

き裂面接触問題における自由表面に対する 傾斜角度の小さい表面き裂の解析と摩擦係数の影響*

野田 尚昭*¹, 柳下 誠*²

Analysis of Crack Surface Contact Problems When the Angle between the Crack and the Free Surface is Small (Effect of Friction Coefficient)

Nao-Aki NODA*³ and Makoto YAGISHITA*³ Kyushu Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550 Japan

In this paper a singular integral equation method is applied to calculate the variation of stress intensity factors along the crack front of a 3D oblique semi-elliptical surface crack when the whole of the crack surfaces are in contact each other. The body force method is used to formulate the problem as a system of singular integral equations. In the numerical solutions unknown body force densities are approximated using fundamental density functions and polynomials. The calculation shows that the present method yields rapidly converging numerical results and smooth variation of stress intensity factors along crack front even when the inclination angle between the crack and the free surface is small. The mode II and mode III stress intensity factors are shown when an inclined edge crack is subjected to compressive residual stresses or Hertzian contact loads with varying the inclination crack angle and friction coefficient.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Tribology, Fracture Mechanics, Rolling Contact Fatigue, Surface Crack, Body Force Method

1. 緒言

最近、転がり接触荷重を受ける表面層の破壊問題を破壊力学を応用して解明しようとする研究が多くなされている⁽¹⁾⁽⁴⁾。村上ら⁽³⁾、兼田ら⁽⁴⁾は、傾斜した微小半円き裂を有する半無限体上をHertz圧が移動するときの応力拡大係数(図1の3次元モデル)を体積力法を用いて解析し、従動側にピッチングが起こりやすい理由、き裂の傾斜角、油圧作用の相互関係を考察し、Wayの油圧説⁽⁵⁾を破壊力学的観点から支持している。また、Hansonら⁽⁶⁾は村上⁽³⁾、兼田ら⁽⁴⁾と同じ3次元モデルを疲労き裂伝ばに拡張し、2次元モデルと同様な手法で転がり寿命の予測を行っている。さらに、市丸ら⁽⁷⁾⁽⁸⁾は転がり疲労では表面の粗さの影響が重要であるとして、村上らの解析方法を応用して表面の粗さの影響を考慮した一連の解析⁽⁹⁾を行っている。

実際の転がり疲労では、しばしば、自由表面とき裂の角度が $15^\circ \sim 30^\circ$ (図1で $\psi = 75^\circ \sim 60^\circ$)のごく浅い角度で生じるき裂が観察される。しかしながら、上述の研究では、半無限体の自由表面に対して $45^\circ \sim 90^\circ$ (図1で $\psi = 45^\circ \sim 0^\circ$)の角度で生じたき裂を、

体積力法を用いて解析している。体積力法は3次元き裂の解析に極めて有力であり、多くの研究者によって用いられているが、自由表面との傾斜角度が小さいき裂では、表面の影響を強く受けるので、解の収束性や境界条件の満足度が低下し、解析困難となる⁽⁹⁾⁽¹¹⁾。

そこで、本研究では、著者らがさきに行った、体積力法の特異積分方程式の数値解析において未知関数を基本密度関数と多項式で近似する方法⁽⁹⁾⁽¹¹⁾を応用し、図1の半無限体自由表面とき裂との角度が小さい場合まで含めて解析を行う。この方法によれば、さきに2次元・3次元の縁き裂問題で確認しているように⁽⁹⁾⁽¹¹⁾、未知関数が連続関数として近似されるので、良好な解の収束性と境界条件の満足度が得られるほか、き裂先端のなめらかな応力拡大係数の分布を得ることが可能である。

