

2個の長方形介在物の干渉における介在物角部の応力拡大係数の解析†

野田 尚 昭* 陳 夢 成**
高瀬 康*** 今橋 智 則***

Analysis of Interaction between Two Rectangular Inclusions

by

Nao-Aki NODA*, Mengcheng CHEN**,
Yasushi TAKASE*** and Tomonori IMAHASHI***

This paper deals with an interaction problem of two rectangular inclusions under longitudinal tension. The body force method is used to formulate the problem as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where the unknown functions are the densities of body forces distributed in infinite plates having the same elastic constants as those of the matrix and inclusions. In order to analyze the problem accurately, the unknown functions are expressed as piecewise smooth functions using two types of fundamental densities and power series, where the fundamental densities are chosen to represent the symmetric stress singularity of $1/r^{1-\lambda_1}$ and the skew-symmetric stress singularity of $1/r^{1-\lambda_2}$. Then, generalized stress intensity factors at the end of inclusions are systematically calculated for various locations, spacings and elastic modulus of two rectangular inclusions in a plate subjected to longitudinal tension. The present method is found to be useful for accurate and efficient analysis of rectangular inclusions.

Key words: Elasticity, Composite material, Fracture mechanics, Body force method, Stress intensity factor, End effect, Interaction effect, Singular integral equations, Rectangular inclusions

1 緒 言

長方形介在物の問題は複合材料の強化繊維の2次元モデルとして重要である。これまで、1個の長方形介在物が遠方で一様な引張荷重を受ける問題が、陳、西谷^{1), 2)}によって解析され、その端部の特異応力場の強さが詳細に議論された。また、著者らも、2個の長方形介在物 (Fig. 1) が、 y 軸に対称に配置している問題を、体積力法の特異積分方程式で表現し、その高精度の数値解析法を、さきの研究で考察した³⁾。また、その解析法を一個の3次元円柱状介在物の問題に適用して、2次元と3次元モデルの結果の違いを考察した⁴⁾。しかし、実際の繊維の干渉を考える場合には繊維の x, y 方向の相対的な位置が種々に変化する場合も考察する必要がある。すなわち、複合材料中の多数個の繊維の干渉を明らかにするには、介在物の個数が2個の場合と無限個の場合 (周期配列の場合) を解析することが、最も基本的かつ重要である。そこで、本研究では、まず、Fig. 1に示すような無限板中に等大2個の長方形介在物が任意の位置で存在する場合を解析モデルとしてその干渉効果を考察する。そして複合材料の強度評価を力学的側面から行うために重要な、繊維端部の特異応力場の強さが他の繊維の干渉によってどのように影響するか、母材と介在物の剛性比や、介在物の形状、距離を変化させて明らかにする。解析には、境

界条件を満足すべき界面をいくつかの基本区間に分割し、各区間での未知関数である体積力密度を、基本密度関数と多項式で近似する、さきに提案した方法³⁾を用いる。

2 体積力法の特異積分方程式の数値解析法

Fig. 1に示すような二個の長方形介在物を有する無限板の問題を例にとり解析方法を説明する。ここで、 l_x, l_y は介在物寸法、 d_x, d_y は距離のパラメータ、 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ は無限遠での応力である。また、母材と介在物のそれぞれの横弾性定数、ポアソン比を G_M, ν_M および G_I, ν_I とする。

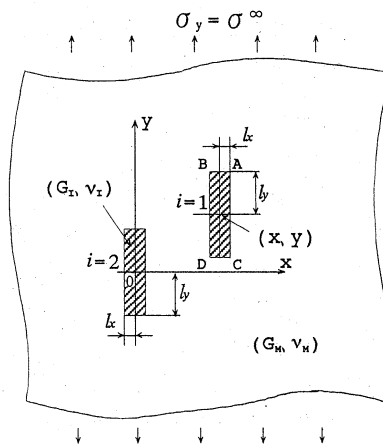


Fig. 1. Two rectangular inclusions in an infinite plate.

† 原稿受理 平成 10 年 11 月 6 日 Received Nov. 6, 1998

* 正会員 九州工業大学工学部機械工学科 〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町, Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550

** 華東交通大学工学部 〒330013 中国江西省南昌市双港路, Dept. of Mech. Eng., East China Jiaotong Univ., Shuanggang Road, Nanchang, Jiangxi Province, P.R.China, 330013

*** 九州工業大学工学部機械知能工学科 〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町, Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550

