

き裂面接触問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法* (モード II 応力拡大係数に及ぼす傾斜角度と摩擦係数の影響)

野田 尚昭*¹, 福井 寛*²

Numerical Solutions of Singular Integral Equations of the Body Force Method in Crack Surface Contact Problems (Effect of Crack Inclination Angle and Friction Coefficient on Mode II Stress Intensity Factors)

Nao-Aki NODA and Hiroshi FUKUI

In this paper numerical solutions of singular integral equations of the body force method are considered when the whole or some part of the crack surfaces are in contact each other. The body force method is used to formulate the problem as a system of singular integral equations. In the numerical solutions unknown body force densities are approximated using fundamental density functions and Chebyshev polynomials. The calculation shows that the present method yields rapidly converging numerical results even when the inclination angle between the crack and the free surface is small. The mode II stress intensity factors are shown when an inclined edge crack is subjected to compressive residual stresses or Hertzian contact loads with varying the inclination crack angle and friction coefficient.

Key Words: Elasticity, Tribology, Fracture Mechanics, Rolling Contact Fatigue, Surface Crack, Crack Propagation, Stress Intensity Factor, Body Force Method

1. 緒言

最近、転がり接触荷重を受ける表面層の破壊問題を破壊力学を応用して解明しようとする研究が多くなされている。例えば、Keer-Bryant⁽¹⁾は二次元き裂モデルを用いて、疲労き裂伝ばにParis則を適用し、転がり疲労寿命を推定する方法を提案している。そして、初期き裂寸法の分布を指数関数で仮定して、従動側の寿命が駆動側より短くなることを予測している。また、Bower⁽²⁾はき裂面の摩擦とき裂面に閉じ込められた油圧の効果を検討した解析を行っている。また、村上、兼田ら⁽⁴⁾は三次元き裂問題を体積力法を応用して一連の解析を行っている。これらの解析では自由表面との傾斜角度が15°~30°のごく浅い角度で生じるき裂の解析が要求されるが、このようなき裂の応力拡大係数は自由表面の影響を強く受けるのでその解析は一般に困難である。また、荷重によってき裂面のどの部分が接触するかはあらかじめ知ることができないので、繰り返し計算が必要となるのみならず、き裂面の摩擦係数が応力拡大係数へ及ぼす影響を考慮する必要がある。

最近著者らは、体積力法の特異積分方程式の数値解析において未知関数を基本密度関数とChebyshev多項式で近似する数値解析法を提案し、傾斜角度が小さい場合も精度良い解析結果を得られることを示した⁽⁶⁾。表1は半無限板中の傾斜縁き裂の引張りにおいて、その解析結果を西谷⁽⁶⁾、石田⁽⁷⁾、長谷部ら⁽⁸⁾の結果と比較したものである。自由表面との傾斜角度が小さい場合、従来の体積力法(応力法⁽⁶⁾、合力法⁽⁷⁾)の結果には、数%の誤差が生じているのに対して、著者らの結果と長谷部らの等角写像法⁽⁸⁾による結果は有効数字3けたまで完全に一致する。このような従来の体積力法の誤差は三次元き裂問題ではさらに大きくなるものと考えられる。そこで本研究では、さきに提案した方法を拡張して、転がり接触荷重を受ける表面損傷問題等のき裂面の一部、あるいは全部が接触する問題に対して有効な特異積分方程式の数値解析法を提案する。そしてき裂面の摩擦係数とき裂面の傾斜角度の及ぼすモード II 応力拡大係数 K_{II} への影響を明らかにする。荷重としては、接触応力と遠方での圧縮応力(表面近くの圧縮残留応力に相当)を考える。本論文で示すような方法はより解析が困難な三次元き裂問題にも適用可能である⁽⁹⁾。また、本報では考慮しなかったが、き裂内への潤滑油の侵入を考えた内部き裂型モデルの解析⁽²⁾にも本解析