2. 体積力法の特異積分方程式の数値解析

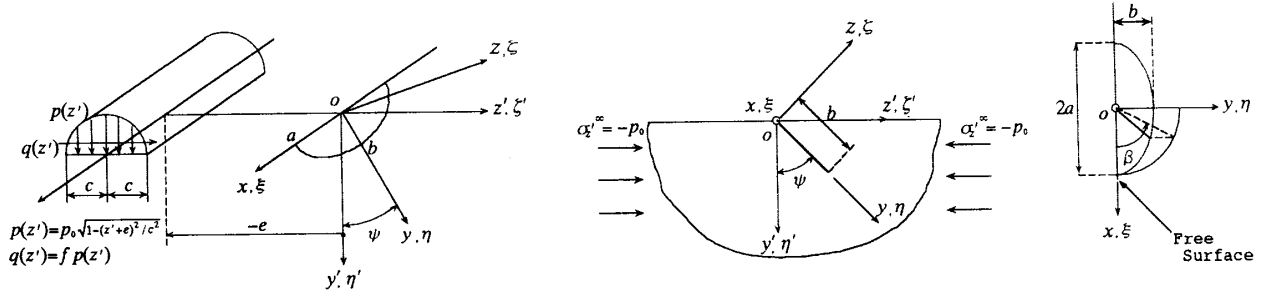
本論文では、まず基本的問題として、村上らのモデル(図1)で、き裂の全面が閉口しているときを解析する。荷重としては、図1(a)のHertz圧と、図1(b)の遠方での圧縮応力(表面近くの圧縮残留応力に相当)を取扱う。

図1のように z/x 平面($y' = 0$)を自由表面とする半無

* 原稿受付 1999年1月20日。

*¹ 正員、九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。*² 学生員、九州工業大学大学院。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp



(a) A semi-elliptical surface crack subjected to rolling/sliding Hertzian contact (b) A semi-elliptical surface crack under compressive residual stress (c) Shape of crack

Fig.1 Problem of analysis (a,b=radius of semi-elliptical crack, c=half width of Hertzian contact,

ψ =crack inclination angle, β =parametric angle from free surface, f=coefficients of friction for Hertzian contact, μ =coefficients of friction for crack faces)

限体が存在し、そこに xy' 平面に対して角度 ψ だけ傾いた xy 平面上に主軸長 $2a$ 、深さ b の半だ円表面き裂があるものとする。このとき体積力法の考え方によれば、問題はき裂の存在しない半無限体中においてき裂となるべき仮想境界上に分布された yz 方向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$ 、 zx 方向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{zx}(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分方程式で表現される。ここで (ξ, η, ζ) は着力点の (x, y, z) 座標である。また ν はポアソン比である。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_S K_{zx}^{Ia}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \left. + \iint_S K_{zx}^{Ib}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = \tau_{zx}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(x-\xi)^2}{r_1^5} \right\} f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & + \iint_S K_{zx}^{Ia}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ & \left. + \iint_S K_{zx}^{Ib}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = \tau_{zx}^* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned} & y = y' / \cos \psi \quad z = z' / \cos \psi \\ & r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\ & S = \left\{ (\xi, \eta) \mid (\xi/a)^2 + (\eta/b)^2 \leq 1, \eta \geq 0 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1 \cdot c)$$

式(1・a)、(1・b)はそれぞれ仮想き裂面上における境界条件 $\tau_{zx} = \tau_{zx}^*$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{yz}^*$ に相当する。左辺の $1/r_1^3$ 、 $1/r_1^5$ を含む項は無限体中の半だ円表面き裂の存在を表現し、注目点 (x, y) と着力点 (ξ, η) が一致するときに特異性を示す特

異項であり、 \iint_S は発散積分の有限部分を表わす。左辺の $K_{zx}^{Ia}(\xi, \eta, x, y, \psi)$ 等は自由表面の境界条件を満足させる関数⁽¹²⁾⁽¹³⁾である。その具体的表現等は、紙面の都合により省略する。領域 S はき裂のない半無限体中に想定した半だ円表面き裂となるべき仮想き裂面を表わしている。

また、(1・a)、(1・b)の右辺の τ_{zx}^* 、 τ_{yz}^* は、仮想き裂面上に生じるせん断応力を表わし、一様圧縮荷重の場合には次のようになる (Hertz 圧を受ける場合も同様)。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx}^* &= \begin{cases} \sigma_z^\infty \cos \psi \sin \psi - \mu \sigma_{z0} & \text{if } \sigma_z^\infty \cos \psi \sin \psi - \mu \sigma_z \geq 0 \\ 0 & \text{if } \sigma_z^\infty \cos \psi \sin \psi - \mu \sigma_z < 0 \end{cases} \\ \tau_{yz}^* &= 0 \\ \sigma_{z0} &= \sigma_z^\infty \cos^2 \psi \\ & - \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S K_{zx}^{Ia}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_{zx}^{Ib}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_x(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1 \cdot d)$$