この問題は重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、無限板中の1点に集中力が働くときの任意の点の応力場の解と変位場の解を用いて解くことができる。このとき問題は、母材と同じ弾性定数をもつ無限板 M ならびに介在物と同じ弾性定数をもつ無限板 I に分布させた体積力密度を未知関数とする特異積分方程式 (1), (2) で表現される。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}F_{nM}(s_i) - \frac{1}{2}F_{nI}(s_i) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{nn}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k \right. \\ & + \int_{L_k} h_{nn}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \\ & \left. - \int_{L_k} h_{nn}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \right] = -\sigma_{nM}^{\infty}(s_i) + \sigma_{nI}^{\infty}(s_i) \\ & -\frac{1}{2}F_{tM}(s_i) - \frac{1}{2}F_{tI}(s_i) + \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{nt}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k \right. \\ & + \int_{L_k} h_{nt}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{nt}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \\ & \left. - \int_{L_k} h_{nt}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \right] = -\tau_{nM}^{\infty}(s_i) + \tau_{nI}^{\infty}(s_i) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{uu}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_{uu}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \right. \\ & \left. - \int_{L_k} h_{uu}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{uu}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \right] \\ & = -u_{M,i}^{\infty} + u_{I,i}^{\infty} \\ & \sum_{k=1}^2 \left[\int_{L_k} h_{vv}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nM}(r_k) dr_k + \int_{L_k} h_{vv}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \right. \\ & \left. - \int_{L_k} h_{vv}^{F_{nM}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k - \int_{L_k} h_{vv}^{F_{nI}}(r_k, s_i) F_{nI}(r_k) dr_k \right] \\ & = -v_{M,i}^{\infty} + v_{I,i}^{\infty} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで F_{nM} , F_{tM} ならびに F_{nI} , F_{tI} ($i=1, 2$) は無限板 M または無限板 I に分布させた法線方向および接線方向の体積力密度である。いま, Fig. 1 の母材となるべき領域 (長方形孔を有する無限板) の境界上の変位と表面力を (U_M , V_M), (σ_{nM} , τ_{ntM}) とし, 長方形介在物となるべき領域の境界上の変位と表面力を (U_I , V_I), (σ_{nI} , τ_{ntI}) とするとき, 式 (1), (2) は境界条件式 ($\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0$, $\tau_{ntM} - \tau_{ntI} = 0$, $U_M - U_I = 0$, $V_M - V_I = 0$) を表す。ここで, $\sum_{k=1}^2$ はそれぞれの長方形孔および長方形介在物となるべき仮想境界についての総和を意味する。また, \int_{L_k} は k 番目の長方形孔 (無限板 M のとき) または長方形介在物 (無限板 I のとき) となる境界上において体積力を積分することを意味する。右辺の $\sigma_{nM}^{\infty}(s_i)$, $\tau_{ntM}^{\infty}(s_i)$ 等は無限板 M の i 番目の長方形孔 (または無限板 I の i 番目の長方形介在物) となるべき仮想境界上に生じる遠方荷重による応力および変位である (母材と介在物の角点の位置を一致させるため無限板 I にも遠方荷重を作用させる)。また $h_{nn}^{F_{nM}}(r_k, s_i)$ 等は無限板 M の k 番目の長方形孔となるべき仮想境界上の点 r_k に法線方向または接線方向の単位強さの集中力が作用するとき, i 番目の長方形孔となるべき仮想境界上の任意の選点 s_i に生じる応力および変位である。

式 (1), (2) の離散化数値解析のため, 長方形孔または

長方形介在物となるべき境界をいくつかの基本区間に分けた例を Fig. 2 に示す。角部 A, B, C, D 近傍では, 一般にモード I とモード II の2種類の变形が生じるので, 仮想境界上に分布させるべき体積力 F_n と F_t に対して対称形 (モード I) と逆対称形 (モード II) の2種類の分布形式を採用する。Fig. 2 の B_2 - B - A - A_2 と D_2 - D - C - C_2 の範囲に分布させる体積力を以下に示すように基本密度関数 ($r_A^{\lambda_1-1}$, $r_A^{\lambda_2-1}$: 角部に対して対称および逆対称変形を表現する分布密度) と重み関数 $W_{nM}^I \sim W_{tM}^II$ 等で近似する。以下では, r_A を角部 A からの距離として, 角部 A 近傍の離散化を例として説明する (角部 B 近傍の離散化方法も同様である)。

$$\begin{aligned} F_{nM}(r_A) &= F_{nM}^I(r_A) + F_{nM}^{II}(r_A) \\ &= W_{nM}^I(r_A) r_A^{\lambda_1-1} + W_{nM}^{II}(r_A) r_A^{\lambda_2-1} \\ F_{tM}(r_A) &= F_{tM}^I(r_A) + F_{tM}^{II}(r_A) \\ &= W_{tM}^I(r_A) r_A^{\lambda_1-1} + W_{tM}^{II}(r_A) r_A^{\lambda_2-1} \\ F_{nI}(r_A) &= F_{nI}^I(r_A) + F_{nI}^{II}(r_A) \\ &= W_{nI}^I(r_A) r_A^{\lambda_1-1} + W_{nI}^{II}(r_A) r_A^{\lambda_2-1} \\ F_{tI}(r_A) &= F_{tI}^I(r_A) + F_{tI}^{II}(r_A) \\ &= W_{tI}^I(r_A) r_A^{\lambda_1-1} + W_{tI}^{II}(r_A) r_A^{\lambda_2-1} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} W_{nM}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M a_n r_A^{n-1}, & W_{tM}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M b_n r_A^{n-1} \\ W_{nM}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M c_n r_A^{n-1}, & W_{tM}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M d_n r_A^{n-1} \\ W_{nI}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M e_n r_A^{n-1}, & W_{tI}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^M f_n r_A^{n-1} \\ W_{nI}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M g_n r_A^{n-1}, & W_{tI}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^M h_n r_A^{n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, λ_1 , λ_2 は, 幾何条件と材料条件より得られる特性方程式の根⁵⁾である。異材接角部 A 近傍の応力は

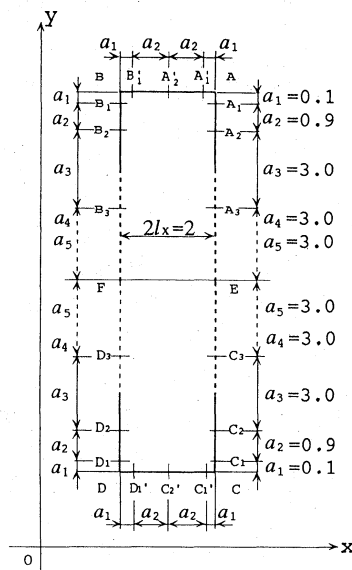


Fig. 2. Boundary division.

