

任意個の回転だ円体状介在物をもつ無限体の
非軸対称一軸引張りにおける干渉効果*

野田尚昭*¹, 林田一志*², 泊賢治*³

Interaction of a Row of Ellipsoidal Inclusions
in an Infinite Body under Asymmetric Uniaxial Tension

Nao-Aki NODA, Hitoshi HAYASHIDA and Kenji TOMARI

This paper deals with an interaction problem of a row of ellipsoidal inclusions under asymmetric uniaxial tension using singular integral equations of the body force method. The problem is solved on the superposition of two auxiliary loads; (i) biaxial tension and (ii) plane state of pure shear. These problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where unknown functions are densities of body forces distributed in the r, θ, z directions in infinite bodies having the same elastic constants as those of the matrix and inclusions. In order to satisfy the boundary conditions along the ellipsoidal boundaries, the unknown functions are approximated by a linear combination of fundamental density functions and polynomials. The present method is found to yield rapidly converging numerical results for stress distributions along the boundaries. For any fixed shape and spacing of inclusions, the maximum stress is shown to be linear with the reciprocal of the squared number of inclusions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Stress Concentration Factor, Ellipsoidal Inclusion

1. 緒 言

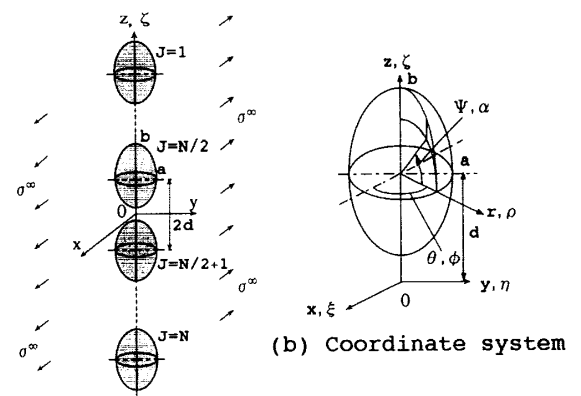
内部欠陥をもつ部材の強度評価に関連して複数個の回転だ円体状介在物を有する無限体の引張問題は重要な応力集中問題の一つである。例えば解析例として、無限体中に介在物が1個⁽¹⁾⁽²⁾存在する場合や、空か1個⁽³⁾, 2個⁽⁴⁾⁽⁵⁾, 3個⁽⁶⁾, 1列⁽⁷⁾で存在する場合が解析されている。構造物中に介在物などの欠陥が複数個存在する場合には、介在物が単独に存在する場合と異なる値の応力集中を生じる。また、最大応力の発生位置と大きさは介在物の大きさと位置および母材と介在物の弾性比により微妙に変化する。しかし、無限体中に介在物が複数個存在する場合の解析は介在物の中心を結ぶ軸に対して応力状態が軸対称な場合での解析⁽⁸⁾が行われているだけであり、複数個の介在物を有する無限体の非軸対称一軸引張り問題の解析例は著者がさきに示した2個の問題⁽⁹⁾以外見当たらない。

そこで本研究では、任意個の回転だ円体状介在物を有する無限体の2つの問題(二軸一様引張り問題と純

粋せん断問題)を体積力法の特異積分方程式を用いて厳密に解析し、これらを重ね合わせるにより、非軸対称問題(一軸引張り問題)へと発展させた。そして、形状比、距離及び剛性比を系統的に変化させ、応力集中の干渉効果を調べた。

2. 解析方法

図1(a)に示すような、主軸長 $2a, 2b$ の N 個の等大回転だ円体状介在物を有する無限体が遠方で一様な x 方向の一軸引張応力 σ^∞ を受けている干渉問題を体積力法を



(a) Uniaxial tension of a row of ellipsoidal inclusions

Fig.1 Problem and coordinate system

* 原稿受付 1998年10月21日.

*¹ 正員,九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).

*² 学生員,九州工業大学大学院.

*³ 准員,三菱化学(株)(☎100-0005 東京都千代田区丸ノ内2-5-2).

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

用いて解析する。本問題は、前報と同様に二つの問題 [二軸一様引張 ($\sigma_x^\infty = \sigma/2, \sigma_y^\infty = \sigma/2$), 純粹せん断 ($\sigma_x^\infty = \sigma/2, \sigma_y^\infty = -\sigma/2$)] の重ね合わせにより構成される。いま直角座標系を (x, y, z) とし、円柱座標系を (r, θ, z) として図 1(b) のように定義する [着力点に関する座標の記号は、 (ξ, η, ζ) と (ρ, ϕ, ζ) とする]。軸対称問題については、前報の方法⁹⁾ により解析可能である。以下では、純粹せん断で介在物の個数が N 個 (N : 偶数) の場合の解法を中心に説明する。介在物の個数が奇数の場合もほぼ同様の解法で解析可能であるが、最内側の介在物については、問題の対称性より $0 \leq \psi \leq \pi/2$ で境界条件を満足すればよいという点が異なる。

