

特異積分方程式法による長方形き裂の
応力拡大係数の分布の解析*王 清^{*1}, 野田尚昭^{*2}
本田昌章^{*3}, 陳夢成^{*4}Solution of the Distribution of Stress Intensity Factor Along the Front
of a 3D Rectangular Crack by Using a Singular Integral Equation MethodQing WANG, Nao-Aki NODA^{*5},
Masaaki HONDA and Mengcheng CHEN^{*5} Kyushu Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu, Fukuoka 804-8550 Japan

In this paper a singular integral equation method is applied to calculate the distribution of stress intensity factor along the crack front of a 3D rectangular crack. The stress field induced by body force doublet in an infinite body is used as the fundamental solution. Then, the problem is formulated as integral equation with a singularity of the form of r^{-3} . In solving the integral equation, the unknown functions of body force densities are approximated by the product of a polynomial and a fundamental density function, which expresses stress singularity along the crack front in an infinite body. The calculation shows that the present method gives the smooth variation of stress intensity factors along the crack front for various aspect ratio. The present method gives rapidly converging numerical results and highly satisfied boundary conditions throughout the crack boundary.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Rectangular Crack, Singular Integral Equation, Numerical Solution, Fundamental Density Function, Polynomial

1. 緒言

3次元き裂の解析は構造物に存在する多くの欠陥の評価に有効である。村上ら⁽¹⁾は、実際問題でたびたび遭遇するような欠陥について、実用的に十分な精度で予測する方法を確立することを目標として、以下のような任意形状き裂の最大応力拡大係数を求める評価式を提案した。

表面き裂⁽¹⁾について

$$K_{\max} = 0.65\sigma\sqrt{\pi\sqrt{area}} \dots\dots\dots(1)$$

内部き裂⁽²⁾について

$$K_{\max} = 0.50\sigma\sqrt{\pi\sqrt{area}} \dots\dots\dots(2)$$

これらの式では、欠陥材の疲労限の状態は欠陥からき裂が発生するかしないかの限界ではなく、欠陥から発生したき裂がわずかに伝ばして停止した状態であることに注目している。そして内部き裂の近似式ではだ円形き裂の厳密解が基本となっている。式(1)については、最近野田ら^{(3)~(5)}が半だ円き裂先端の応力拡大係数を正確に求め、誤差3%程度以内でその最大値を与えることを確

認している。実際の欠陥やき裂は多くの場合だ円で近似されることが多いが、だ円とは大きく異なるき裂や欠陥も存在するので、それらを式(1)、(2)で評価した場合の誤差の程度を明らかにしておくことは重要である。そこで、本研究では、だ円以外の形状として長方形き裂の問題を取扱う。

長方形き裂に関しては、阿部ら⁽⁶⁾、石田ら^{(7)~(9)}、Kassir⁽¹⁰⁾、村上ら⁽¹¹⁾、Weaver⁽¹²⁾、Mastrojannis⁽¹³⁾らの解析があるが、いずれもき裂先端の滑らかな応力拡大係数の分布が得られておらず、従って、最大の応力拡大係数がどの程度正確に得られているか解析の精度が不明である。例えば石田ら⁽⁸⁾の論文では長方形き裂の結果について他の研究との比較がなされているがそれらには平均で4.8%、最大で7.5%程度の違いがある。そこで本研究では、野田ら^{(3)~(5)}が先に提案した、体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いる。この方法によれば先の半だ円き裂と同様に、き裂先端の滑らかな応力拡大係数の分布とき裂面全体での高い境界条件の満足度が得られると予想される。

2. 体積力法の特異積分方程式の数値解析

図1に示すようにxy平面に縦2b、横2aの長方形き裂を

* 原稿受付 2000年2月14日。

*1 山東工業大学(中国山東省済南市)[現：九州工業大学工学部]。

*2 正員、九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*3 九州工業大学工学部。

*4 華東交通大学工学部(中国江西省南昌市)。

E-mail: noda@ieyasu.mech.kyutech.ac.jp

有する無限体の $o-xyz$ 座標系を定義する. x 方向, y 方向, z 方向に広がる無限体が, $|z| \rightarrow \infty$ で一様な引張応力 σ_z^∞ を受ける場合を解析の対象とする. このとき問題は, き裂が存在しない無限体中において, き裂となるべき仮想境界上に分布させた z 方向の標準型体積力対の密度 $f(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分方程式で表現される.

$$\left. \begin{aligned} \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} \iint_S \frac{f(\xi, \eta)}{r_1^3} d\xi d\eta &= -\sigma_z^\infty \\ r_1 &= \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \\ S &= \{(\xi, \eta) \mid -a \leq \xi \leq a, -b \leq \eta \leq b\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

\iint_S は発散積分の Hadamard 有限部分を表す. 式 (3) は仮想き裂上における境界条件 $\sigma_z = 0$ に相当している. S はき裂のない無限体中に想定した長方形き裂となるべき仮想き裂面を表している.