一般化された応力拡大係数 K_{I,λ_1} , K_{II,λ_1} によって $\sigma_{ij} = f_{ij}^I(\theta)K_{I,\lambda_1}/r^{1-\lambda_1} + f_{ij}^{II}(\theta)K_{II,\lambda_2}/r^{1-\lambda_2}$ のように表される。⁶⁾式 (3)に含まれる基本密度関数 $r_A^{\lambda_1-1}$, $r_A^{\lambda_2-1}$ は角部先端近傍について体積力密度の分布を精度良く表現するための関数で、それぞれ対称形 (モード I) と逆対称形 (モード II) の変形を表現する。また、角部 B, C, D に分布される体積力も同様の手法によって離散化を行う。Fig. 2 の B₂-B-A-A₂ と D₂-D-C-C₂ の範囲以外の境界条件の満たし方もほぼ同様であるが、この場合には体積力の表現に対称形と逆対称形の形式を使用しない点異なる。以上のような離散化手法により、境界上に適当に選んだ点での境界条件から式 (4) $a_n \sim h_n$ の係数を決定すれば、特異積分方程式 (1), (2) の解が得られる。そして、介在物の角部に関して定義された応力拡大係数 K_{I,λ_1} , K_{II,λ_1} は角部先端での重み関数の値 $W_n^I(0)$, $W_n^{II}(0)$, $W_t^I(0)$, $W_t^{II}(0)$ から求められる。

3 解析結果および考察

Fig. 3 に示す無限板中の2個の長方形介在物角部の干渉問題において、介在物2の位置を原点におき $l_y/l_x = 10$ と固定して、介在物1の位置 ($O_1 \sim O_5$) と寸法 $l_x/d_x (= 1/3 \sim 2/3)$ および介在物の剛性率 $G_I/G_M (10^{-5} \sim 10^2)$ を系統的に変えて角部の応力拡大係数, K_{I,λ_1} , K_{II,λ_2} の解析を行った。以下での議論では、平面ひずみ状態を仮定し式 (5) の無次元値を用いた。

$$F_{I,\lambda_1} = K_{I,\lambda_1}/\sigma^\infty \sqrt{\pi} l_x^{1-\lambda_1}, F_{II,\lambda_2} = K_{II,\lambda_2}/\sigma^\infty \sqrt{\pi} l_x^{1-\lambda_2} \quad (5)$$

Table I ~ III に、 F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} の収束の例を示す。これらの結果は Fig. 3 に示す2個の長方形介在物の y 方向引張問題の角部 D での結果である。計算に用いた境界の基本区間を Fig. 2 に示す。Table I ~ III の結果は、 W_t^I

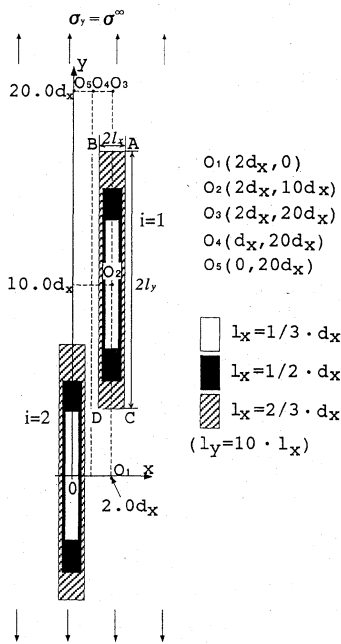


Fig. 3. Two rectangular inclusions.

(0), $W_n^I(0)$ から求めた値がその平均値 (表中 Average) と比較すると約 1%程度以内で一致し良好な収束性を示している。また、各基本区間の選点数 $M = 4, 5, 6$ 程度で t 方向と n 方向の重みから得られた F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} の値が有効数字 3 桁以上程度まで一致し収束しており、良好な結果が得られることが確認された。以下では、このように求めた角部 A, B, C, D の応力拡大係数の値を、長方形介在物の寸法, 剛性比, 位置を系統的に変化させて示す。

Table. IV ~ IX に y 方向引張の荷重下での介在物1の端部 A, B, C, D の応力拡大係数の値をまとめて示す。これらの表では1個の長方形介在物の値との比を括弧で示している。また、 $l_x/d_x = 1/3, 1/2, 2/3$ のそれぞれの問題で F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} の最大値を網掛けで示している。これらから以上のことがわかる。

(1) $G_I/G_M > 1$ の場合

① 応力拡大係数 F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} は、介在物1の中心が O_3, O_4, O_5 にあるとき、つまり介在物がほぼ縦方向に並んだ位置では、いずれの角部でも介在物が単独に存在する場合より大きく、干渉効果は危険側に生じる (Table IV ~ VI の $O_3 \sim O_5$)。

② 応力拡大係数 F_{I,λ_1} , F_{II,λ_2} は、介在物1の中心が O_1 つまり2個の介在物が横に並んだ位置では、いずれの角部でも介在物が単独に存在する場合より小さく、干渉

Table I. Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner D when the center of inclusion 1 is on O_3 in Fig. 3. ($l_x = 1/3, G_I/G_M = 10^2$, plane strain $\nu_I = \nu_M = 0.3$).

M	$F_{I,\lambda_1} (\lambda_1=0.7632349)$			$F_{II,\lambda_2} (\lambda_2=0.6218440)$		
	from $W_t^I(0)$	from $W_n^I(0)$	Average	from $W_t^{II}(0)$	from $W_n^{II}(0)$	Average
3	0.6963	0.6833	0.6898	1.0437	1.0436	1.0437
4	0.6951	0.6853	0.6902	1.0434	1.0434	1.0434
5	0.6945	0.6863	0.6904	1.0435	1.0434	1.0435
6	0.6839	0.6869	0.6904	1.0434	1.0434	1.0434

Table II. Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner D when the center of inclusion 1 is on O_4 in Fig. 3. ($l_x = 1/2, G_I/G_M = 10^1$, plane strain $\nu_I = \nu_M = 0.3$).

M	$F_{I,\lambda_1} (\lambda_1=0.7981112)$			$F_{II,\lambda_2} (\lambda_2=0.78565474)$		
	from $W_t^I(0)$	from $W_n^I(0)$	Average	from $W_t^{II}(0)$	from $W_n^{II}(0)$	Average
3	0.5261	0.5053	0.5157	0.9884	0.9881	0.9883
4	0.5243	0.5076	0.5159	0.9887	0.9886	0.9886
5	0.5231	0.5087	0.5159	0.9885	0.9884	0.9884

Table III. Convergence of F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} at the corner D when the center of inclusion 1 is on O_4 in Fig. 3. ($l_x = 2/3, G_I/G_M = 10^{-5}$, plane strain $\nu_I = \nu_M = 0.3$).