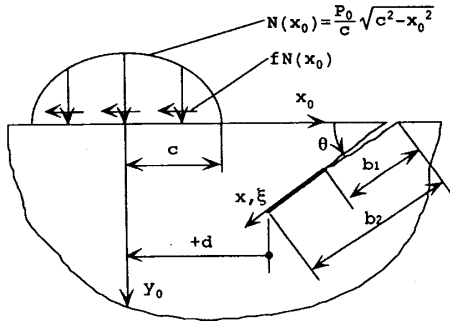
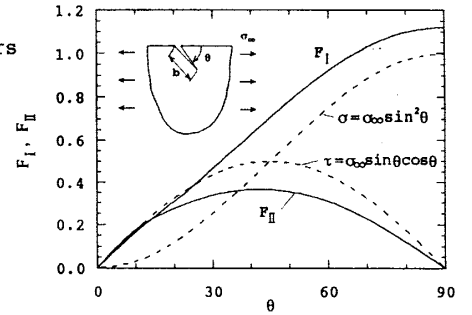
* 原稿受付 1998年3月26日。

¹ 正員,九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区清水町1-1)。² 学生員,九州工業大学大学院。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

Table 1 Comparison between the results obtained by several authors

θ deg.	Noda. et al		Nisitani		Isida		Hasebe	
	F I	F II	F I	F II	F I	F II	F I	F II
10	0.1621	0.1734	0.225	0.228	0.239	0.219	0.162	0.174
15	0.2318	0.2261					0.232	0.226
20	0.3054	0.2710	0.461	0.337	0.335	0.301	0.305	0.271
22.5	0.3436	0.2905					0.463	0.336
30	0.4625	0.3362					0.461	0.338



μ : coefficients of friction for crackfaces
f : coefficients of friction for Hertzian contact

Fig.1 Problem of Analysis

法は有効であると考えられる。

2. 体積力法の特異積分方程式の数値解析法

半無限板中に図1に示すような長さ b_2 の縁き裂が存在し、その一部[長さ b_1 の部分]が開口しているとす。問題は、き裂のない弾性体の仮想き裂面上に分布させた体積力密度 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ を未知関数とする次のような積分方程式で表わされる。

$$\int_0^{b_1} \frac{P_1(\xi)}{(\xi - x_1)^2} d\xi + \int_0^{b_1} K_{11}(\xi, x_1) P_1(\xi) d\xi + \int_0^{b_2} K_{12}(\xi, x_1) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{(\kappa + 1)^2}{2(\kappa - 1)} p_0(x_1) \dots (1a)$$

$$\int_0^{b_2} \frac{P_2(\xi)}{(\xi - x_2)^2} d\xi + \int_0^{b_1} K_{21}(\xi, x_2) P_1(\xi) d\xi + \int_0^{b_2} K_{22}(\xi, x_2) P_2(\xi) d\xi = -\pi \frac{\kappa + 1}{2} q_0(x_2) \dots (1b)$$

ここで、 $[0, b_1]$, $[0, b_2]$ はそれぞれ引張型およびせん断型の標準型体積力密度 $P_1(\xi)$, $P_2(\xi)$ を作用させる範囲であり、 $K_{ij}(\xi, x_j)$, $(i, j = 1, 2)$ は直線縁の境界条件を満足させる関数、 $p_0(x_1)$, $q_0(x_2)$ は、仮想き裂面上で打ち消すべき表面力である。 $p_0(x_1)$, $q_0(x_2)$ は以下のようなになる⁽⁹⁾。

$$p_0(x_1) = \sigma_n$$

$$q_0(x_2) = \begin{cases} \tau_{ns} & \text{if } 0 \leq x_2 \leq b_1 \\ \tau_{ns} + \mu(\sigma_n - \sigma_n') & \text{if } b_1 \leq x_2 \leq b_2, \tau_{ns} > 0, |\tau_{ns}| > \mu|\sigma_n| \\ \tau_{ns} - \mu(\sigma_n - \sigma_n') & \text{if } b_1 \leq x_2 \leq b_2, \tau_{ns} < 0, |\tau_{ns}| > \mu|\sigma_n| \\ 0 & \text{if } b_1 \leq x_2 \leq b_2, |\tau_{ns}| < \mu|\sigma_n| \end{cases}$$

$$\sigma_n = (\sigma_x^n + \sigma_x^t) \sin^2 \theta + (\sigma_y^n + \sigma_y^t) \cos^2 \theta - 2(\tau_{xy}^n + \tau_{xy}^t) \sin \theta \cos \theta$$