この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、介在物のない無限体中の二つの円周上 [$\rho = a \cos \alpha_k, \zeta = \pm \{d + 2d(k-1) + b \sin \alpha_k\}, k = 1 \sim N/2$] に大きさが $\cos 2\varphi$ または $\sin 2\varphi$ で変化する r, θ, z 方向の集中力の輪が作用するときの任意の点 [$r = a \cos \psi_k, z = d + 2d(i-1) + b \sin \psi_k, i = 1 \sim N/2$] の応力場の解 ($K_{nn}^{F_r}, K_{nn}^{F_\theta}, \dots, K_{nn}^{F_z}$) と変位場の解 ($K_{ur}^{F_r}, K_{ur}^{F_\theta}, \dots, K_{uz}^{F_r}, K_{uz}^{F_z}$) を用いて解くことができる⁽¹¹⁾。このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_i, ν_i) と同じ弾性定数をもつ無限体 (これらを無限体 M, 無限体 I とする) 中の仮想境界上に分布させた面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用させた体積力密度 $\rho_{rM}^*(\alpha_k), \rho_{\theta M}^*(\alpha_k), \rho_{z M}^*(\alpha_k), \rho_{rI}^*(\alpha_k), \rho_{\theta I}^*(\alpha_k), \rho_{z I}^*(\alpha_k)$ を未知関数とする特異積分方程式 (1)~(6) で表現される。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \{ \rho_{rM}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} + \rho_{z M}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} \} \\
 & -\frac{1}{2} \{ \rho_{rI}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} + \rho_{z I}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} \} \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nmM}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(\alpha_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nmM}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nmM}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z M}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(\alpha_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z I}^*(\alpha_k) ds \\
 & = -\sigma_r^\infty \cos^2 \psi_{i0} \cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \{ \rho_{\theta M}^*(\psi_i) + \rho_{\theta I}^*(\psi_i) \} \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta M}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(\alpha_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta M}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta M}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z M}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta I}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(\alpha_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta I}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{n\theta I}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z I}^*(\alpha_k) ds \\
 & = \tau_{r\theta}^\infty \sin \psi_{i0} \cos \psi_{i0} \sin 2\theta \quad \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \{ -\rho_{rM}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} + \rho_{z M}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} \} \\
 & -\frac{1}{2} \{ -\rho_{rI}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} + \rho_{z I}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} \} \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nmM}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(\alpha_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nmM}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nmM}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z M}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(\alpha_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z I}^*(\alpha_k) ds \\
 & = \sigma_r^\infty \sin \psi_{i0} \cos \psi_{i0} \cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(\alpha_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z M}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(\alpha_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z I}^*(\alpha_k) ds \\
 & = -(\sigma_r^\infty - \nu_M \sigma_\theta^\infty) r / E_M \cdot \cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta M}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(\alpha_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta M}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta M}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z M}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta I}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(\alpha_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta I}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{u\theta I}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z I}^*(\alpha_k) ds \\
 & = -\tau_{r\theta}^\infty 2(1 + \nu_M) r / E_M \cdot \sin 2\theta \quad \dots \dots \dots (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(\alpha_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z M}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{F_r}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(\alpha_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{F_\theta}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{F_z}(\alpha_k, \psi_i) \rho_{z I}^*(\alpha_k) ds \\
 & = -\nu_M (\sigma_r^\infty + \sigma_\theta^\infty) z / E_M \cdot \cos 2\theta \quad \dots \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

$i = 1 \sim N/2$
 ここで、 $-d\rho = a \sin \alpha_k d\alpha_k, d\zeta = b \cos \alpha_k d\alpha_k, ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_k + b^2 \cos^2 \alpha_k} d\alpha_k$ である。また、 ψ_{i0} は点 (r, z) における介在物の外向き法線と r 軸とのなす角であり $\sigma_r^\infty \cos 2\theta$ は $r \rightarrow \infty$ での純粹せん断応力場である。 $\sum_{i=1}^{N/2}$ は N 個の回転だ円体状介在物となるべき仮想境界について体積力密度を積分することを意味する。特異積分方程式の未知関数である $\rho_{rM}^*(\alpha_k), \rho_{\theta M}^*(\alpha_k), \rho_{z M}^*(\alpha_k)$ は次式で定義される ($\rho_{rI}^*(\alpha_k), \rho_{\theta I}^*(\alpha_k), \rho_{z I}^*(\alpha_k)$ も同様)。

$$\begin{aligned}
 \rho_{rM}^*(\alpha_k) \cos 2\varphi &= \frac{dF_r}{\rho d\phi ds}, & \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) \sin 2\varphi &= \frac{dF_\theta}{\rho ds d\phi}, \\
 \rho_{z M}^*(\alpha_k) \cos 2\varphi &= \frac{-dF_z}{\rho d\phi ds} & & \dots \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

ここで、 dF_r, dF_θ, dF_z は、面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用する体積力の合力の r, θ, z 方向の成分である。式