3. 特異積分方程式の数値解析法

従来用いられていた未知関数を階段関数で近似する方法では本来滑らかで連続な関数として分布しているはずの体積力対密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$ 、 $f_{zx}(\xi, \eta)$ が不連続な関数として近似されるため応力拡大係数を求める際に外挿しなければならないことや応力拡大係数の滑らかな分布を求めることが難しい等の問題があった。そこで本論文では体積力対密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$ 、 $f_{zx}(\xi, \eta)$ を以下の様に近似する⁽¹⁰⁾。

$$\left. \begin{aligned} f_{yz}(\xi, \eta) &= F_{yz}(\xi_a, \eta_b) w_{yz}(\xi_a, \eta_b) \\ f_{zx}(\xi, \eta) &= F_{zx}(\xi_a, \eta_b) w_{zx}(\xi_a, \eta_b) \\ w_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{yz}^\infty}{C(k)} \sqrt{1 - \xi_a^2 - \eta_b^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 w_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{yz}^\infty}{B(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} \\
 B(k) &= (k^2-\nu)E(k) + \nu k'^2 K(k) \\
 C(k) &= (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k) \\
 k' &= b/a \leq 1 \quad k = \sqrt{1-(b/a)^2} \quad \xi_a = \xi/a \quad \eta_b = \eta/b \\
 K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \\
 &\dots\dots\dots(2)
 \end{aligned} \right\}$$

ここで $w_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $w_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は基本密度関数と呼ばれるもので無限体中の xy 平面上にあるだ円き裂の遠方で、それぞれ τ_{yz}^∞ , τ_{zx}^∞ が作用したときの、だ円き裂の応力場を厳密に表現する体積力密度に相当する (実際の数値計算では $\tau_{yz}^\infty = \tau_{zx}^\infty = 1$ とおく)。式(2)のような表現を用いれば 例えば式(1.a)は基本密度にかける重み関数 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ を未知関数とする式(3)で表現される。

$$\left. \begin{aligned}
 &\frac{b}{4\pi} \left[\frac{k^2}{C(k)} \iint_s \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_i^5} F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\
 &+ \frac{k^2}{B(k)} \iint_s \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_i^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_i^5} \right\} F_{zx}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\
 &+ \frac{k^2}{C(k)} \iint_s K_{yz}'(\xi, \eta, x, y, \psi) F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \\
 &\left. + \frac{k^2}{B(k)} \iint_s K_{zx}'(\xi, \eta, x, y, \psi) F_{zx}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right] = \tau_{yz}^\infty \\
 &\dots\dots\dots(3)
 \end{aligned} \right\}$$

ここで重み関数 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ としては問題の対称性ならびに、なるべく少ない項数で多様な関数形を表現できることを考慮した多項式を用いる。具体的には yz 方向せん断型体積力対の重み関数 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ の表現には β_i , ($i=0, 1, 2, \dots, (n+1)(n+2)/2$) を係数とする ξ_a の偶数乗と η_b のべき乗の組み合わせによる多項式を用いる。また、 zx 方向せん断型体積力対の重み関数 $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ の表現には γ_i を係数とする ξ_a の奇数乗と η_b のべき乗の組み合わせによる多項式を用いる。結局、 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は式(4)で表される。

$$\left. \begin{aligned}
 F_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \beta_0 + \beta_1 \eta_b + \dots + \beta_{n-1} \eta_b^{n-1} + \beta_n \eta_b^n \\
 &+ \beta_{n+1} \xi_a^{2 \times 1} + \beta_{n+2} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b + \dots + \beta_{2n} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b^{n-1} \\
 &\quad \vdots \\
 &+ \beta_{l-2} \xi_a^{2 \times (n-1)} + \beta_{l-1} \xi_a^{2 \times (n-1)} \eta_b \\
 &+ \beta_l \xi_a^{2 \times n} \\
 &= \sum_{i=0}^l \beta_i G_i(\xi_a, \eta_b) \\
 F_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \gamma_0 \xi_a + \gamma_1 \xi_a \eta_b + \dots + \gamma_{n-1} \xi_a \eta_b^{n-1} + \gamma_n \xi_a \eta_b^n \\
 &+ \gamma_{n+1} \xi_a^{2 \times 1+1} + \gamma_{n+2} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b + \dots + \gamma_{2n} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b^{n-1} \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 &\quad \vdots \\
 &+ \gamma_{l-2} \xi_a^{2 \times (n-1)+1} + \gamma_{l-1} \xi_a^{2 \times (n-1)+1} \eta_b \\
 &+ \gamma_l \xi_a^{2 \times n+1} \\
 &= \sum_{i=0}^l \gamma_i Q_i(\xi_a, \eta_b) \quad l = \sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 G_0(\xi_a, \eta_b) &= 1, G_1(\xi_a, \eta_b) = \eta_b, \dots \\
 \dots, G_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1}, \dots, G_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2 \times n} \\
 Q_0(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a, Q_1(\xi_a, \eta_b) = \xi_a \eta_b, \dots \\
 \dots, Q_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1+1}, \dots, Q_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2 \times n+1} \\
 &\dots\dots\dots(4)
 \end{aligned} \right\}$$