$$\tau_{ns} = [(\sigma_x^n + \sigma_x^t) - (\sigma_y^n + \sigma_y^t)] \sin \theta \cos \theta + (\tau_{xy}^n + \tau_{xy}^t) (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)$$

$$\sigma_x^n = -\frac{P_0}{\pi} y_0 \left(\frac{c^2 + 2x_0^2 + 2y_0^2}{c} F - \frac{2\pi}{c} - 3x_0 G \right)$$

$$\sigma_y^n = -\frac{P_0}{\pi} y_0 (cF - x_0 G), \tau_{xy}^n = -\frac{P_0}{\pi} y_0^2 G$$

$$\sigma_x^t = -\frac{f P_0}{\pi} \left[(2x_0^2 - 2c^2 - 3y_0^2) G + 2\pi \frac{x_0}{c} + 2(c^2 - x_0^2 - y_0^2) \frac{x_0}{c} F \right]$$

$$\sigma_y^t = -\frac{f P_0}{\pi} y_0^2 G, \tau_{xy}^t = -\frac{f P_0}{\pi} \left[(c^2 + 2x_0^2 + 2y_0^2) \frac{y_0}{c} F - 2\pi \frac{y_0}{c} - 3x_0 y_0 G \right]$$

$$F = \frac{\pi}{K_1} \left(1 + \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \right) / \left(\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} + \left(\frac{K_1 + K_2 - 4c^2}{K_1} \right)} \right)$$

$$G = \frac{\pi}{K_1} \left(1 - \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \right) / \left(\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \sqrt{2\sqrt{\frac{K_2}{K_1}} + \left(\frac{K_1 + K_2 - 4c^2}{K_1} \right)} \right)$$

$$K_1 = (c + x_0)^2 + y_0^2, K_2 = (c - x_0)^2 + y_0^2$$

$$\sigma_n' = \int_0^{b_2} K_{12}(\xi, x_2) P_2(\xi) d\xi \dots (1c)$$

積分区間 $[0, b_1]$ が $[0, 1]$ になるように、変数 ξ , x_1 を次の r , s_1 を用いて変換すると式(1a)は式(3)のようになる。

$$r = \frac{\xi}{b_1}, s_1 = \frac{x_1}{b_1}, f_i(r) = \frac{P_i(\xi)}{b_1}, (i = 1, 2) \dots (2)$$

$$\int_0^1 \frac{f_1(r)}{(r - s_1)^2} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s_1) f_1(r) dr + \int_0^{b_2} k_{12}(r, s_1) f_2(r) dr = \pi \frac{(\kappa + 1)^2}{2(\kappa - 1)} p(s_1) \left(b_2 = \frac{b_2}{b_1} \right) \dots (3)$$

一方、積分区間 $[0, b_2]$ が $[0, 1]$ となるように変数 ξ , x_2 を次の t , u_1 を用いて変換すると式(1b)は式(5)のようになる。

$$t = \frac{\xi}{b_2}, u_1 = \frac{x_1}{b_2}, g_i(t) = \frac{P_i(\xi)}{b_2}, (i = 1, 2) \dots (4)$$

$$\int_0^1 \frac{g_2(t)}{(t-u_2)^2} dt + \int_0^{b_1} k_{21}(t, u_2) g_1(t) dt + \int_0^1 k_{22}(t, u_2) g_2(t) dt = -\pi \frac{\kappa+1}{2} q(u_2), \left(b_1 = \frac{b_1}{b_2} \right) \dots\dots\dots(5)$$

式(3)と式(5)の数値解析法として、ここでは $f_i(r)$ を基本密度関数 $w_i(r)$, ($i=1, 2$)とChebyshev多項式の積で近似する。

$$\begin{aligned} w_1(r) &= \frac{(\kappa+1)^2}{2(\kappa-1)} \sqrt{1-r^2}, w_2(r^*) = \frac{\kappa+1}{2} \sqrt{1-r^{*2}} \\ w_1(t^*) &= \frac{(\kappa+1)^2}{2(\kappa-1)} \sqrt{1-t^{*2}}, w_2(t) = \frac{\kappa+1}{2} \sqrt{1-t^2} \\ f_1(r) &= F_1(r)w_1(r), F_1(r) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n U_n(r) \\ f_2(r) &= \frac{1}{C_0} F_{II}(r^*)w_2(r^*), F_{II}(r^*) = \sum_{n=0}^{N-1} e_n U_n(r^*) \\ g_1(t) &= C_0 F_I(t^*)w_1(t^*), F_I(t^*) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n U_n(t^*) \\ g_2(t) &= F_{II}(t)w_2(t), F_{II}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} e_n U_n(t) \\ r^* &= \frac{b_1}{b_2} r, t^* = \frac{b_2}{b_1} t, C_0 = \frac{b_1}{b_2} \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