M	$F_{I,\lambda_1} (\lambda_1=0.54448375)$			$F_{II,\lambda_2} (\lambda_2=0.90852919)$		
	from $W_t^I(0)$	from $W_n^I(0)$	Average	from $W_t^{II}(0)$	from $W_n^{II}(0)$	Average
3	0.5165	0.5167	0.5166	1.8491	1.8488	1.8489
4	0.5167	0.5167	0.5167	1.8496	1.8496	1.8496
5	0.5163	0.5163	0.5163	1.8497	1.8497	1.8497

Table IV. F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for two rectangular inclusions at the corners under various geometrical conditions (Plane strain, $\nu_I = \nu_M = 0.3$, $l_y = 10 \cdot l_x$, $G_I/G_M = 10^2$).

G_I/G_M	I_x/d_x		$F_{I,\lambda_1} (F_{I,\lambda_1}/F_{I,\lambda_1 k=0})$					$F_{II,\lambda_2} (F_{II,\lambda_2}/F_{II,\lambda_2 k=0})$				
			O1	O2	O3	O4	O5	O1	O2	O3	O4	O5
10^2 $\lambda_1 = 0.7632349$ $\lambda_2 = 0.6218440$	-0	A~D	0.673 (1.000)	0.673 (1.000)	0.673 (1.000)	0.673 (1.000)	0.673 (1.000)	± 1.018 (1.000)	± 1.018 (1.000)	± 1.018 (1.000)	± 1.018 (1.000)	± 1.018 (1.000)
	1/3	A	0.593 (0.881)	0.715 (1.062)	0.684 (1.016)	0.684 (1.016)	0.683 (1.015)	0.903 (0.887)	1.075 (1.056)	1.035 (1.017)	1.036 (1.017)	1.035 (1.017)
		B	0.529 (0.786)	0.697 (1.036)	0.681 (1.012)	0.682 (1.013)	0.683 (1.015)	-0.754 (0.741)	-1.066 (1.047)	-1.033 (1.015)	-1.035 (1.016)	-1.035 (1.017)
		C	0.593 (0.881)	0.654 (0.972)	0.680 (1.010)	0.683 (1.015)	0.686 (1.019)	-0.903 (0.887)	-1.046 (1.027)	-1.039 (1.020)	-1.042 (1.023)	-1.043 (1.025)
		D	0.529 (0.786)	0.809 (1.202)	0.690 (1.025)	0.689 (1.024)	0.686 (1.019)	0.754 (0.741)	1.043 (1.112)	1.043 (1.025)	1.044 (1.026)	1.043 (1.025)
	1/2	A	0.593 (0.881)	0.758 (1.126)	0.698 (1.037)	0.698 (1.037)	0.697 (1.036)	0.912 (0.896)	1.140 (1.119)	1.056 (1.037)	1.057 (1.039)	1.057 (1.038)
		B	0.456 (0.678)	0.731 (1.086)	0.692 (1.028)	0.695 (1.033)	0.697 (1.036)	-0.654 (0.642)	-1.120 (1.100)	-1.053 (1.034)	-1.055 (1.037)	-1.057 (1.038)
		C	0.593 (0.881)	0.580 (0.862)	0.688 (1.022)	0.698 (1.037)	0.708 (1.052)	-0.912 (0.896)	-0.828 (0.813)	-1.071 (1.052)	-1.081 (1.062)	-1.088 (1.069)
		D	0.456 (0.678)	1.003 (1.506)	0.724 (1.076)	0.718 (1.076)	0.708 (1.052)	0.654 (0.642)	1.292 (1.269)	1.089 (1.069)	1.091 (1.072)	1.088 (1.069)
	2/3	A	0.593 (0.881)	0.796 (1.183)	0.720 (1.070)	0.720 (1.070)	0.719 (1.068)	0.929 (0.913)	1.186 (1.165)	1.088 (1.069)	1.091 (1.072)	1.091 (1.072)
		B	0.386 (0.574)	0.763 (1.134)	0.710 (1.055)	0.715 (1.062)	0.719 (1.068)	-0.571 (0.561)	-1.177 (1.156)	-1.082 (1.063)	-1.088 (1.068)	-1.091 (1.072)
		C	0.593 (0.881)	0.351 (0.522)	0.687 (1.021)	0.716 (1.064)	0.751 (1.116)	-0.929 (0.913)	-0.665 (0.653)	-1.122 (1.102)	-1.160 (1.140)	-1.187 (1.166)
D		0.386 (0.574)	0.867 (1.288)	0.806 (1.198)	0.783 (1.163)	0.751 (1.116)	0.571 (0.561)	0.726 (0.713)	1.187 (1.166)	1.197 (1.175)	1.187 (1.166)	

Table V. F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for two rectangular inclusions at the corners under various geometrical conditions (Plane strain, $\nu_I = \nu_M = 0.3$, $l_y = 10 \cdot l_x$, $G_I/G_M = 10^1$).