3. 特異積分方程式の数値解析法

分布している体積力対密度は連続で滑らかなはずであると考える, 本論文では以下のように仮定する.

$$\left. \begin{aligned} f(\xi, \eta) &= F(\xi, \eta) w(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) &= \frac{4(1-\nu)^2 \sigma_z^\infty}{1-2\nu} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

そうすると式 (3) は次式のようになる.

$$\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{F(\xi, \eta)}{r_1^3} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta = -1 \dots\dots\dots (5)$$

ここで $F(\xi, \eta)$ としては問題の対称性, 連続性等を考慮した多項式を用いる. 具体的には, $\alpha_i (i=0, 1, 2, \dots, n(n+2))$ を未知係数とする. ξ, η の $2n$ 次までの多項式を採用した.

$$\left. \begin{aligned} F(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \eta^2 + \dots + \alpha_{n-1} \eta^{2(n-1)} + \alpha_n \eta^{2n} \\ &+ \alpha_{n+1} \xi^2 + \alpha_{n+2} \xi^2 \eta^2 + \dots + \alpha_{2n+1} \xi^2 \eta^{2n} \\ &\vdots \\ &+ \alpha_{l-n-1} \xi^{2n} + \alpha_{l-n} \xi^{2n} \eta^2 + \dots + \alpha_{l-1} \xi^{2n} \eta^{2n} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i G_i(\xi, \eta), \quad l = (n+1)^2 \\ G_0(\xi, \eta) &= 1, G_1(\xi, \eta) = \eta^2, \dots \\ &\dots, G_{n+1}(\xi, \eta) = \xi^2, \dots, G_{l-1}(\xi, \eta) = \xi^{2n} \eta^{2n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

式 (5), 式 (6) より次式が得られ, 問題は式 (6) で示される多項式 $F(\xi, \eta)$ の $l = (n+1)^2$ 個の係数 α_i を未知数とする連立一次方程式を解くことに帰する.

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i A_i = -1 \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$A_i = \iint_S \frac{G_i(\xi, \eta)}{r_1^3} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

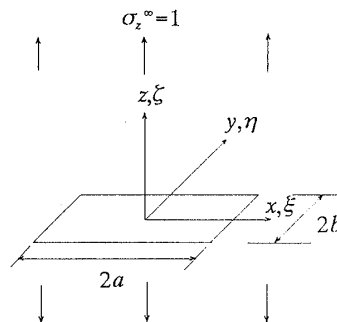


Fig.1 A rectangular crack in a infinite body.

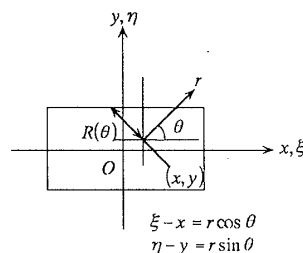


Fig.2 Change of integral parameter from (ξ, η) to (r, θ) .

4. 特異積分の処理について

式(7・b)の積分を実行するとき, 注目点 (x, y) と着力点 (ξ, η) が一致するとき, 特異性を有するため以下のような方法によりその値を正確に求める. まず特異積分 A_l に含まれる被積分関数の構成要素 $(a^2 - \xi^2)^{1/2} (b^2 - \eta^2)^{1/2}, \xi^{2i}, \eta^{2i}$ をそれぞれ以下のように分ける