結局問題は、式(3)、式(4)より重み関数 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ の $\beta_0 \sim \beta_l$, $\gamma_0 \sim \gamma_l$ の $2 \cdot (l+1)$ 個の係数を未知数とする連立一次方程式を解くことに帰する。

4. 数値計算結果と検討

3節までの理論に基づいて、計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ n , 半だ円表面き裂の傾斜角 ψ を変化させて、形状比 $b/a = 0.5, 1.0$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ として計算した。式(3), (4)から得られる連立方程式中の数値積分には、二重指数関数型積分公式 (FACOM FORTRAN SSL II AQME) 等のサブルーチンを用いて計算した。また結果として得られた応力拡大係数 K_{II} , K_{III} をまとめるのに以下の無次元化値 F_{II} , F_{III} を用いた (p_0 等の記号は図1参照)。

$$\left. \begin{aligned}
 F_{II}(\beta) &= \frac{K_{II}(\beta)}{p_0 \sqrt{\pi b}} = \left(F_{yz} \frac{k' \cos \beta}{B(k)} + F_{zx} \frac{\sin \beta}{C(k)} \right) \frac{k^2}{(1-k^2 \cos^2 \beta)^{3/4}} \\
 F_{III}(\beta) &= \frac{K_{III}(\beta)}{p_0 \sqrt{\pi b}} = \left(-F_{yz} \frac{\sin \beta}{B(k)} + F_{zx} \frac{k' \cos \beta}{C(k)} \right) \frac{(1-\nu)k^2}{(1-k^2 \cos^2 \beta)^{3/4}} \\
 F_{yz} &= F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \Big|_{\xi_a = \cos \beta, \eta_b = \sin \beta} \\
 F_{zx} &= F_{zx}(\xi_a, \eta_b) \Big|_{\xi_a = \cos \beta, \eta_b = \sin \beta} \\
 &\dots\dots\dots(5)
 \end{aligned} \right\}$$

図1(a)の問題で、これまで解析の見当たらない傾斜角 $\psi = 60^\circ$ について、式(4)の多項式の次数 n を変化させたときの収束性の例を表1に示す。表1では有効数字4けた程度収束している。また、境界条件の満足度を図2に示す。図2で境界条件 $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ は、 $n=20$ で 2×10^{-4} 以下で満足される。即ち本解析法は $\psi = 60^\circ$ でも良好な収束性と境界条件の満足度を与える。自由表面の影響を強く受ける浅いき裂の解析⁽⁹⁾⁽¹¹⁾では、求める未知関数の変化が複雑となり、従来の階段関数等を用いる方法では十分に表現できないため収束性が悪くなる。一方、本解析法では、このような場合にも良

好な結果が得られることが確認される。

半だ円き裂を有する半無限体が一様圧縮応力を受ける場合 (図 1 (b)) の最深部の応力拡大係数 $F_{II} (\beta = 90^\circ)$ を、き裂面の摩擦係数 μ を変化させて表 2 および図 3, 4 に示す。これらの図表で $b/a \rightarrow 0$ は、前報⁽⁹⁾の方法で得られた 2 次元問題の解析結果である。図 3 はき裂面の摩擦係数 $\mu=0$ の場合の応力拡大係数を、引張りの場合と比較している。き裂面の摩擦係数が $\mu=0$ の場合、圧縮の場合の方が絶対値が大であることが分かる。引張の結果はき裂面が接触せずき裂面がオーバーラップするとした場合の圧縮の結果に相当する。従って、き裂面の接触を考慮しない解析結果はき裂面が接触を考慮する解析結果に対して危険側となる。一方、図 4 に示すようにき裂面の摩擦係数は K_{II} に大きく影響する。また、き裂の形状比 b/a の減少に伴って、3 次元問題の