G_I/G_M	I_x/d_x		$F_{I,\lambda_1} (F_{I,\lambda_1}/F_{I,\lambda_1 k=0})$					$F_{II,\lambda_2} (F_{II,\lambda_2}/F_{II,\lambda_2 k=0})$				
			O1	O2	O3	O4	O5	O1	O2	O3	O4	O5
10^1 $\lambda_1 = 0.7981112$ $\lambda_2 = 0.7856547$	-0	A~D	0.495 (1.000)	0.495 (1.000)	0.495 (1.000)	0.495 (1.000)	0.495 (1.000)	± 0.944 (1.000)	± 0.944 (1.000)	± 0.944 (1.000)	± 0.944 (1.000)	± 0.944 (1.000)
	1/3	A	0.466 (0.941)	0.513 (1.036)	0.500 (1.010)	0.499 (1.008)	0.499 (1.008)	0.856 (0.907)	0.974 (1.032)	0.954 (1.010)	0.954 (1.010)	0.954 (1.010)
		B	0.416 (0.840)	0.503 (1.016)	0.498 (1.006)	0.498 (1.006)	0.499 (1.008)	-0.810 (0.858)	-0.971 (1.009)	-0.953 (1.028)	-0.953 (1.010)	-0.954 (1.010)
		C	0.466 (0.941)	0.479 (0.968)	0.497 (1.004)	0.499 (1.008)	0.500 (1.010)	-0.856 (0.907)	-0.961 (1.018)	-0.957 (1.013)	-0.958 (1.015)	-0.959 (1.016)
		D	0.416 (0.840)	0.566 (1.143)	0.503 (1.016)	0.502 (1.014)	0.500 (1.010)	0.810 (0.858)	1.000 (1.007)	0.959 (1.016)	0.960 (1.017)	0.959 (1.016)
	1/2	A	0.470 (0.949)	0.531 (1.073)	0.506 (1.022)	0.503 (1.016)	0.504 (1.018)	0.856 (0.906)	1.004 (1.060)	0.964 (1.022)	0.965 (1.022)	0.965 (1.022)
		B	0.372 (0.752)	0.516 (1.042)	0.502 (1.014)	0.503 (1.016)	0.504 (1.018)	-0.760 (0.805)	-0.999 (1.058)	-0.963 (1.020)	-0.964 (1.022)	-0.965 (1.022)
		C	0.470 (0.949)	0.440 (0.889)	0.500 (1.010)	0.505 (1.020)	0.511 (1.032)	-0.856 (0.906)	-0.854 (0.905)	-0.977 (1.035)	-0.983 (1.042)	-0.987 (1.046)
		D	0.372 (0.752)	0.652 (1.317)	0.520 (1.051)	0.516 (1.042)	0.511 (1.032)	0.760 (0.805)	0.986 (1.033)	0.988 (1.045)	0.988 (1.047)	0.987 (1.046)
	2/3	A	0.473 (0.956)	0.544 (1.099)	0.514 (1.038)	0.514 (1.038)	0.513 (1.036)	0.868 (0.919)	1.028 (1.089)	0.981 (1.038)	0.981 (1.040)	0.982 (1.040)
		B	0.325 (0.657)	0.527 (1.065)	0.509 (1.009)	0.511 (1.032)	0.513 (1.036)	-0.711 (0.753)	-1.020 (1.081)	-0.978 (1.036)	-0.981 (1.039)	-0.982 (1.040)
		C	0.473 (0.956)	0.318 (0.642)	0.495 (1.000)	0.511 (1.032)	0.529 (1.069)	-0.868 (0.919)	-0.776 (0.822)	-1.009 (1.069)	-1.033 (1.094)	-1.049 (1.111)
D		0.325 (0.657)	0.597 (1.194)	0.561 (1.133)	0.548 (1.107)	0.529 (1.069)	0.711 (0.753)	1.046 (1.108)	1.054 (1.116)	1.049 (1.115)	1.049 (1.111)	

Table VI. F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for two rectangular inclusions at the corners under various geometrical conditions (Plane strain, $\nu_I = \nu_M = 0.3$, $l_y = 10 \cdot l_x$, $G_I/G_M = 2$).

G_I/G_M	I_x/d_x		$F_{I,\lambda_1} (F_{I,\lambda_1}/F_{I,\lambda_1 k=0})$					$F_{II,\lambda_2} (F_{II,\lambda_2}/F_{II,\lambda_2 k=0})$				
			O1	O2	O3	O4	O5	O1	O2	O3	O4	O5
2 $\lambda_1 = 0.9109102$ $\lambda_2 = 0.9810170$	-0	A~D	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	± 3.262 (1.000)	± 3.262 (1.000)	± 3.262 (1.000)	± 3.262 (1.000)	± 3.262 (1.000)
	1/3	A	0.255 (0.988)	0.259 (1.004)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	3.210 (0.984)	3.301 (1.012)	3.288 (1.008)	3.288 (1.008)	3.288 (1.008)
		B	0.245 (0.950)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	-3.188 (0.977)	-3.301 (1.012)	-3.288 (1.008)	-3.288 (1.008)	-3.288 (1.008)
		C	0.255 (0.988)	0.252 (0.977)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	-3.210 (0.984)	-3.293 (1.010)	-3.292 (1.009)	-3.294 (1.010)	-3.295 (1.010)
		D	0.245 (0.950)	0.269 (1.042)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	0.257 (0.996)	3.188 (0.977)	3.330 (1.021)	3.294 (1.010)	3.295 (1.010)	3.295 (1.010)
	1/2	A	0.258 (1.000)	0.261 (1.012)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	3.205 (0.983)	3.319 (1.017)	3.295 (1.010)	3.296 (1.010)	3.296 (1.010)
		B	0.237 (0.919)	0.258 (1.000)	0.257 (0.996)	0.257 (0.996)	0.258 (1.000)	-3.166 (0.971)	-3.321 (1.018)	-3.295 (1.010)	-3.296 (1.010)	-3.296 (1.010)
		C	0.258 (1.000)	0.246 (0.953)	0.256 (0.992)	0.257 (0.996)	0.258 (1.000)	-3.205 (0.983)	-3.200 (0.981)	-3.312 (1.015)	-3.318 (1.017)	-3.322 (1.018)
		D	0.237 (0.919)	0.274 (1.052)	0.260 (1.008)	0.259 (1.004)	0.259 (1.000)	3.166 (0.971)	3.319 (0.996)	3.249 (1.017)	3.322 (1.015)	3.322 (1.018)
	2/3	A	0.260 (1.008)	0.263 (1.019)	0.259 (1.004)	0.259 (1.004)	0.258 (1.000)	3.208 (0.983)	3.337 (1.023)	3.305 (1.013)	3.306 (1.013)	3.306 (1.013)
		B	0.227 (0.880)	0.259 (1.004)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	0.258 (1.000)	-3.145 (0.964)	-3.340 (1.024)	-3.305 (1.013)	-3.306 (1.013)	-3.306 (1.013)
		C	0.260 (1.008)	0.225 (0.872)	0.254 (0.984)	0.257 (0.996)	0.260 (1.000)	-3.208 (0.983)	-3.093 (0.948)	-3.342 (1.024)	-3.367 (1.032)	-3.384 (1.037)
D		0.227 (0.880)	0.261 (1.008)	0.256 (1.005)	0.264 (1.023)	0.260 (1.008)	3.145 (0.964)	2.973 (0.911)	3.377 (1.035)	3.388 (1.039)	3.384 (1.037)	

Table VII. F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for two rectangular inclusions at the corners under various geometrical conditions (Plane strain, $\nu_I = \nu_M = 0.3$, $l_y = 10 \cdot l_x$, $G_I/G_M = 10^{-1}$).