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a^2 - \xi^2} &= P_0(x) - (\xi - x)P_1(x) - (\xi - x)^2 P_2(\xi, x) \\ \sqrt{b^2 - \eta^2} &= Q_0(y) - (\eta - y)Q_1(y) - (\eta - y)^2 Q_2(\eta, y) \\ \xi^{2n} &= x^{2n} + 2nx^{2n-1} \cdot (\xi - x) + \sum_{i=0}^{2n-2} \{(i+1) \cdot \xi^{(2n-2-i)} \cdot x^i\} \cdot (\xi - x)^2 \\ \eta^{2n} &= y^{2n} + 2ny^{2n-1} \cdot (\eta - y) + \sum_{i=0}^{2n-2} \{(i+1) \cdot \eta^{(2n-2-i)} \cdot y^i\} \cdot (\eta - y)^2 \\ P_0(x) &= \sqrt{a^2 - x^2}, Q_0(y) = \sqrt{b^2 - y^2}, \\ P_1(x) &= \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, P_2(\xi, x) = \frac{\xi + x}{\sqrt{a^2 - x^2} (\sqrt{a^2 - \xi^2} + \sqrt{a^2 - x^2})} \\ &\times \frac{a^2}{(\xi \sqrt{a^2 - x^2} + x \sqrt{a^2 - \xi^2})} \\ Q_1(y) &= \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}}, Q_2(\eta, y) = \frac{\eta + y}{\sqrt{b^2 - y^2} (\sqrt{b^2 - \eta^2} + \sqrt{b^2 - y^2})} \\ &\times \frac{b^2}{(\eta \sqrt{b^2 - y^2} + y \sqrt{b^2 - \eta^2})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで重要なことは、上記のそれぞれの構成要素を $(\xi-x)$ もしくは $(\eta-y)$ についての多項式と見たとき、零次、1次の係数が注目点の位置 (x,y) のみにより決定され、積分変数 ξ, η に無関係な形で表されることである。

次に $(\xi-x) = r \cdot \cos \theta, (\eta-y) = r \cdot \sin \theta$ (図2参照) により注目点 (x,y) を原点とする極座標に変換することで次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} &= E_0 + E_1(\theta) \cdot r + E_2(r, \theta) \cdot r^2 \\ \xi^{2i} &= B_{0i} + B_{1i}(\theta) \cdot r + B_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \\ \eta^{2i} &= C_{0i} + C_{1i}(\theta) \cdot r + C_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

$E_0, E_1(\theta)$ を例にとると式 (10) のように表される。

$$\left. \begin{aligned} E_0 &= P_0 Q_0 = \sqrt{a^2 - b^2} \\ E_1(\theta) &= -P_1 Q_0 \cos \theta - P_0 Q_1 \sin \theta \\ &= \frac{x \sqrt{b^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \theta - \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{b^2 - y^2}} \sin \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

よって、式(7・b)の A_i における基本密度関数と重み関数の積は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} G_i(\xi, \eta) \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} &= D_{0i} + D_{1i}(\theta) \cdot r + D_{2i}(r, \theta) \cdot r^2 \\ &\quad + D_{3i}(r, \theta) \cdot r^3 + D_{4i}(r, \theta) \cdot r^4 \\ &\quad + D_{5i}(r, \theta) \cdot r^5 + D_{6i}(r, \theta) \cdot r^6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

$D_{0i}, D_{1i}(\theta)$ は $E_0, E_1(\theta), B_{0i}, B_{1i}(\theta), C_{0i}, C_{1i}(\theta)$ の組み合わせにより、また $D_{2i}(r, \theta) \sim D_{6i}(r, \theta)$ は $E_0 \sim C_{2i}(r, \theta)$ の組み合わせにより表せられる。式 (11) を式(7・b)に代入し、積分変数についても同様の座標変換を行い次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A_{ai} + A_{bi} \\ A_{ai} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left[\frac{D_{0i}}{r^2} + \frac{D_{1i}(\theta)}{r} \right] dr d\theta \\ A_{bi} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left[D_{2i}(r, \theta) + D_{3i}(r, \theta) \cdot r + D_{4i}(r, \theta) \cdot r^2 \right. \\ &\quad \left. + D_{5i}(r, \theta) \cdot r^3 + D_{6i}(r, \theta) \cdot r^4 \right] dr d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

A_{bi} は特異性がないので数値積分によりその値を求める。 A_{ai} は $r \rightarrow 0$ で特異性を有するが、被積分関数が特異性を有する方向の積分変数 r について -1乗、-2乗だけの形で

表せているため Hadamard の有限部分の概念 (Pf 積分) を用いて次式のように表すことができる。

$$A_{ai} = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{D_{0i}}{R(\theta)} + D_{1i}(\theta) \cdot \log(R(\theta)) \right] d\theta \dots\dots\dots(13)$$