接触域の寸法($b_2 - b_1$)はあらかじめ知ることはできないので、ここでは予想されるき裂開口部 b_1 の寸法をいくつか仮定して解析を行った。どの b_1 が正しい値であるかはき裂開口変位を調べることによって決めることができる。すなわち、き裂開口部 b_1 から閉口部($b_2 - b_1$)に至るまで滑らかに変化するき裂開口変位が得られる場合が正しい b_1 であると考えられる。

そして、特異性を含む項は次の積分公式を使う。また、特異性を含まない項は普通の数値積分を使う。

$$\int_{-1}^1 \frac{U_n(r)\sqrt{1-r^2}}{(r-s_1)^2} dr = -\pi(n+1)U_n(s_1) \dots\dots\dots(7)$$

この公式を利用するために式(3), (5)を次のように変形する。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{f_1(r)}{(r-s_1)^2} dr - \int_{-1}^0 \frac{f_1(r)}{(r-s_1)^2} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s_1) f_1(r) dr + \int_0^{b_1} k_{12}(r, s_1) f_2(r) dr &= -\pi \frac{(\kappa+1)^2}{2(\kappa-1)} p(s_1) \\ \int_{-1}^1 \frac{g_2(t)}{(t-u_2)^2} dt - \int_{-1}^0 \frac{g_2(t)}{(t-u_2)^2} dt + \int_0^{b_1} k_{21}(t, u_2) g_1(t) dt + \int_0^1 k_{22}(t, u_2) g_2(t) dt &= -\pi \frac{\kappa+1}{2} q(u_2) \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

式(6), (7)を式(8)に代入すれば、これらの積分方程式は係数 a_n, e_n についての $2M$ 元の連立方程式となる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} [a_n \{-\pi(n+1)U_n(s_1) + A_n(s_1)\} + e_n B_n(s_1)] &= -\pi p(s_1) \\ \sum_{n=0}^{N-1} [a_n C_n(u_2) + e_n \{-\pi(n+1)U_n(u_2) + D_n(u_2)\}] &= -\pi q(u_2) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_n(s_1) &= -\int_{-1}^0 \frac{U_n(r)\sqrt{1-r^2}}{(r-s_1)^2} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s_1) U_n(r) \sqrt{1-r^2} dr \\ B_n(s_1) &= \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{1}{C_0} \int_0^{b_1} k_{12}(r, s_1) U_n(r^*) \sqrt{1-r^{*2}} dr \\ C_n(u_2) &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} C_0 \int_0^{b_1} k_{21}(t, u_2) U_n(t^*) \sqrt{1-t^{*2}} dt \\ D_n(u_2) &= -\int_{-1}^0 \frac{U_n(t)\sqrt{1-t^2}}{(t-u_2)^2} dt + \int_0^1 k_{22}(t, u_2) U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

境界条件を満足する点は次の式で与えられる。

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2j}{2M+1} \pi \right) \right] \\ u_2 &= \begin{cases} \frac{b_1}{2b_2} \left[1 + \cos \left(\frac{2j}{2M_1+1} \pi \right) \right], & \text{if } 0 < u_2 < \frac{b_1}{b_2} \\ \frac{b_1}{b_2} + \frac{b_2-b_1}{2b_2} \left[1 + \cos \left(\frac{2j}{2M_2+1} \pi \right) \right], & \text{if } \frac{b_1}{b_2} < u_2 < 1 \\ 0 < s_1, u_2 < 1, M_1 + M_2 = M \end{cases} \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

応力拡大係数は次の式で与えられる。

$$K_I = F_I(1)\sqrt{\pi b_1}, K_{II} = F_{II}(1)\sqrt{\pi b_2} \dots\dots\dots(12)$$