G_I/G_M	I_x/d_x		$F_{I,\lambda_1} (F_{I,\lambda_1}/F_{I,\lambda_1 k \rightarrow 0})$					$F_{II,\lambda_2} (F_{II,\lambda_2}/F_{II,\lambda_2 k \rightarrow 0})$				
			O1	O2	O3	O4	O5	O1	O2	O3	O4	O5
10^{-1} $\lambda_1 = 0.6601418$ $\lambda_2 = 0.9355639$	→0	A~D	0.351 (1.00)	0.351 (1.00)	0.351 (1.00)	0.351 (1.00)	0.351 (1.00)	±2.135 (1.00)	±2.135 (1.00)	±2.135 (1.00)	±2.135 (1.00)	±2.135 (1.00)
		A	0.373 (1.072)	0.356 (1.014)	0.351 (1.001)	0.351 (1.000)	0.350 (0.999)	2.189 (1.025)	2.129 (0.997)	2.131 (0.998)	2.130 (0.997)	2.129 (0.997)
	1/3	B	0.347 (0.990)	0.342 (0.975)	0.349 (0.996)	0.350 (0.997)	0.350 (0.999)	2.165 (1.014)	2.111 (0.989)	2.128 (0.997)	2.129 (0.997)	2.129 (0.997)
		C	0.373 (1.072)	0.318 (0.906)	0.347 (0.990)	0.348 (0.993)	0.349 (0.996)	2.189 (1.025)	2.122 (0.994)	2.123 (0.994)	2.122 (0.994)	2.122 (0.994)
		D	0.347 (0.990)	0.370 (1.054)	0.351 (1.002)	0.350 (0.999)	0.349 (0.996)	2.165 (1.014)	2.118 (0.992)	2.124 (0.994)	2.123 (0.994)	2.122 (0.994)
		A	0.398 (1.134)	0.363 (1.036)	0.352 (1.003)	0.351 (1.000)	0.350 (0.997)	2.216 (1.038)	2.131 (1.012)	2.126 (0.996)	2.124 (0.995)	2.123 (0.994)
	1/2	B	0.323 (0.919)	0.330 (0.940)	0.348 (0.991)	0.349 (0.994)	0.350 (0.997)	2.147 (1.006)	2.084 (0.976)	2.121 (0.993)	2.122 (0.994)	2.123 (0.994)
		C	0.398 (1.134)	0.347 (0.988)	0.340 (0.968)	0.342 (0.976)	0.346 (0.986)	2.216 (1.038)	2.179 (1.020)	2.100 (0.984)	2.095 (0.981)	2.093 (0.980)
		D	0.323 (0.919)	0.339 (1.036)	0.353 (1.006)	0.350 (0.996)	0.346 (0.986)	2.147 (1.006)	2.356 (1.108)	2.102 (0.984)	2.096 (0.981)	2.093 (0.980)
		A	0.416 (1.185)	0.375 (1.070)	0.353 (1.007)	0.352 (1.002)	0.350 (0.996)	2.238 (1.048)	2.133 (0.999)	2.123 (0.994)	2.119 (0.994)	2.116 (0.991)
	2/3	B	0.290 (0.827)	0.314 (0.895)	0.345 (0.984)	0.347 (0.990)	0.350 (0.996)	2.117 (0.992)	2.041 (0.956)	2.112 (0.982)	2.114 (0.990)	2.111 (0.991)
		C	0.416 (1.185)	0.376 (1.071)	0.319 (0.908)	0.325 (0.926)	0.335 (0.956)	2.238 (1.048)	2.259 (1.058)	2.067 (0.967)	2.039 (0.955)	2.022 (0.947)
D		0.290 (0.827)	0.398 (1.133)	0.359 (1.022)	0.348 (0.991)	0.335 (0.956)	2.117 (0.992)	2.541 (1.237)	2.048 (0.959)	2.025 (0.948)	2.022 (0.947)	
A		0.585 (1.713)	0.522 (1.066)	0.494 (1.009)	0.491 (1.004)	0.488 (0.999)	2.066 (1.044)	2.008 (1.014)	1.971 (0.996)	1.968 (0.994)	1.965 (0.993)	

Table VIII. F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for two rectangular inclusions at the corners under various geometrical conditions (Plane strain, $\nu_I = \nu_M = 0.3$, $l_y = 10 \cdot l_x$, $G_I/G_M = 10^{-2}$).