(1)~(6)は仮想境界上における境界条件 $\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0$, $\tau_{n\theta M} - \tau_{n\theta I} = 0$, $\tau_{nM} - \tau_{nI} = 0$, $u_{rM} - u_{rI} = 0$, $u_{\theta M} - u_{\theta I} = 0$, $u_{z M} - u_{z I} = 0$ に相当している。式(1)~(3)はコーシー形、式(4)~(6)は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため式(1)~(3)は積分のコーシーの主値をとるものとする。

結局問題は式(1)~(6)の未知関数 $\rho_{rM}^*(\alpha_k) \sim \rho_{zI}^*(\alpha_k)$ を求めることに帰着されるが、それらを直接求めるかわりに以下のような補助関数 ($f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$) を求める。以下で $f(\alpha_k)$ は $\rho_{rM}^*(\alpha_k) \sim \rho_{zI}^*(\alpha_k)$ の各関数を意味している。そして、 $f(\alpha_k)$ から得られる補助関数 $f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ を式(8)で定義する。

$$f_1(\alpha_k) = \{f(\alpha_k) + f(-\alpha_k)\}/2, f_2(\alpha_k) = \{f(\alpha_k) - f(-\alpha_k)\}/2 \quad \dots(8)$$

ここで、 $f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ は以下の関係を満たす。

$$f_1(\alpha_k) = f_1(-\alpha_k), f_2(\alpha_k) = -f_2(-\alpha_k) \quad \dots\dots\dots(9)$$

すなわち、未知関数 $f(\alpha_k)$ を $-\pi/2 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で求めることは式(9)を満たす補助関数 $f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ を $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で求めることに等しい。つまり、 $0 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で $f_1(\alpha_k), f_2(\alpha_k)$ が与えられるとき、次式に示すように $f(\alpha_k)$ が $-\pi/2 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ で与えられる。

$$\begin{aligned} f(\alpha_k) &= f_1(\alpha_k) + f_2(\alpha_k) \\ f(-\alpha_k) &= f_1(-\alpha_k) + f_2(-\alpha_k) = f_1(\alpha_k) - f_2(\alpha_k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(10)$$

いま、基本密度関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} w_{r3}(\alpha_k) &= w_{\theta3}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k), w_{r4}(\alpha_k) = w_{\theta4}(\alpha_k) = n_r(\alpha_k) \sin \alpha_k, \\ w_{z1}(\alpha_k) &= n_z(\alpha_k) / \sin \alpha_k, w_{z2}(\alpha_k) = n_z(\alpha_k) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$n_r(\alpha_k) = \frac{b \cos \alpha_k}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_k + b^2 \cos^2 \alpha_k}}, n_z(\alpha_k) = \frac{a \sin \alpha_k}{\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha_k + b^2 \cos^2 \alpha_k}} \quad \dots\dots\dots(12)$$

ここで、 $w_{r3}(\alpha_k), w_{\theta3}(\alpha_k), w_{z1}(\alpha_k)$ は式(9)の第1式を満足し、 $w_{r4}(\alpha_k), w_{\theta4}(\alpha_k), w_{z2}(\alpha_k)$ は式(9)の第2式を満足する連続関数である。また、 $w_{r3}(\alpha_k), w_{\theta3}(\alpha_k), w_{z2}(\alpha_k)$ は純粋せん断を受けている回転だ円体状介在物が単独に存在する場合を厳密に表現する体積力の基本密度関数である。

そして、 $\rho_{rM}^*(\alpha_k) \sim \rho_{zI}^*(\alpha_k)$ を以下のように基本密度関数と重み関数 $\rho_{r3M}(\alpha_k)$ 等で表現する。

$$\begin{aligned} \rho_{rM}^*(\alpha_k) &= \rho_{r3M}(\alpha_k) w_{r3}(\alpha_k) + \rho_{r4M}(\alpha_k) w_{r4}(\alpha_k) \\ \rho_{\theta M}^*(\alpha_k) &= \rho_{\theta3M}(\alpha_k) w_{\theta3}(\alpha_k) + \rho_{\theta4M}(\alpha_k) w_{\theta4}(\alpha_k) \\ \rho_{z M}^*(\alpha_k) &= \rho_{z2M}(\alpha_k) w_{z2}(\alpha_k) + \rho_{z1M}(\alpha_k) w_{z1}(\alpha_k) \quad \dots\dots\dots(13) \\ \rho_{rI}^*(\alpha_k) &= \rho_{r3I}(\alpha_k) w_{r3}(\alpha_k) + \rho_{r4I}(\alpha_k) w_{r4}(\alpha_k) \\ \rho_{\theta I}^*(\alpha_k) &= \rho_{\theta3I}(\alpha_k) w_{\theta3}(\alpha_k) + \rho_{\theta4I}(\alpha_k) w_{\theta4}(\alpha_k) \\ \rho_{zI}^*(\alpha_k) &= \rho_{z2I}(\alpha_k) w_{z2}(\alpha_k) + \rho_{z1I}(\alpha_k) w_{z1}(\alpha_k) \end{aligned}$$