ここで $R(\theta)$ は図2に示すように注目点 (x,y) とき裂境界との距離を表す。こうして結局 A_{ai} は特異性のない積分として通常の数値積分で求めることができるようになる。

5. 数値計算結果と検討

以上の理論に基づいて、計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ n を変化させて形状比 $b/a = 8.0 \sim 0.125$ について数値計算を行った。式(7),(12),(13)の数値積分には、二重指数関数型積分公式等のサブルーチンを用いて計算した。また結果として得られた応力拡大係数 K_I をまとめるのに、無限板中の長さ $2b$ の二次元き裂の応力拡大係数 $\sigma_2^\infty \sqrt{\pi b}$ で無次元化した値である式(14)を用いた。

$$F_I = \frac{K_I(\xi, \eta)}{\sigma_2^\infty \sqrt{\pi b}} \Big|_{\xi=\xi, \eta=\eta} = \sqrt{a^2 - \xi^2} F(\xi, \eta) \Big|_{\xi=\xi, \eta=\eta} \dots\dots\dots(14)$$

本解析では式(7・b)の A_i で表される特異積分を数値的に精度よく求めることが重要である。そこで形状比 $b/a = 10$ のとき式(7・b)の A_i の $G_i(\xi, \eta) = 1, \eta^2, \xi^2 \eta^2$ の数値積分により得られた値を仮想き裂全面について調べたものを図3に示す。図のように重みは滑らかな関数として表されており、本研究ではこのような関数の重ね合わせ(一次結合)により境界条件を満足させる。ここで注目点(選点)の選び方としてはき裂前縁の位置を一辺 a の正方形に写像して、選点数が x 軸、 y 軸方向にそれぞれ $m \times m$ であるとき、 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a$ の範囲で一辺を $(m+1)$ 等分するメッシュを x 軸、 y 軸について切る。そしてメッシュの $m \times m$ 個の交点が境界条件を考える注目点とする。式 (5) で表される連立一次方程式を解くには、注目点それぞれに対し誤差ができる限り小さくなるように、最小二乗法を用いる。

まず形状比 $b/a = 1.0, 0.25$ のき裂について、近似する式(6)の多項式の次数 n を変化させたときのき裂前縁に沿った応力拡大係数 F_I の収束性をそれぞれ表1, 3に示し、表2に選点数 30×30 の場合の F_I の収束性を示す。選点数を 10×10 から 30×30 としても応力拡大係数はほぼ等しいことから以下選点数 10×10 で応力拡大係数を計算した。

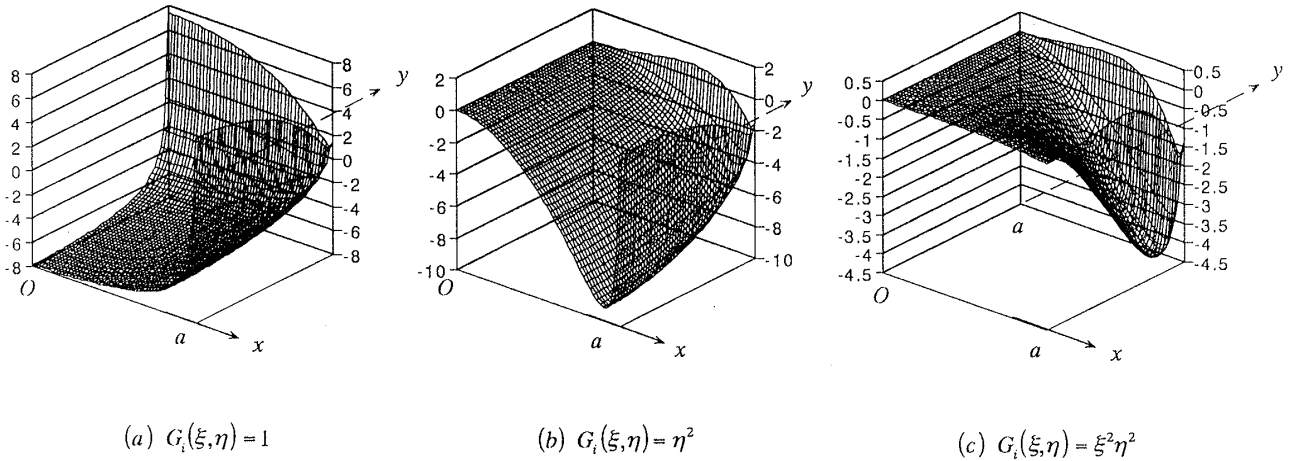


Fig.3 Numerical values of eqn (7·b) $\frac{A_i}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{G_i(\xi, \eta)}{r_1^3} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} d\xi d\eta$