G_I/G_M	I_x/d_x		$F_{I,\lambda_1} (F_{I,\lambda_1}/F_{I,\lambda_1 k \rightarrow 0})$					$F_{II,\lambda_2} (F_{II,\lambda_2}/F_{II,\lambda_2 k \rightarrow 0})$				
			O1	O2	O3	O4	O5	O1	O2	O3	O4	O5
10^{-2} $\lambda_1 = 0.5583162$ $\lambda_2 = 0.9116800$	→0	A~D	0.489 (1.00)	0.489 (1.00)	0.489 (1.00)	0.489 (1.00)	0.489 (1.00)	±1.979 (1.00)	±1.979 (1.00)	±1.979 (1.00)	±1.979 (1.00)	±1.979 (1.00)
		A	0.550 (1.124)	0.504 (1.029)	0.491 (1.003)	0.490 (1.001)	0.489 (0.999)	2.030 (1.026)	1.981 (1.001)	1.975 (0.998)	1.973 (0.997)	1.972 (0.997)
	1/3	B	0.490 (1.002)	0.467 (0.955)	0.486 (0.994)	0.487 (0.996)	0.489 (0.999)	2.010 (1.007)	1.948 (0.984)	1.971 (0.996)	1.971 (0.996)	1.972 (0.997)
		C	0.550 (1.124)	0.424 (0.866)	0.483 (0.987)	0.485 (0.991)	0.487 (0.996)	2.030 (1.026)	1.964 (0.993)	1.964 (0.993)	1.964 (0.992)	1.964 (0.993)
		D	0.490 (1.002)	0.528 (1.080)	0.491 (1.004)	0.489 (1.000)	0.487 (0.996)	2.010 (1.007)	1.979 (1.000)	1.968 (0.994)	1.966 (0.993)	1.964 (0.993)
		A	0.585 (1.713)	0.522 (1.066)	0.494 (1.009)	0.491 (1.004)	0.488 (0.999)	2.066 (1.044)	2.008 (1.014)	1.971 (0.996)	1.968 (0.994)	1.965 (0.993)
	1/2	B	0.444 (0.907)	0.424 (0.866)	0.483 (0.987)	0.486 (0.993)	0.488 (0.999)	1.990 (0.990)	1.912 (0.966)	1.961 (0.991)	1.963 (0.992)	1.965 (0.993)
		C	0.585 (1.713)	0.473 (0.967)	0.469 (0.958)	0.475 (0.971)	0.482 (0.985)	2.066 (1.044)	2.044 (1.033)	1.939 (0.980)	1.934 (0.977)	1.933 (0.977)
		D	0.444 (0.907)	0.549 (1.123)	0.496 (1.014)	0.489 (1.000)	0.482 (0.985)	1.990 (0.990)	2.349 (1.186)	1.945 (0.983)	1.937 (0.979)	1.933 (0.977)
		A	0.617 (1.260)	0.560 (1.146)	0.499 (1.020)	0.494 (1.011)	0.489 (0.999)	2.096 (1.059)	2.028 (1.025)	1.970 (0.995)	1.963 (0.992)	1.957 (0.989)
	2/3	B	0.382 (0.782)	0.381 (0.779)	0.477 (0.974)	0.483 (0.986)	0.489 (0.999)	1.942 (0.981)	1.845 (0.932)	1.949 (0.985)	1.952 (0.987)	1.957 (0.989)
		C	0.617 (1.260)	0.567 (1.160)	0.430 (0.879)	0.445 (0.909)	0.466 (0.953)	2.096 (1.059)	2.069 (1.045)	1.902 (0.961)	1.871 (0.945)	1.854 (0.937)
D		0.382 (0.782)	0.570 (1.166)	0.511 (1.044)	0.491 (1.003)	0.466 (0.953)	1.942 (0.981)	2.660 (1.344)	1.893 (0.956)	1.862 (0.941)	1.854 (0.937)	
A		0.656 (1.278)	0.593 (1.156)	0.525 (1.023)	0.520 (1.013)	0.514 (1.000)	2.086 (1.060)	2.031 (1.032)	1.960 (0.996)	1.953 (0.992)	1.946 (0.989)	

Table IX. F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for two rectangular inclusions at the corners under various geometrical conditions (Plane strain, $\nu_I = \nu_M = 0.3$, $l_y = 10 \cdot l_x$, $G_I/G_M = 10^{-5}$).

G_I/G_M	I_x/d_x		$F_{I,\lambda_1} (F_{I,\lambda_1}/F_{I,\lambda_1 k \rightarrow 0})$					$F_{II,\lambda_2} (F_{II,\lambda_2}/F_{II,\lambda_2 k \rightarrow 0})$				
			O1	O2	O3	O4	O5	O1	O2	O3	O4	O5
10^{-5} $\lambda_1 = 0.5444838$ $\lambda_2 = 0.9085292$	→0	A~D	0.513 (1.00)	0.513 (1.00)	0.513 (1.00)	0.513 (1.00)	0.513 (1.00)	±1.968 (1.00)	±1.968 (1.00)	±1.968 (1.00)	±1.968 (1.00)	±1.968 (1.00)
		A	0.583 (1.135)	0.530 (1.032)	0.515 (1.004)	0.514 (1.002)	0.513 (0.999)	2.017 (1.025)	1.972 (1.002)	1.964 (0.998)	1.962 (0.997)	1.961 (0.996)
	1/3	B	0.517 (1.008)	0.488 (0.950)	0.510 (0.994)	0.512 (0.996)	0.513 (0.999)	1.999 (1.015)	1.936 (0.983)	1.960 (0.996)	1.960 (0.996)	1.961 (0.996)
		C	0.583 (1.135)	0.440 (0.857)	0.506 (0.986)	0.509 (0.991)	0.511 (0.996)	2.017 (1.025)	1.954 (0.993)	1.953 (0.992)	1.953 (0.992)	1.953 (0.992)
		D	0.517 (1.008)	0.557 (1.084)	0.516 (1.005)	0.514 (1.001)	0.511 (0.996)	1.999 (1.015)	1.973 (1.002)	1.957 (0.994)	1.955 (0.993)	1.953 (0.992)
		A	0.621 (1.211)	0.547 (1.066)	0.519 (1.010)	0.516 (1.005)	0.513 (0.999)	2.054 (1.044)	2.008 (1.020)	1.960 (0.996)	1.957 (0.994)	1.954 (0.993)
	1/2	B	0.466 (0.908)	0.431 (0.840)	0.506 (0.986)	0.510 (0.992)	0.513 (0.999)	1.976 (1.004)	1.902 (0.966)	1.950 (0.991)	1.951 (0.991)	1.954 (0.993)
		C	0.621 (1.211)	0.491 (0.956)	0.491 (0.956)	0.498 (0.970)	0.506 (0.986)	2.054 (1.044)	2.047 (1.040)	1.927 (0.979)	1.922 (0.977)	1.921 (0.976)
		D	0.466 (0.908)	0.563 (1.096)	0.521 (1.015)	0.514 (1.001)	0.506 (0.986)	1.976 (1.004)	2.384 (1.211)	1.934 (0.983)	1.926 (0.978)	1.921 (0.976)
		A	0.656 (1.278)	0.593 (1.156)	0.525 (1.023)	0.520 (1.013)	0.514 (1.000)	2.086 (1.060)	2.031 (1.032)	1.960 (0.996)	1.953 (0.992)	1.946 (0.989)
	2/3	B	0.398 (0.774)	0.382 (0.745)	0.499 (0.972)	0.506 (0.986)	0.514 (1.000)	1.930 (0.981)	1.829 (0.929)	1.937 (0.984)	1.940 (0.986)	1.946 (0.989)
		C	0.656 (1.278)	0.609 (1.187)	0.448 (0.873)	0.465 (0.906)	0.490 (0.954)	2.086 (1.060)	2.048 (1.040)	1.890 (0.960)	1.858 (0.944)	1.841 (0.936)
D		0.398 (0.774)	0.630 (1.228)	0.539 (1.049)	0.516 (1.006)	0.490 (0.954)	1.930 (0.981)	2.772 (1.353)	1.882 (0.956)	1.850 (0.940)	1.841 (0.936)	
A		0.656 (1.278)	0.593 (1.156)	0.525 (1.023)	0.520 (1.013)	0.514 (1.000)	2.086 (1.060)	2.031 (1.032)	1.960 (0.996)	1.953 (0.992)	1.946 (0.989)	