解析結果は 2 次元の結果に無理なく近づく。図 5 にき裂前縁に沿った F_{II} , F_{III} の分布の例を摩擦係数 $\mu = 0.0, 0.6$, 傾斜角度 $\psi = 45^\circ, 60^\circ$ の場合に示す。

図 6, 図 7 に接触荷重とき裂との距離を変化させた時のき裂の最深部の応力拡大係数 $F_{II} (\beta = 90^\circ)$ を示す。図 6 ($\psi = 45^\circ$) で市丸らの解析結果⁽⁸⁾は本解析結果と大体よく一致している。いま、たとえば、応力拡大係数 K_{II} の最大値に注目して、傾斜角度 $\psi = 60^\circ$ の結果 (図 7) とこれまで多くの解析例のある傾斜角度 $\psi = 45^\circ$ の結果 (図 6) を比べると、解析した範囲では最大で 6% 程度の違いが認められる。図 6, 7 では、き裂最深部の F_{II} のみ示しているが、図 6, 7 中の 3 ケース、すなわち、

- ①, ①' $b/c=1.0, e/c=0.0$
- ②, ②' $b/c=2.0, e/c=1.0$

Table.1 Convergence of dimensionless stress intensity factor $F_{II}(\beta), F_{III}(\beta)$ when $b/a=1.0, \psi=60^\circ, \nu=0.3, a/c=2.0, e/c=1.0$ in Fig.1(a)

	β (deg)	n													
		1	3	5	7	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90
F_{II}	17	-0.01007	-0.00797	-0.00632	-0.00400	-0.00103	0.00065	0.02420	0.05864	0.09692	0.12996	0.15269	0.16569	0.17193	0.17373
	18	-0.01010	-0.00805	-0.00640	-0.00403	-0.00103	0.00065	0.02421	0.05864	0.09692	0.12996	0.15269	0.16569	0.17193	0.17374
	19	-0.01010	-0.00808	-0.00643	-0.00403	-0.00103	0.00064	0.02422	0.05864	0.09692	0.12996	0.15269	0.16569	0.17193	0.17372
	20	-0.01010	-0.00811	-0.00644	-0.00403	-0.00103	0.00064	0.02422	0.05864	0.09692	0.12996	0.15268	0.16569	0.17193	0.17374
	F_{III}	17	0.01403	0.01331	0.01549	0.01902	0.02326	0.02558	0.05154	0.07263	0.08117	0.07597	0.06104	0.04158	0.02085
18	0.01400	0.01334	0.01556	0.01906	0.02327	0.02558	0.05153	0.07262	0.08117	0.07597	0.06104	0.04159	0.02086	0.00000	
19	0.01405	0.01337	0.01560	0.01909	0.02327	0.02557	0.05154	0.07262	0.08116	0.07597	0.06104	0.04159	0.02086	0.00000	
20	0.01411	0.01338	0.01561	0.01908	0.02326	0.02556	0.05154	0.07262	0.08116	0.07597	0.06104	0.04158	0.02086	0.00000	

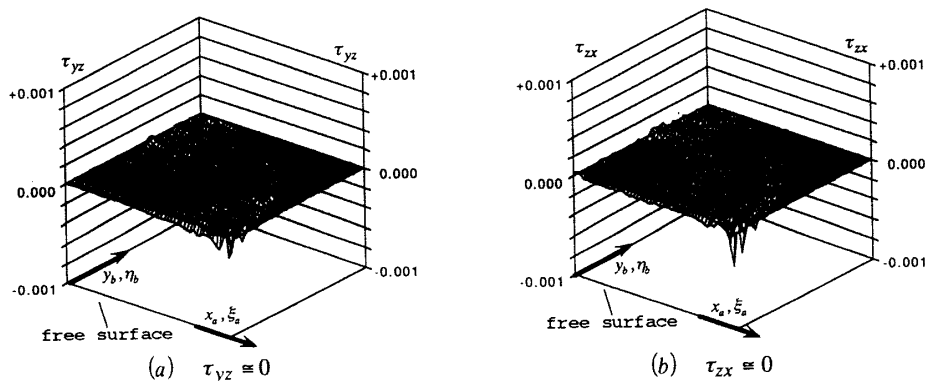


Fig.2 Compliance of boundary condition $\tau_{yz}=0, \tau_{zx}=0$ when $b/a=1.0, n=20, \psi=60^\circ, \nu=0.3, a/c=2.0, e/c=1.0$ in Fig.1(a)