以上の解法により半無限板の斜め縁き裂の無次元化応力拡大係数を求めた。

3. 解析結果

3・1 解の収束性 本解析法の収束性を、半無限板の縁に作用させる接触応力の位置およびき裂の傾斜角度を変化させて表2~4に示す。表2, 3では接触応力の作用している面の摩擦係数を $f=0.0$ とおいたため、き裂面の全範囲で $\sigma_n < 0$, つまりき裂面の全範囲でき裂は閉口している。表2~4よりわかるように、本解析結果は選点数 $M=30\sim 40$ 程度で収束し、良好な精度が得られていると考えられる。

3・2 圧縮残留応力場に存在する傾斜縁き裂におけるき裂面の摩擦係数の影響 図2に、傾斜縁き裂を有する半無限板の遠方に一様圧縮応力を作用させ、き裂面の摩擦係数を変化させた場合の解析結果を示す。これは表面近くの圧縮残留応力場に置かれたき裂の結果に相当する。図2では遠方で一様引張応力を作用させた場合の結果(表1)も示した。き裂面の摩擦係数が $\mu=0$ の場合の応力拡大係数を引張りの結果と比

較すると、圧縮の場合の方が絶対値が大であることが分かる。引張応力場の結果はき裂面が接触せずき裂面がオーバーラップするとした場合の圧縮応力場の結果に相当するので、き裂面の接触を考慮しない解析結果はき裂面が接触を考慮する解析結果に対してき裂面の摩擦が小さい場合には危険側となる。またき裂面の摩擦係数を増加させると、 K_{II} は小さくなることわがかる。

3・3 接触荷重を受ける半無限板の傾斜き裂の応力拡大係数

図3に半無限板に接触応力を作用させ、き裂の傾斜角度 θ を 25° としたときの解析結果をKeerらの結果と比較したものを示す。これよりKeerらの解析結果は本解析法の結果とよく一致していることがわかる。

図4は半無限板に接触応力を作用させ、き裂面の摩擦係数 μ を変化させたときの解析結果である。これより遠方で圧縮応力を作用させたときと同様に、き裂面の摩擦係数 μ を増加させると K_{II} は小さくなることわがかる。

図5は半無限板に接触応力を作用させ、き裂面の傾斜角度 θ を変化させた場合の解析結果である。これより $\theta=15\sim 45^\circ$ の範囲では応力拡大係数 K_{II} の最大値は増加している。そして、 $\theta=45\sim 75^\circ$ の範囲では K_{II} の最大値はほぼ一定値をとり、 $\theta=75\sim 90^\circ$ の範囲では K_{II} の最大値は減少している。またき裂面の傾斜角度を変化させると K_{II} の最大値を与える接触応力分布の位置が変化することがわかる。

