを重ね合わせるにより非軸対称一軸引張り問題に発展させ、その干渉効果を解析する方法を示した。そして、少ない選点数で良好な収束性が得られた。また、形状比、寸法比、剛性比を系統的に変化させた場合について、境界上のなめらかな応力分布が得られ、それぞれ最大応力の値とその発生位置を示した。

文 献

- (1) 土田栄一郎・中原一郎・小玉正雄, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題 (第1報, 2球かを有する弾性体), 機論, 42-353, (1976), 46-54.
- (2) 土田栄一郎・内山直人・中原一郎・小玉正雄, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題 (第2報, 3球かを有する弾性体), 機論, 44-382, (1978), 1876-1883.
- (3) 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利, 回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 62-596, A(1996), 1051-1058.
- (4) 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利, 任意個の回転だ円体状空かを持つ無限体の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 62-602, A(1996), 97-103.
- (5) 野田尚昭・松尾忠利・原田昭治・中村資生, 特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析, 機論, 61-585, A (1995), 965-973.