Table 1 Convergence of the results $F_I(b/a=1.0$, Number of collocation points 10×10).

| x/a | 0/11 | 1/11 | 2/11 | 3/11 | 4/11 | 5/11 | 6/11 | 7/11 | 8/11 | 9/11 | 10/11 | 11/11 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.74652 | 0.74550 | 0.74228 | 0.73629 | 0.72651 | 0.71141 | 0.68865 | 0.65473 | 0.60403 | 0.52640 | 0.39793 | 0.00000 |
| 3 | 0.75652 | 0.75434 | 0.74788 | 0.73738 | 0.72305 | 0.70489 | 0.68221 | 0.65287 | 0.61184 | 0.54765 | 0.43045 | 0.00000 |
| 4 | 0.75235 | 0.75091 | 0.74636 | 0.73807 | 0.72522 | 0.70696 | 0.68254 | 0.65101 | 0.60980 | 0.55053 | 0.44384 | 0.00000 |
| 5 | 0.75375 | 0.75192 | 0.74645 | 0.73736 | 0.72436 | 0.70668 | 0.68293 | 0.65125 | 0.60908 | 0.55031 | 0.44973 | 0.00000 |
| 6 | 0.75336 | 0.75168 | 0.74654 | 0.73761 | 0.72448 | 0.70653 | 0.68273 | 0.65118 | 0.60879 | 0.54979 | 0.45253 | 0.00000 |
| 7 | 0.75341 | 0.75171 | 0.74652 | 0.73759 | 0.72450 | 0.70658 | 0.68277 | 0.65118 | 0.60859 | 0.54924 | 0.45361 | 0.00000 |

Table 2 Convergence of the results $F_I(b/a=1.0$, Number of collocation points 30×30).

| x/a | 0/31 | 3/31 | 6/31 | 9/31 | 12/31 | 15/31 | 18/31 | 21/31 | 24/31 | 27/31 | 30/31 | 31/31 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.74452 | 0.74358 | 0.74051 | 0.73455 | 0.72432 | 0.70768 | 0.68134 | 0.64013 | 0.57516 | 0.46790 | 0.25220 | 0.00000 |
| 3 | 0.75824 | 0.75541 | 0.74712 | 0.73394 | 0.71658 | 0.69544 | 0.66982 | 0.63655 | 0.58693 | 0.49824 | 0.28514 | 0.00000 |
| 4 | 0.75101 | 0.74981 | 0.74569 | 0.73721 | 0.72260 | 0.70042 | 0.67006 | 0.63135 | 0.58150 | 0.50368 | 0.30470 | 0.00000 |
| 5 | 0.75469 | 0.75218 | 0.74508 | 0.73423 | 0.71984 | 0.70044 | 0.67286 | 0.63343 | 0.57935 | 0.50197 | 0.31638 | 0.00000 |
| 6 | 0.75277 | 0.75124 | 0.74602 | 0.73589 | 0.72017 | 0.69898 | 0.67167 | 0.63442 | 0.58027 | 0.50017 | 0.32335 | 0.00000 |
| 7 | 0.75378 | 0.75157 | 0.74530 | 0.73528 | 0.72068 | 0.69975 | 0.67126 | 0.63372 | 0.58092 | 0.49957 | 0.32756 | 0.00000 |

Table 3 Convergence of the results $F_I(b/a=0.25$, Number of collocation points 10×10).