Table.2 Dimensionless stress intensity factor $F_{II}(\beta=90^\circ)$ in Fig.1(b)

	b/a	μ ψ (deg)	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	
			F_{II}	→0	15	0.2772	0.0709	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
30	0.4686	0.3096			0.1470	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
45	0.5321	0.4279			0.3226	0.2160	0.1084	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
60	0.4674	0.4113			0.3554	0.2998	0.2446	0.1902	0.1366	0.0843	0.0330	0.0000	0.0000
0.5	15	0.2557		0.0657	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	30	0.4285		0.2849	0.1364	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	45	0.4843		0.3917	0.2971	0.2005	0.1014	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	60	0.4276		0.3775	0.3274	0.2773	0.2273	0.1777	0.1284	0.0796	0.0314	0.0000	0.0000
1.0	15	0.2116		0.0543	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	30	0.3570		0.2373	0.1136	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	45	0.4054		0.3284	0.2496	0.1688	0.0857	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	60	0.3581		0.3170	0.2758	0.2344	0.1930	0.1515	0.1101	0.0686	0.0273	0.0000	0.0000

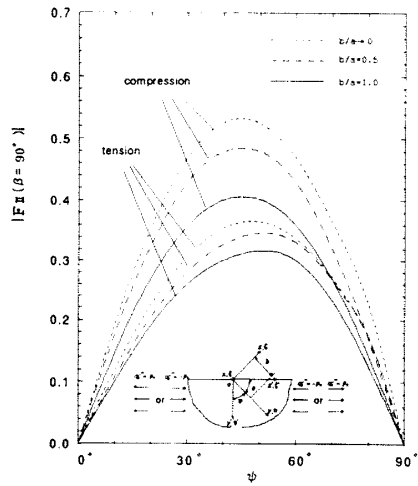


Fig.3 Comparison of $F_{II} |(\beta=90^\circ)|$ between tension and compression when $b/a \rightarrow 0, 0.5, 1.0$ in Fig.1(b)

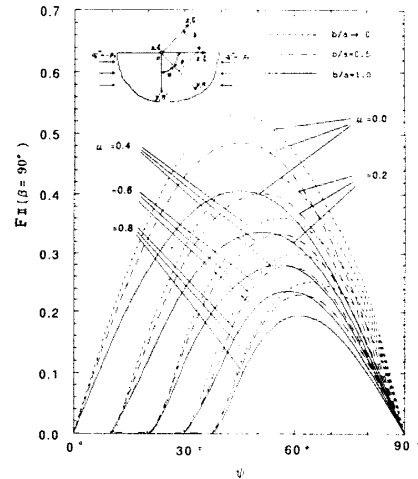
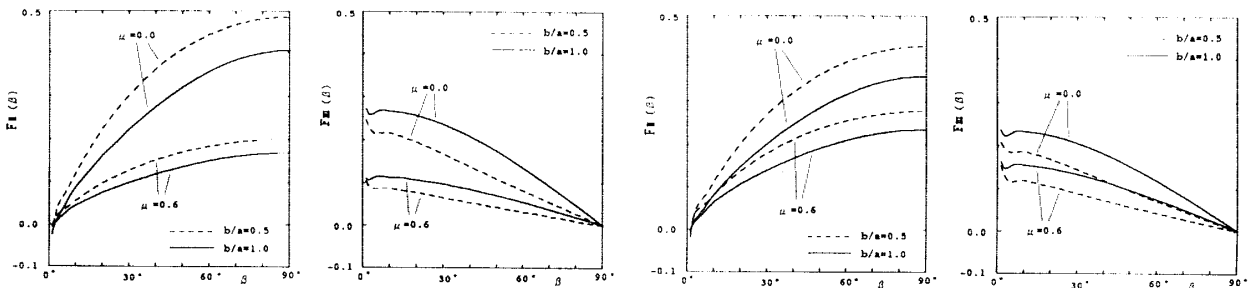


Fig.4 Dimensionless stress intensity factor $F_{II}(\beta=90^\circ)$ vs. ψ relation in Fig.1(b)



(a) $\psi=45^\circ$ (b) $\psi=60^\circ$
Fig.5 Variation of F_{II}, F_{III} along crack front when $\psi=45^\circ, 60^\circ$ in Fig.1(b)