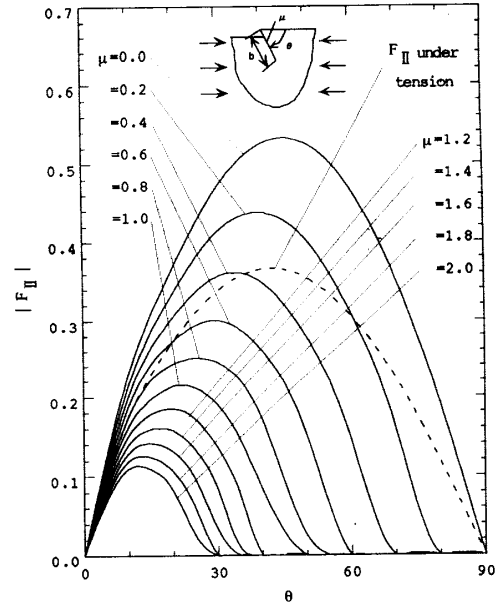


Fig.2 |F_{II}| vs θ

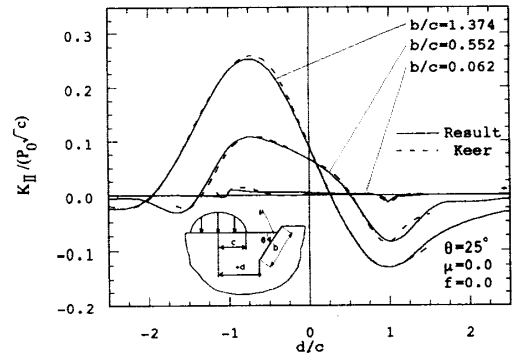


Fig.3(a) $K_{II}/P_0c^{1/2}$ vs d/c when $\mu=0.0, f=0.0, \theta=25^\circ$

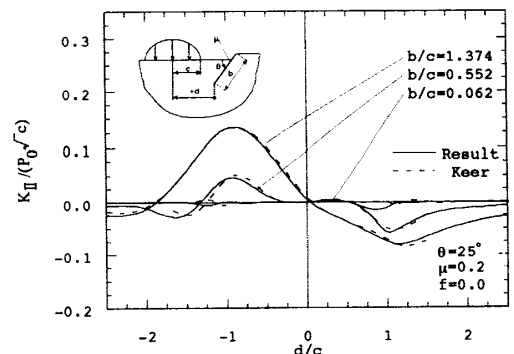


Fig.3(b) $K_{II}/P_0c^{1/2}$ vs d/c when $\mu=0.2, f=0.0, \theta=25^\circ$

Table 2 Stress Intensity Factor $K_{II}/P_0c^{1/2}$ when $\mu=0.0, f=0.0, b/c=1.374, d/c=1.0$

θ deg.	15	25	45
M			
10	-0.1307	-0.1297	-0.0143
20	-0.1308	-0.1296	-0.0143
30	-0.1308	-0.1296	

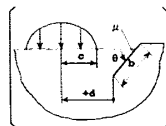


Table 3 Stress Intensity Factor $K_{II}/P_0c^{1/2}$ when $\mu=0.0, f=0.0, b/c=1.374, \theta=25^\circ$

d/c	-2.0	-1.0	0.0	1.0	2.0
M					
10	-0.0085	0.2300	0.0901	-0.1297	-0.0496
20	-0.0069	0.2301	0.0904	-0.1296	-0.0496
30	-0.0067	0.2301	0.0904	-0.1296	
40	-0.0067				

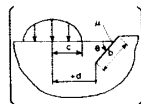
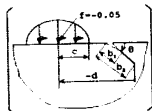


Table 4 Stress Intensity Factor $K_{II}/P_0c^{1/2}$ when $\mu=0.0, f=-0.05, b_1/c=0.5, \theta=45^\circ$

M	d/c	-2.0	-1.354
	b_1/b_2	0.56	0.45
30		-0.0165	-0.0526
	34	-0.0165	-0.0527
	38		-0.0527