| x/a | 0/11 | 1/11 | 2/11 | 3/11 | 4/11 | 5/11 | 6/11 | 7/11 | 8/11 | 9/11 | 10/11 | 11/11 |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| n | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0.94553 | 0.94739 | 0.95260 | 0.95995 | 0.96732 | 0.97147 | 0.96764 | 0.94879 | 0.90396 | 0.81399 | 0.63574 | 0.00000 |
| 3 | 0.98570 | 0.98355 | 0.97748 | 0.96842 | 0.95765 | 0.94621 | 0.93402 | 0.91831 | 0.89071 | 0.83059 | 0.68344 | 0.00000 |
| 4 | 0.97351 | 0.97365 | 0.97351 | 0.97164 | 0.96618 | 0.95543 | 0.93835 | 0.91422 | 0.88034 | 0.82418 | 0.69573 | 0.00000 |
| 5 | 0.97759 | 0.97654 | 0.97364 | 0.96930 | 0.96347 | 0.95485 | 0.94070 | 0.91726 | 0.88014 | 0.82052 | 0.69865 | 0.00000 |
| 6 | 0.97626 | 0.97576 | 0.97395 | 0.97018 | 0.96380 | 0.95418 | 0.93994 | 0.91768 | 0.88113 | 0.81975 | 0.69956 | 0.00000 |
| 7 | 0.97681 | 0.97602 | 0.97375 | 0.96993 | 0.96395 | 0.95449 | 0.93985 | 0.91741 | 0.88144 | 0.81973 | 0.70014 | 0.00000 |

次に形状比 $b/a = 1.0$ のとき選点数が x 軸, y 軸それぞれ 10 の場合未知関数 $F(\xi, \eta)$ の多項式近似の次数 n を変化させたときの境界条件の満足度を図 4 に示す. 次数を $n=2$ から増加させるにつれて境界条件の満足度はよくなり, $n=7$ のときにき裂上のすべての点で境界条件は 2×10^{-4} 以下で満足されている. 次にき裂の形状 b/a が $8.0 \sim 0.125$ の場合のき裂前縁に沿っての F_I の値を表 4 に示す. またそれらをグラフ化して図 5, 6 に示す. 図 5 で形状比

$b/a = 1.0$ の場合石田らの解は本解析結果によく一致しているが, $x/a \rightarrow 1$ に近くなると違いが認められた. 図 6 に示すように従来得られている長方形き裂の結果^{(6)~(13)}は平均 4.8%, 最大 7.5% 程度の違いがあるが, 石田らの結果⁽⁸⁾と本解析は誤差 0.4% 以内で一致しており, 信頼性が高い. 表 5 に村上らの提案する任意形状内部き裂の最大応力拡大係数を求める評価式 (2) の誤差を検証した結果を示す. 式 (2) の評価式は任意形状のき裂の最大

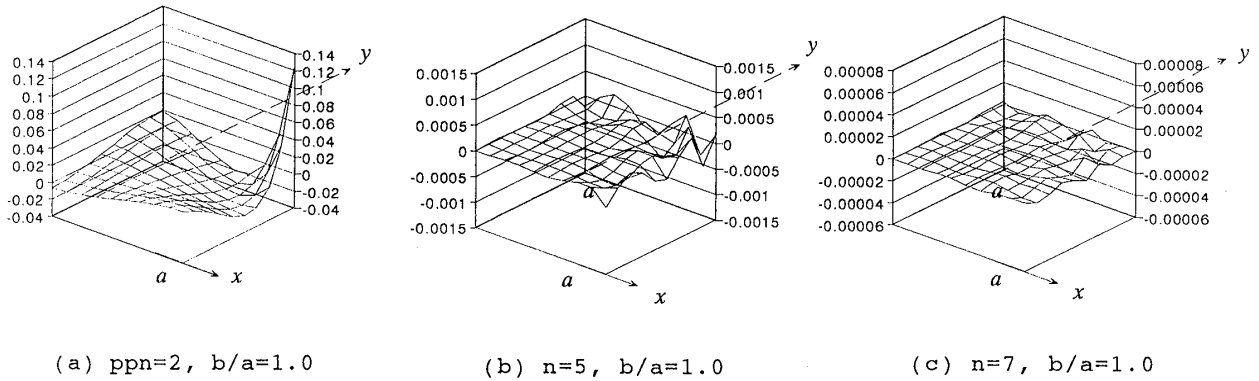


Fig.4 Compliance of boundary condition

Table 4 Dimensionless stress intensity factors F_I along crack front in Fig.1 ($n=7$).