式(12)で $\rho_{rM}^*(\alpha_k)$ を例にとると $\rho_{r3M}(\alpha_k) w_{r3}(\alpha_k)$ は式(10)の $f_1(\alpha_k)$ に、 $\rho_{r4M}(\alpha_k) w_{r4}(\alpha_k)$ は式(10)の $f_2(\alpha_k)$ にそれぞれ対応している。このとき $\rho_{r3M}(\alpha_k), \rho_{r4M}(\alpha_k)$ 等が満足すべき条件は

$$g(\alpha_k) = g(-\alpha_k) \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここで、 $g(\alpha_k)$ は $\rho_{r3M}(\alpha_k), \rho_{r4M}(\alpha_k), \dots, \rho_{z1I}(\alpha_k)$ の各関数(重み関数)を意味する。そして、未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

$$\begin{aligned} \left(\begin{aligned} \rho_{r3M}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} a_{knM} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{r4M}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} b_{knM} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{\theta3M}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} c_{knM} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{\theta4M}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} d_{knM} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{z2M}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} e_{knM} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{z1M}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} f_{knM} t_n(\alpha_k) \end{aligned} \right) \left(\begin{aligned} \rho_{r3I}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} a_{knI} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{r4I}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} b_{knI} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{\theta3I}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} c_{knI} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{\theta4I}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} d_{knI} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{z2I}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} e_{knI} t_n(\alpha_k) \\ \rho_{z1I}(\alpha_k) &= \sum_{k=1}^{N/2} \sum_{n=1}^{M/2} f_{knI} t_n(\alpha_k) \end{aligned} \right) \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$t_n(\alpha_k) = \cos \{2(n-1)\alpha_k\} \quad \dots\dots\dots(16)$$

式(15), (16)の表現は式(14)を満足する。ここで、 M は、 $-\pi/2 \leq \alpha_k \leq \pi/2$ の範囲の選点数である。式(15)の離散化の方法により、特異積分方程式は、係数 $a_{nM}, b_{nM}, c_{nM}, d_{nM}, e_{nM}, f_{nM}, a_{nI}, b_{nI}, c_{nI}, d_{nI}, e_{nI}, f_{nI}$ についての $6M \times N/2$ 元の連立方程式に還元される。

以上の解析方法により無限体中の N 個の等大回転だ円体状介在物の境界上の応力分布ならびに最大応力を求める。

3. 解析結果及び考察

前報⁽¹⁰⁾と同様に、 $E_I/E_M > 1$ のとき境界上の法線方向の垂直応力 σ_n が界面の剥離に重要であると考えられるのでその干渉効果を議論する。また、 $E_I/E_M < 1$ のとき $\theta = \pi/2$ の面上の母材に生じる σ_θ が他の応力に比べて大きい値となるのでその干渉効果に注目する。以下では $\nu_M = \nu_I = 0.3$ として解析した。

本解析における応力の収束性を表1に示す。表1は図1(a)に示す無限体中の3個の等大回転だ円体状介在物の問題において、寸法比 $b/d=0.8$ 、形状比 $a/b=1.0$ とした場合の内側の介在物について二軸引張問題、純粋せん断問題および一軸引張問題における選点数 M と応力 σ_n を示している。本解析結果は、選点数 $M=24$ で有効数字4桁程度収束しており、良好な収束性を示している。この場合、境界条件 ($\sigma_{nM} - \sigma_{nI}, \tau_{n\theta M} - \tau_{n\theta I}, \tau_{nM} - \tau_{nI}, u_{rM} - u_{rI}, u_{\theta M} - u_{\theta I}, u_{z M} - u_{z I}$) については 10^{-4} 以下で境界

上の任意の点で満足されていることがわかった。このような検討によって本解析結果の良好な収束性と高い境界条件の満足度が確認された。

次に、介在物の個数 $N=5$ について、寸法比を $b/d=0.9$ 、形状比を $a/b=1.0$ としたときの $J=1\sim 3$ 番目の応力分布を図2に示す。個数 N が有限のとき、最大応力がどの介在物のどの位置に生じるかは E_I/E_M , b/d , a/b に依存するので複雑である。以下では、最内側の介在物 [すなわち $J = N/2$ (N :偶数), $J = (N+1)/2$ (N :奇数)] に注目し、介在物の個数 N と最大応力との関係を議論することにより、 $N \rightarrow \infty$ の場合(介在物の無限周期配列の場合)も考察する。

図3は図1(a)に示す N 個の介在物の問題で、剛性比 $E_I/E_M=10^5$ 、形状比 $a/b=1.0$ の場合について $b/d=0.9, 0.7, 0.5, 0.2$ における最大応力 $\sigma_{n\max}$ と介在物の個数の逆数の二乗 $1/N^2$ の関係を示したものである。著者らがさきに示した任意個の回転だ円体状空かを持つ無限体の非軸対称一軸引張り問題と同様に、 N をある程度大きくすれば本研究においても、 $\sigma_{n\max}$ と $1/N^2$ の間に直線関係がほぼ成り立つことがわかる。例えば $b/d=0.9$ の場合でも、 $N \geq 5$ において直線関係がほぼ成り立ち、外挿値($N \rightarrow \infty$)を比較すると、 $N=8$ と $N=7$ より求めた値と $N=7$ と $N=6$ より求めた値は有効数字4桁の精度で一致する。