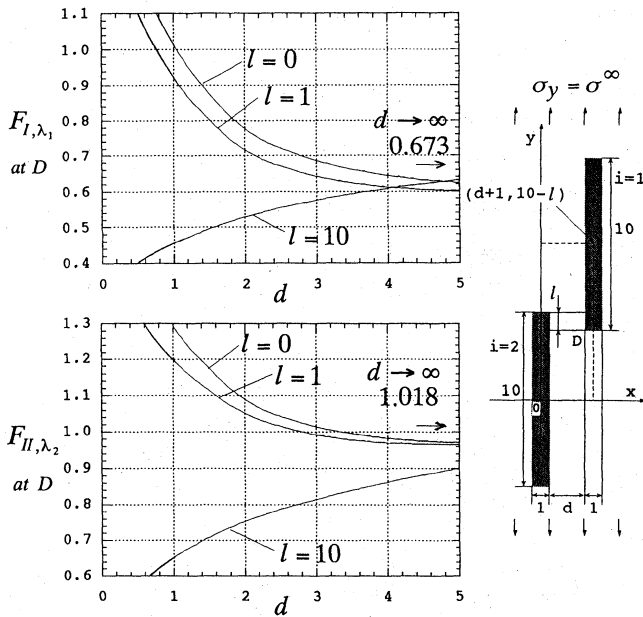


Fig. 4. $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ at the corner D when $G_I/G_M = 10^2$.

効果は安全側に生じる (Table IV~VI の O_1).

③ 応力拡大係数 $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ は、介在物 1 の中心が O_2 つまり 2 個の介在物が斜めに並んだ位置では、角部 C では干渉効果は安全側に生じるが、他の角部 A, B, D では危険側に生じる (Table IV~VI の O_2). 解析した範囲で、干渉効果が大きく表われるのは多くの場合介在物が斜めに配置する場合に角部 D においてである. 解析した範囲内、干渉効果の最大値は介在物が単純に存在する場合に比べて + 51% である (Table IV の $l_x/d_x = 1/2$ の O_2).

(2) $G_I/G_M < 1$ の場合

④ 応力拡大係数 $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ は、介在物 1 の中心が O_3, O_4, O_5 にあるとき、つまり介在物がほぼ縦方向に並んだ位置では、角部では介在物が単独に存在する場合より小さくなる傾向にある (Table VII~IX の $O_3 \sim O_5$).

⑤ 介在物 1 の中心が $O_1 \sim O_5$ にある場合を比べると、応力拡大係数 $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ は、介在物 1 の中心が O_1 ,

O_2 つまり 2 個の介在物が横や斜めに並んだ位置で、ある角部において最大値をとる (Table VII~IX の O_1, O_2). 解析した範囲内、干渉効果の最大値は介在物が単純に存在する場合に比べて + 35% である (Table IX の $l_x/d_x = 2/3$ の O_2).

Table IV~VI より、 $G_I/G_M > 1$ では、干渉効果が大きく表われるのは多くの場合、介在物が斜めに配置する場合であることが明らかとなった. そこで、このような場合に繊維を近づけると、干渉効果がどのように大きくなるかを具体的に考察した. 介在物 1 の中心位置を $(x, y) = (d+1, 10-l)$ 、介在物 2 の中心位置を $(0, 0)$ として d を変化させた場合の角部 D における応力拡大係数 $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ を Fig. 4 に示す. Fig. 4 のように $d \rightarrow 0$ で $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ の値は急激に増加する.

4 結 言

本研究では 2 個の長方形介在物の x, y 方向の相対位置が変化する問題の角部の一般化応力拡大係数⁶⁾を介在物の剛性比を変えて解析し、結果を図表に示した. $G_I/G_M > 1$ では、応力拡大係数 $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ は、介在物が斜めに配置する場合に、干渉効果が大きく表われることがわかった. このような場合に繊維を近づけると $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ は、急激に増加することが示された.

参 考 文 献

- 1) 陳 玳珩, 西谷弘信, 日本機械学会論文集, A-58, 1834 (1992).
- 2) 陳 玳珩, 西谷弘信, 日本機械学会論文集, A-58, 2153 (1992).
- 3) 野田尚昭, 王 清, 上村仁誉, 川島裕二, 日本機械学会論文集, A-63, 1663 (1997).
- 4) 野田尚昭, 王 清, 諸富貴光, 日本機械学会論文集, A-63, 1701 (1997).
- 5) D. B. Bogy and K. C. Wang, International Journal of Solids and Structures, 7, 993 (1971).
- 6) 陳 玳珩, 西谷弘信, 日本機械学会論文集, A-57, 366 (1991).