| x/a b/a | 0/11 (Isida: [8]) | 1/11 | 2/11 | 3/11 | 4/11 | 5/11 | 6/11 | 7/11 | 8/11 | 9/11 | 10/11 | 11/11 |
|----------------|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 8.000 | 0.290 (-) | 0.289 | 0.287 | 0.283 | 0.277 | 0.268 | 0.257 | 0.241 | 0.219 | 0.189 | 0.141 | 0.000 |
| 4.000 | 0.405 (-) | 0.404 | 0.401 | 0.396 | 0.389 | 0.380 | 0.367 | 0.349 | 0.323 | 0.285 | 0.220 | 0.000 |
| 2.000 | 0.566 (-) | 0.564 | 0.560 | 0.553 | 0.542 | 0.528 | 0.510 | 0.486 | 0.454 | 0.409 | 0.328 | 0.000 |
| 1.000 | 0.753 (0.756) | 0.752 | 0.747 | 0.738 | 0.725 | 0.707 | 0.683 | 0.651 | 0.609 | 0.549 | 0.453 | 0.000 |
| 0.667 | 0.852 (-) | 0.850 | 0.848 | 0.836 | 0.823 | 0.804 | 0.779 | 0.746 | 0.700 | 0.634 | 0.525 | 0.000 |
| 0.500 | 0.906 (0.907) | 0.904 | 0.900 | 0.892 | 0.879 | 0.862 | 0.839 | 0.806 | 0.760 | 0.692 | 0.576 | 0.000 |
| 0.250 | 0.977 (0.977) | 0.976 | 0.974 | 0.970 | 0.964 | 0.954 | 0.940 | 0.917 | 0.881 | 0.820 | 0.699 | 0.000 |
| 0.125 | 0.995 (0.995) | 0.995 | 0.995 | 0.994 | 0.992 | 0.989 | 0.985 | 0.976 | 0.959 | 0.920 | 0.820 | 0.000 |

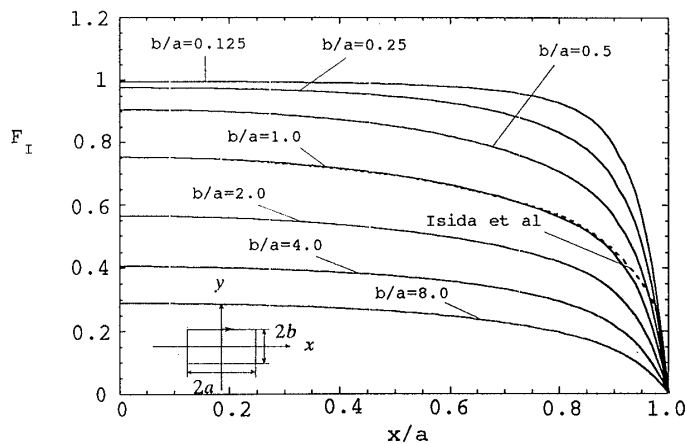


Fig.5 Variation of dimensionless stress intensity factors F_I along the crack front $y=b$.

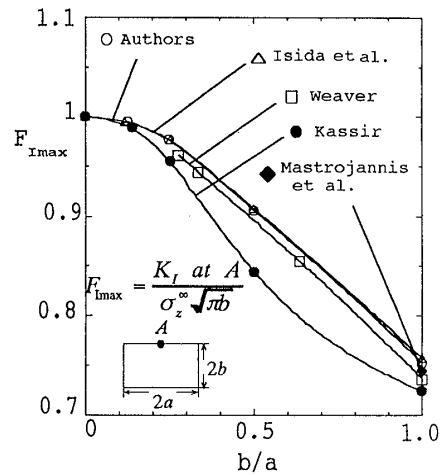


Fig.6 $F_{I_{max}}$ vs. b/a for a rectangular crack in an infinite body.

Table 5 Maximum of the stress intensity factors $F_{I \max}$ of elliptical and rectangular crack and the accuracy of Murakami's formula (eqn(2)).

$$\left[F_{I \max} = \frac{0.50\sigma_z \sqrt{\pi \sqrt{area}}}{\sigma_z \sqrt{\pi b}} = \sqrt{\frac{area}{4b}}, \delta = \frac{F_{I \max} - F_{I \max}^*}{F_{I \max}} \times 100 \right]$$

(a) Rectangular crack

| b/a | $F_{I \max}$ | $F_{I \max}^*$ | $\delta(\%)$ |
|-------|--------------|----------------|--------------|
| 1.000 | 0.753 | 0.707 | -6.1 |
| 0.667 | 0.852 | 0.783 | -8.2 |
| 0.500 | 0.906 | 0.841 | -7.2 |
| 0.250 | 0.977 | 1.000 | +2.4 |