介在物の個数を $N=1\sim 5$ と変化させたとき最内側の応力分布がどのように変化するかを図4~9に示す。図4~6は、剛性比 $E_I/E_M=10^5$ と寸法比 $b/d=0.9$ を固定して介在物の個数 N を変化させたときの最内側の応力分布を形状比が $a/b=1, a/b=0.5, a/b=2$ のときについて示したものである。干渉効果は $\psi = \pm 90^\circ$ 付近で顕著となり、大きな圧縮応力となって表われる。しかし、 $\psi = 0^\circ$ 付近の剥離に影響する引張応力 σ_n はあまり干渉によって影響しない。また、図7~9は、剛性比 $E_I/E_M=0.1$ の場合であるがその干渉効果は前報⁽⁵⁾で報告した空か($E_I/E_M=0$)の場合とよく似た傾向を示しており、引張応力の増加としてその干渉効果が現われている。 $E_I/E_M > 1$ のとき1個の介在物の最大応力は a/b の増加とともに増加する。一方、 $E_I/E_M < 1$ のとき1個の介在物の最大応

力は a/b の増加とともに減少する(図4~9の $N=1$)。しかし、干渉効果は $E_I/E_M > 1, E_I/E_M < 1$ に関わらず同じ b/d のとき a/b が大きいほど大きい。

最後に前述の直線関係を利用して表2~4に各条件における、介在物の個数が無限大のときの σ_n と σ_θ の最大応力とその発生位置を外挿によって求めたものを示す。剛性比 E_I/E_M が $10, 10^5$ のとき、最大応力は $\psi = 0^\circ$ 付近で発生しており、 b/d が大きくなっても干渉の影響は比較的小さく、引張応力の減少として表われる。但し、剛性比 $E_I/E_M=10^5$ では、 $b/d=0.9$ のとき $\psi = \pm 90^\circ$ の σ_n が干渉によって大きな圧縮応力として生じる。また、剛性比 E_I/E_M が $0, 0.1$ のときには最大応力の生じる位置は b/d の変化に伴って大きく変化する。

4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を用いて、任意個の回転だ円体状介在物を有する無限体の非軸対称一軸引張り問題を高い精度で解析する方法を示し、その干渉効果を考察した。得られた結果を図表に

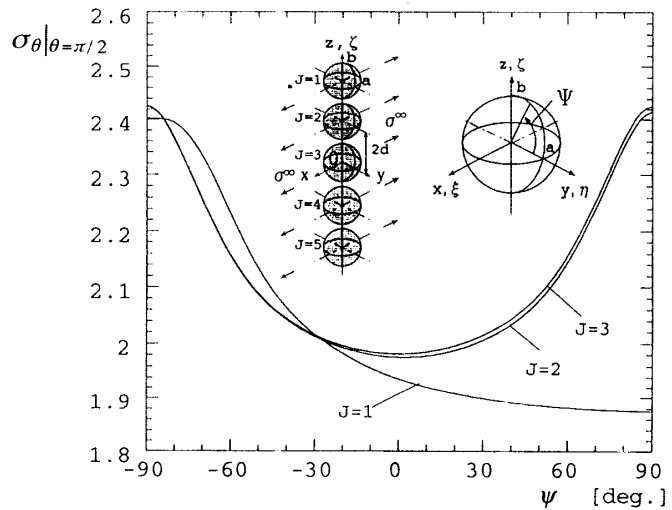


Fig.2 Interface stress σ_θ on $\theta = \pi/2$ ($a/b = 1.0, b/d = 0.9, E_I/E_M = 0.1, N = 5$)

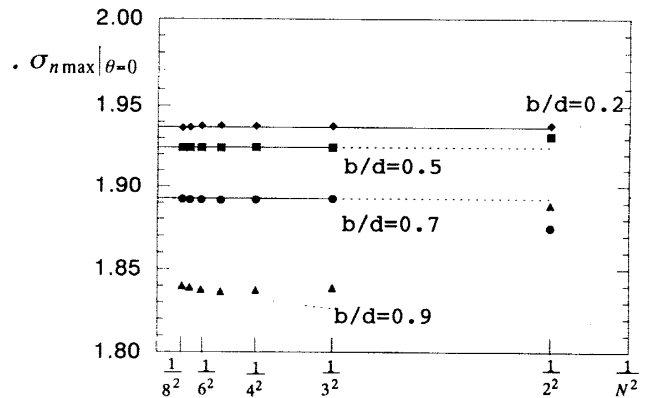


Fig.3 Maximum stress vs. $1/N^2$ relation in Fig.1(a) ($a/b = 1.0, E_I/E_M = 10^5, \theta = 0$)

Table 1 Convergence of stress σ_n for auxiliary problems and in Fig.1(a) ($b/d = 0.8, a/b = 1.0, N = 3, J = 2, E_I/E_M = 10^5, \theta = 0, \psi = 0$)

M	Biaxial	Pure shear	Uniaxial
16	1.7464	1.9910	3.7374
20	1.7443	1.9913	3.7356
24	1.7442	1.9914	3.7356
28	1.7441	1.9907	3.7348
32	1.7440	1.9904	3.7344

まとめた(図2~9, 表1~4)ほか, 以下のような知見が得られた.