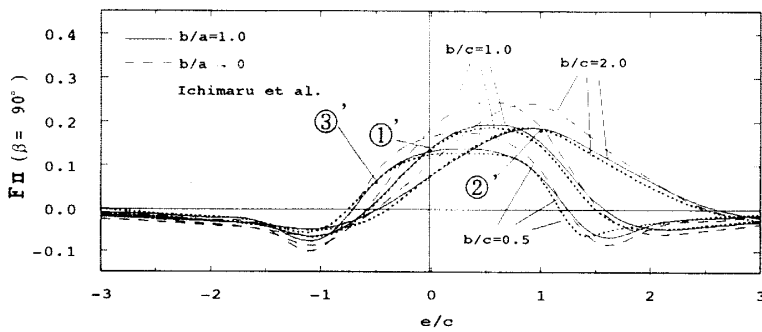


Fig.6 $F_{II}(\beta=90^\circ)$ vs. e/c when $\psi=45^\circ, \nu=0.3, f=\mu=0$ in Fig.1(a)
(Variations of F_{II}, F_{III} along the crack front are indicated in Fig.8 for the cases ①', ②', ③')

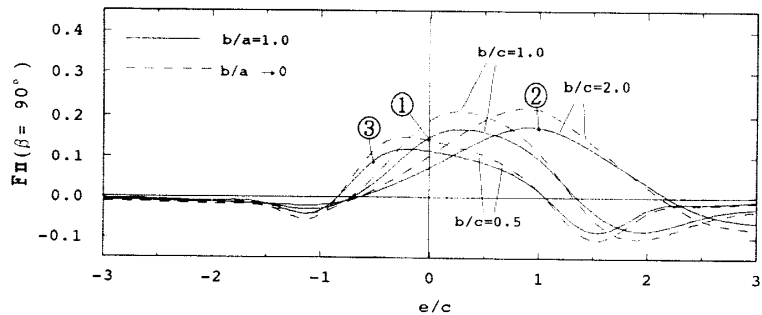


Fig.7 $F_{II}(\beta=90^\circ)$ vs. e/c when $\psi=60^\circ, \nu=0.3, f=\mu=0$ in Fig.1(a)
(Variations of F_{II}, F_{III} along the crack front are indicated in Fig.8 for the cases ①, ②, ③)

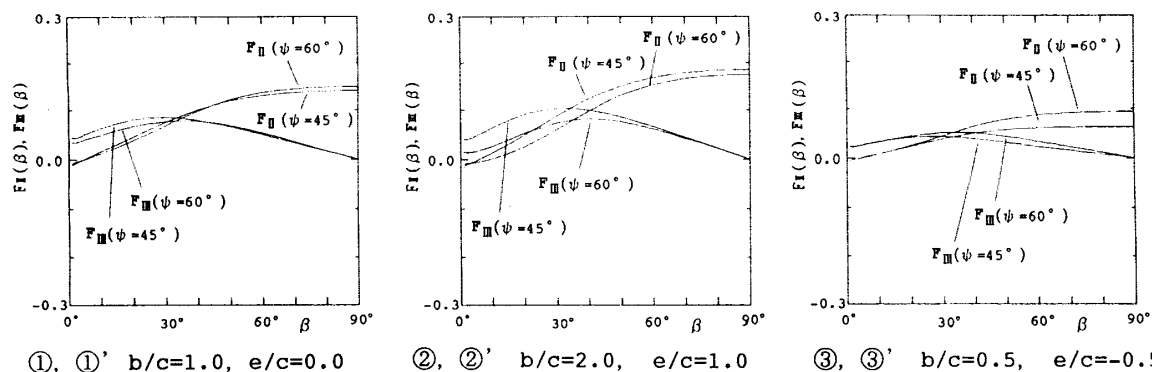


Fig.8 Variation of F_{II} , F_{IIM} along crack front in Fig.1(a) when $\psi=60^\circ$, $\nu=0.3$, $n=20$ in Fig.1(a)

③, ③' $b/c=0.5, e/c=-0.5$
 の条件に対し、き裂先端の応力拡大係数 F_{II} , F_{IIM} の分布を図8に比較して示す。

5. 結 言

実際の転がり疲労では、自由表面とき裂面の角度が $15^\circ \sim 30^\circ$ のごく浅い角度で生じるき裂が観察されるが、その解析は従来の方法では困難であった。そこで本論文では、このような3次元き裂のき裂面が接触する問題を、体積力法の特異積分方程式法で表現し、その数値解析法を、前報の方法⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾を発展させ考察した。得られた結果をまとめると以下ようになる。