(b) Elliptical crack

| b/a | a/b | $F_{I \max}$ | $F_{I \max}^*$ | $\delta(\%)$ |
|-------|-------|--------------|----------------|--------------|
| 1.000 | 1.000 | 0.637 | 0.666 | +4.6 |
| 0.750 | 1.333 | 0.724 | 0.715 | -1.2 |
| 0.500 | 2.000 | 0.826 | 0.792 | -4.1 |
| 0.250 | 4.000 | 0.933 | 0.941 | +0.9 |

応力拡大係数が誤差10%程度以内で求められるように提案されたものである。本論文では、長方形き裂の問題を取り扱っているが、き裂形状が長方形以外の誤差も調べることが望ましいと考え、ここでは、本解析結果とだ円形き裂の厳密解の両者を検討した。その結果、式(2)は長方形き裂で8%程度以内で、だ円形き裂で5%程度以内で、その最大値を与えていることがわかる

6. 結 言

- (1)長方形き裂の問題を体積法の特異積分方程式を解析して考察した。未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似することによって比較的少ない選点数(10×10)で良好な収束性(表1~3)と境界条件の満足度(図4)と滑らかな応力拡大係数の分布(図5)が得られた。
- (2)従来得られている長方形き裂の結果は平均4.8%、最大7.5%程度の違いがあったが(図6)、石田らの結果と本解析は誤差0.4%以内で一致しており、信頼性が高い。
- (3)村上らの提案する任意形状内部き裂の最大応力拡大係数を求める評価式(2)の誤差を検証した結果、長方形き裂で8%程度以内(表5(a))で、だ円形き裂で5%程度以内(表5(b))で、その最大値を与えている。

本研究は、著者らの一人が日本学術振興会の外国人研究員として滞在中に行われたものであることを記し深く謝意を表す。

文 献

- (1)村上敬宜・石田誠, 任意形状表面き裂の応力拡大係数の解析と表面近傍の応力場, 機論, 51-464, A(1985), 1050-1056.
- (2)村上敬宜・児玉昭太郎・小沼静代, 高強度鋼の疲労強度に及ぼす介在物の影響の定量的評価法, 機論, 54-500, A(1988), 688-696.
- (3)野田尚昭・三好伸介, 特異積分方程式による半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 61-586, A(1995), 1232-1240.
- (4)野田尚昭・小林公浩・三好伸介, 特異積分方程式を用いた傾斜半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 63-615, A(1997), 2345-2350.
- (5)野田尚昭・柳下誠, き裂面接触問題における自由表面に対する傾斜角度の小さいき裂の解析と摩擦係数の影響, 機論, 65-639, A(1999), 2303-2308.
- (6)Abe, H., Hayashi, K., and Enokida, Y., Stress Intensity Factors for a Rectangular Crack in a Semi-Infinite Solids, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., 48-425(1982), 29-34.
- (7)Isida, M., Yoshida, T., and Noguchi, H., Prelim. Proc. Japan Soc. Mech. Engrs. and Japan Soc. Precision Engng., Mie District, No.823-3(1982), 15-17.
- (8)Isida, M., Yoshida, T., and Noguchi, H., A Rectangular Crack in an Infinite Solid, A Semi-Infinite Solid and a Finite-Thickness Plate Subjected to Tension, Int. J. Frac., 52-2 (1991), 79-90.
- (9)Ishida, M., Tsuru, H., and Noguchi, H., New Method of Analysis of Three Dimensional Crack Problems, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, 43-4 (1983), 317-334.
- (10)Kassir, M.K., Stress Intensity Factor for a Three-Dimensional Rectangular Crack, Trans. ASME, Ser.E, 48-2(1981), 309-312.
- (11)Murakami, Y., and Nemat-Nasser, S., Growth and Stability of Interacting Surface Flaws of Arbitrary Shape, Engng. Frac. Mech, 17 (1983), 193-210.
- (12)Weaver, J., Three-Dimensional Crack Analysis, Int. J. Solid. Struct, 13 (1977), 321-330.
- (13)Mastrojannis, E.N., Keer, L.M., and Mura, T., Stress Intensity Factor for a Plane Crack under Normal Pressure, Int. J. Frac., 15-3 (1979), 247-258.