(1) 最内側に生じる最大応力 σ_{max} と介在物の個数の逆数の二乗 $1/N^2$ の間に直線関係がほぼ成り立つ. その

関係を利用して, 個数が $N \rightarrow \infty$ のときの最大応力 $\sigma_{n,max}$ および $\sigma_{\theta,max}$ を外挿によって求めることができる.

(2) $E_I/E_M > 1$ のとき1個の介在物の最大応力は a/b の増加とともに増加する. 一方, $E_I/E_M < 1$ のとき1個の

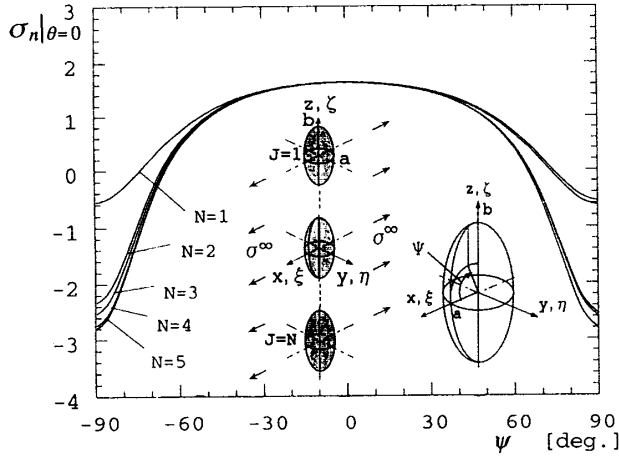


Fig. 4 Interface stress σ_n on $\theta=0$ at innermost inclusion ($a/b=0.5, b/d=0.9, E_I/E_M=10^5, N=1 \sim 5$)

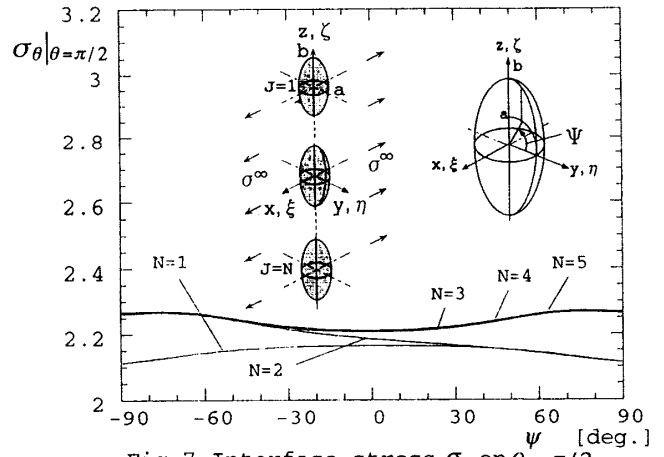


Fig. 7 Interface stress σ_θ on $\theta=\pi/2$ at innermost inclusion ($a/b=0.5, b/d=0.9, E_I/E_M=0.1, N=1 \sim 5$)

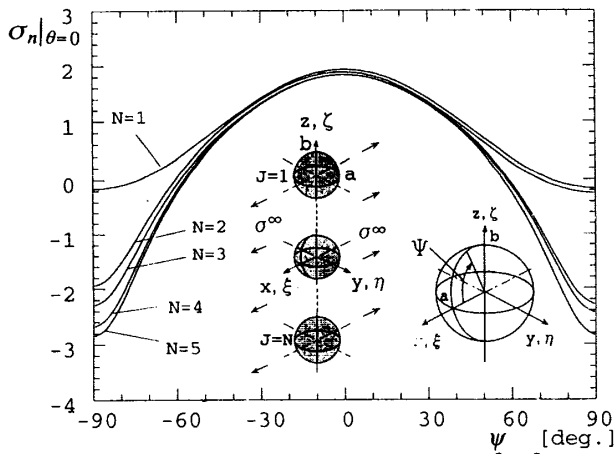


Fig. 5 Interface stress σ_n on $\theta=0$ at innermost inclusion ($a/b=1.0, b/d=0.9, E_I/E_M=10^5, N=1 \sim 5$)