4. 結 言

本論文では、き裂面接触問題における体積力法の特異積分方程式の数値解析法を考察した。結果をまとめると以下のようになる。

- (1) き裂面の一部が接触するき裂面接触問題に対して、

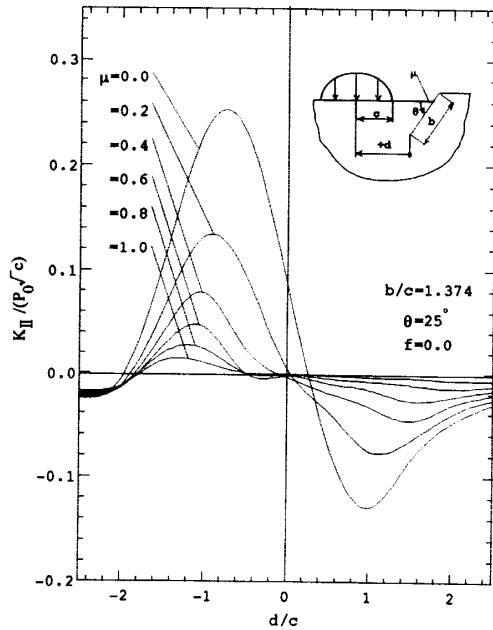


Fig.4 $K_{II}/P_0c^{1/2}$ vs d/c when $b/c=1.374$, $f=0.0$, $\theta=25^\circ$

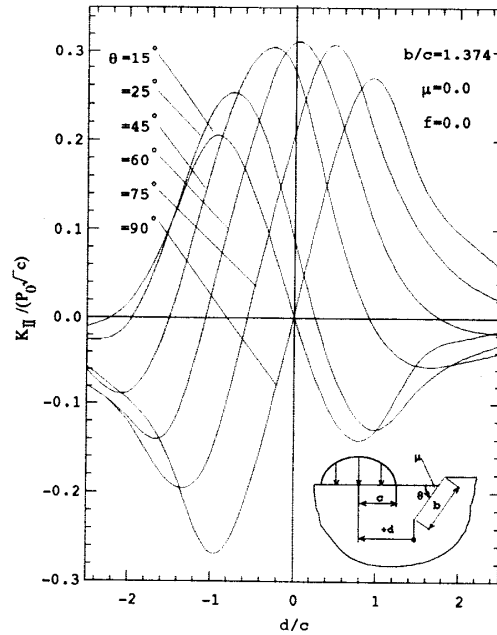


Fig.5 $K_{II}/P_0c^{1/2}$ vs d/c when $b/c=1.374$, $\mu=0.0$, $f=0.0$

未知関数である体積力密度を基本密度関数とChebyshev多項式で近似する方法を提案した。その結果、解析が困難とされるき裂面の傾斜角度が小さい場合でも選点数 $M=30\sim 40$ 程度で収束し、良好な収束性が得られた。またKeerらの結果は、本解析法とよく一致した(表2~4)。

(2) 遠方での圧縮応力を受ける縁き裂のき裂面が接触する場合、き裂が接触せずき裂面がオーバーラップするとした場合の結果に比べて応力拡大係数 K_{II} が大きくなる。つまり、き裂面が接触したことの影響はき裂面の摩擦が小さい場合には危険側となる(図2)。

(3) 接触応力および遠方での圧縮応力を受ける縁き裂の問題においてき裂面の摩擦係数 μ を変化させた場合、摩擦係数を増加させていくにつれて応力拡大係数 K_{II} は小さくなる(図2, 図4)。

(4) 接触応力を受けるき裂面の傾斜角度を変化させた場合、 $\theta=15\sim 45^\circ$ の範囲では応力拡大係数 K_{II} の最大値は増加する。そして、 $\theta=45\sim 75^\circ$ の範囲では最大値はほぼ一定値となり、 $\theta=90^\circ$ に近づくと減少する。また傾斜角度を変化させることによって、応力拡大係数 K_{II} の最大値を与える接触応力分布の位置が変化する(図5)。

文 献

- (1) Keer, L.M. and Bryant, M.D., A Pitting Model for Rolling Contact Fatigue, *Trans. ASME, J. Lubr. Technol.*, 105 (1983), 198-205.
- (2) Bower, A.F., The Influence of Crack Face Friction and Trapped Fluid on Surface Initiated Rolling Contact Fatigue Cracks, *Trans. ASME, J. Tribol.*, 110 (1988), 704-711.
- (3) Smith, J.O. and Liu C.G., Stress Due to Tangential and Normal Loads on an Elastic Solid with Application to Some Contact Stress Problems, *J. Appl. Mech.*, 20-2(1953), 157-166.
- (4) 例えば、村上敬宜・兼田慎宏・八塚裕彦, ころがり接触下における表面き裂伝ば解析, *機論*, 51-467, C(1985), 1603-1610.
- (5) 野田尚昭・小田和広・陳耽珩, 超越特異積分方程式法による混合モードき裂の解析, *機論*, 56-532, A(1990), 2405-2410.
- (6) 西谷弘信, 半無限板の直線縁にはいた斜めき裂または折れ曲りき裂の引張りにおける応力拡大係数, *機論*, 41-344, A(1975), 1103-1110.
- (7) 石田誠, 半無限板におけるき裂群, 分岐き裂及び鋭い切欠きからのき裂の解析, *機論*, 45-392, A(1979), 306-314.
- (8) Hasebe, N. and Inohara, S., Stress Analysis of a Semi-Infinite Plate with an Oblique Edge Crack, *Ing. -Arch.*, 49(1980), 51-62.
- (9) 野田尚昭・小林公浩・三好伸介, 特異積分方程式を用いた傾斜半円表面き裂先端の応力拡大係数の解析, *機論*, 63-615, A(1997), 2345-2350.