(1) 未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を適用した結果、良好な収束性(表1)と境界条件の満足度(図2)、ならびに滑らかな応力拡大係数の分布(図5, 8)が得られた。すなわち本解析法は、従来の方法では解析困難とされる表面とき裂面のなす角度が小さい場合(図1で $\psi = 60^\circ$)でも多項式の次数 $n=20$ 程度で良好な結果を与える。

(2) 遠方での圧縮応力を受けて表面き裂のき裂面が接触する場合、き裂が接触せずき裂面がオーバーラップするとした場合の結果に比べて応力拡大係数 K_{II} が大きくなる。つまり、き裂面が接触したことの K_{II} への影響はき裂面の摩擦が小さい場合には危険側となる(図3)。き裂面の摩擦係数 μ の影響は顕著に現れ、摩擦係数の増加とともに応力拡大係数 K_{II} は小さくなる(図4)。き裂の形状比 b/a が小さくなるにつれて結果は2次元解析の結果に無理なく近づく(図3, 4)。

(3) 応力拡大係数 K_{II} の最大値に注目して、傾斜角度 $\psi = 60^\circ$ の結果とこれまで多くの解析例のある傾斜角

度 $\psi = 45^\circ$ の結果を比べると、解析した範囲では最大で6%程度の違いが認められた(図6, 7)。また、市丸らの解析結果($\psi = 45^\circ$)は、本結果と大体よく一致した(図6)。

2次元問題の解析と研究のまとめを担当していただいた卒論学生田口光信君に深くお礼申し上げます。

文 献

- (1)例えば, Keer, L.M. and Bryant, M.D., A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue, *Trans. ASME, J. Lubr. Technol.*, 105 (1983), 198-205.
- (2)Bower, A.F., The Influence of Crack Face Friction and Trapped Fluid on Surface Initiated Rolling Contact Fatigue Cracks, *Trans. ASME, J. Tribol.*, 110 (1988), 704-711.
- (3)例えば, 村上敬宜・兼田慎宏・八塚裕彦, ころがり接触下における表面き裂の伝ば解析, 機論, 51-467, C(1985), 1603-1611.; Murakami, Y., Kaneta, M. and Yatsuzuka, H., Analysis of Surface Crack Propagation in Lubricated Rolling Contact, *ASLE Trans.*, 28 (1985), 60-68.
- (4)例えば, Kaneta, M., Yatsuzuka, H. and Murakami, Y., Mechanism of Crack Growth in Lubricated Rolling/Sliding Contact, *ASLE Trans.*, 28 (1985), 407-414.; Kaneta, M., Suetsugu, M. and Murakami, Y., Mechanism of Crack Growth in Lubricated Rolling/Sliding Spherical Contact, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 53 (1986), 354-360.
- (5)Way, S., Pitting Due to Rolling Contact, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 2 (1935), A49-A58.
- (6)例えば, Hanson, M. T. and Keer, L.M., An Analytical Life Prediction Model for the Crack Propagation Occuring in Contact Fatigue Failure, *ASLE Trans.* 35 (1992), 451-461.
- (7)例えば, 市丸和徳, 転がり疲れに関する接触理論および破壊力学的研究, トライボロジスト, 39-8, (1994), 600-607.
- (8)Ichimaru, K., Hamasaki, S., and Murakami, Y., (Murakami, Y. ed), *Stress Intensity Factors Handbook*, Vol.3, (1992), 816-836., Pergamon Press.
- (9)野田尚昭・福井寛, き裂面接触問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法(モードII応力拡大係数に及ぼす傾斜角度と摩擦係数の影響), 機論, 65-629, A(1999), 141-145.
- (10)野田尚昭・小林公浩・三好伸介, 特異積分方程式を用いた傾斜半円表面き裂先端の応力拡大係数の解析, 機論, 63-615, A (1997), 2345-2350.
- (11)野田尚昭・小田和広・陳取珩, 超越特異積分方程式による混合モードき裂解析, 機論, 56-532, A(1990), 2405-2410.
- (12)村上敬宜・石田誠, 任意形状傾斜表面き裂のモードの応力拡大係数の解析法, 機論, 50-455, A(1984), 1359-1366.
- (13)Mindlin, R.D., Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid, *Physic*, 7, (1936), 195-202.