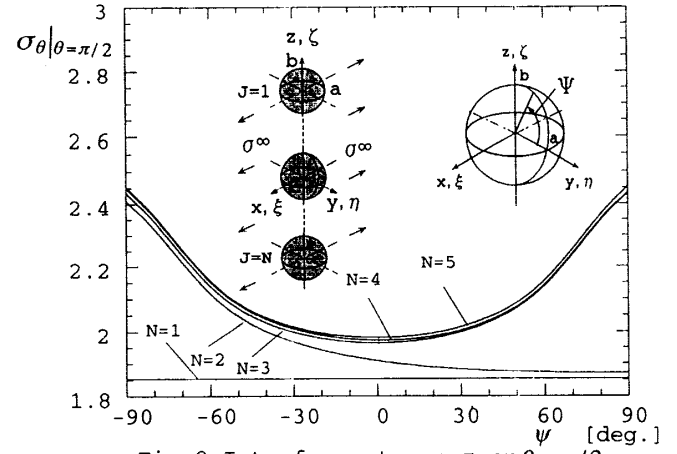


Fig. 8 Interface stress σ_θ on $\theta=\pi/2$ at innermost inclusion ($a/b=1.0, b/d=0.9, E_I/E_M=0.1, N=1 \sim 5$)

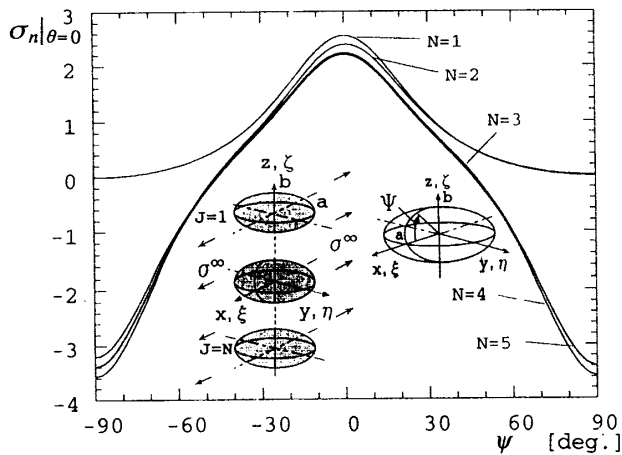


Fig. 6 Interface stress σ_n on $\theta=0$ at innermost inclusion ($a/b=2.0, b/d=0.9, E_I/E_M=10^5, N=1 \sim 5$)

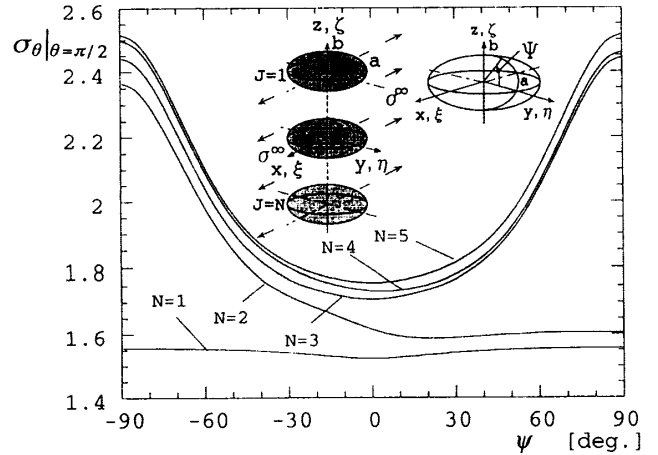


Fig. 9 Interface stress σ_θ on $\theta=\pi/2$ at innermost inclusion ($a/b=2.0, b/d=0.9, E_I/E_M=0.1, N=1 \sim 5$)

Table 2 Maximum stress at innermost inclusion when $N \rightarrow \infty$ ($a/b=0.5$)

a/b=0.5		Matrix			
E_I/E_M	b/d	ψ (deg.)	σ_n	ψ (deg.)	σ_θ
$\theta = \pi/2$					
0	0			0	2.480
	0.2			0	2.481
	0.5			± 1	2.490
	0.7			± 3	2.509
	0.8			± 45	2.534
	0.9			± 73	2.644
$\theta = 0$			$\theta = \pi/2$		
0.1	0	0	0.225	0	2.164
	0.2	0	0.225	0	2.165
	0.5	0	0.225	± 1	2.170
	0.7	0	0.227	± 3	2.183
	0.8	0	0.228	± 43	2.199
	0.9	0	0.230	± 73	2.273
$\theta = 0$			$\theta = 0$		
10	0	0	1.549	0	0.588
	0.2	0	1.549	0	0.588
	0.5	0	1.547	0	0.588
	0.7	0	1.542	0	0.586
	0.8	0	1.538	0	0.585
	0.9	0	1.531	0	0.584
$\theta = 0$			$\theta = 0$		
10 ⁵	0	0	1.652	0	0.708
	0.2	0	1.653	0	0.708
	0.5	0	1.651	0	0.708
	0.7	0	1.646	0	0.706
	0.8	0	1.642	0	0.704
	0.9	± 90	(-1.351)	± 90	(-0.685)
		± 90	1.635	0	0.701
		± 90	(-2.942)	± 90	(-1.289)

Table 4 Maximum stress at innermost inclusion when $N \rightarrow \infty$ ($a/b=2.0$)

a/b=2.0		Matrix			
E_I/E_M	b/d	ψ (deg.)	σ_n	ψ (deg.)	σ_θ
$\theta = \pi/2$					
0	0			0	1.660
	0.2			± 90	1.655
	0.5			± 14	1.696
	0.7			± 90	1.970
	0.8			± 90	2.332
	0.9			± 90	3.112
$\theta = 0$			$\theta = \pi/2$		
0.1	0	0	0.156	0	1.524
	0.2	± 1	0.157	± 90	1.554
	0.5	± 1	0.165	± 26	1.583
	0.7	± 1	0.173	± 90	1.794
	0.8	± 1	0.176	± 90	2.057
	0.9	± 1	0.176	± 90	2.554
$\theta = 0$			$\theta = 0$		
10	0	0	2.208	0	0.834
	0.2	0	2.207	0	0.834
	0.5	0	2.130	0	0.808
	0.7	0	2.033	0	0.761
	0.8	0	1.986	0	0.756
	0.9	0	1.934	0	0.742
$\theta = 0$			$\theta = 0$		
10 ⁵	0	0	2.557	0	1.096
	0.2	0	2.556	0	1.095
	0.5	0	2.448	0	1.049
	0.7	0	2.313	0	0.990
	0.8	0	2.246	0	0.962
	0.9	± 90	(-1.771)	± 90	(-0.767)
		0	2.183	0	0.934
		± 90	(-3.851)	± 90	(-1.642)

Table 3 Maximum stress at innermost inclusion when $N \rightarrow \infty$ ($a/b=1.0$)

a/b=1.0		Matrix			
E_I/E_M	b/d	ψ (deg.)	σ_n	ψ (deg.)	σ_θ
$\theta = \pi/2$					
0	0			-90-90	2.046
	0.2			± 1	2.047
	0.5			± 6	2.033
	0.7			± 34	2.131
	0.8			± 90	2.279
	0.9			± 90	2.888
$\theta = 0$			$\theta = \pi/2$		
0.1	0	0	0.192	0	1.854
	0.2	0	0.192	± 3	1.855
	0.5	0	0.195	± 3	1.879
	0.7	0	0.199	± 35	1.915
	0.8	0	0.204	± 90	2.023
	0.9	0	0.209	± 90	2.454
$\theta = 0$			$\theta = 0$		
10	0	0	1.768	0	0.670
	0.2	0	1.768	0	0.670
	0.5	0	1.756	0	0.667
	0.7	0	1.728	0	0.658
	0.8	0	1.705	0	0.651
	0.9	0	1.677	0	0.643
$\theta = 0$			$\theta = 0$		
10 ⁵	0	0	1.938	0	0.831
	0.2	0	1.936	0	0.834
	0.5	0	1.924	0	0.825
	0.7	0	1.892	0	0.811
	0.8	0	1.869	0	0.800
	0.9	± 90	(-1.393)	± 90	(-0.592)
		0	1.843	0	0.790
		± 90	(-3.101)	± 90	(-1.351)

介在物の最大応力はa/bの増加とともに減少する(図4~9のN=1)。しかし、干渉効果は $E_I/E_M > 1$, $E_I/E_M < 1$ に関わらず同じb/dのときa/bが大きいほど大きい。

(3) 本解析法によって、a/b, b/d, E_I/E_M の種々の値に対して良好な収束性と高い境界条件の満足度が得られた。また境界上のなめらかな応力分布が得られるので、最大応力の生じる位置を正確に把握することが可能である。

文 献

- (1) Eshelby, J.D., The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems, *Proceeding Royal Society London Series A*, Vol. 241 (1957), 376-396
- (2) Eshelby, J.D., The Elastic Field outside an Ellipsoidal Inclusion, *Proceeding Royal Society London Series A*, Vol. 252 (1959), 561-569
- (3) Shadovskiy, M.A., and Sternberg, E., Stress Concentration Around an Ellipsoidal Cavity in an Infinite Body under Arbitrary Plane Stress Perpendicular to the Axis of Revolution of Cavity, *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, Vol. 69 (1947), 191-201
- (4) 土田栄一郎・中原一郎・小玉正雄, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第1報, 2球かを有する弾性体), *機論*, 42-353, (1976), 46-54.
- (5) 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利, 回転だ円体状空かの非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, *機論*, 62-596, A(1996), 1051-1058
- (6) 土田栄一郎・内山直人・中原一郎・小玉正雄, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第2報, 3球かを有する弾性体), *機論*, 44-382, (1978), 1876-1883.
- (7) 野田尚昭・小笠原望・松尾忠利, 任意個の回転だ円体状空かを持つ無限体の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, *機論*, 62-602, A(1996), 97-103
- (8) 野田尚昭・松尾忠利・原田昭治・中村資生, 特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析, *機論*, 61-585, A (1995), 965-973.
- (9) 松尾忠利・野田尚昭・原田昭治, 任意個の回転だ円体状介在物を持つ無限体の引張り, *機論*, 62-597, A(1996), 1226-1233
- (10) 野田尚昭・泊賢治・松尾忠利, 回転だ円体状介在物を持つ無限体の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, *機論*, 64-622, A (1998), 1577-1582
- (11) 野田尚昭・泊賢治, 軸対称体の非軸対称一軸引張り問題における応力解析の基本解とその応用, 九州工業大学研究報告(工学), No.70 (1976), 7-12.