

円柱状介在物端部の非軸対称一軸引張りにおける
特異応力場の強さ解析*野田尚昭*¹, 現海孝雄*², 熊谷雄一郎*³Analysis of Intensity of Singular Stress Fields at the End
of a Cylindrical Inclusion under Asymmetric Uniaxial TensionNao-Aki NODA*⁴, Takao GENKAI and Yu-Ichiro KUMAGAE*⁴ Kyushu Institute of Technology, Mechanical Engineering Dept.,
1-1, Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-city, Fukuoka-prefecture, 804-8550 Japan

This paper deals with generalized stress intensity factors at the end of an elastic cylindrical inclusion in an infinite body under asymmetric uniaxial tension. These stress intensity factors control singular stress fields at the end of inclusion. The problem is solved on the superposition of two auxiliary loads; (i) biaxial tension and (ii) plane state of pure shear. The problem is formulated as a system of integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where unknowns are densities of body force distributed in infinite bodies having the same elastic constants as those of the matrix and inclusion. In the numerical analysis, the unknown functions of the body force densities are expressed as fundamental density functions and weight functions. Fundamental density functions are chosen to express the symmetric stress singularity of the form $1/r^{1-\lambda_1}$, $1/r^{1-\lambda_3}$ and the skew-symmetric stress singularity of the form $1/r^{1-\lambda_2}$, $1/r^{1-\lambda_4}$. Then, the singular stress fields at the end of a cylindrical inclusion are discussed with varying the fiber length and elastic ratio. The results are compared with the ones of a cylindrical inclusion under longitudinal tension and the ones of a rectangular inclusion under transverse tension.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Fracture Mechanics, Generalized Stress Intensity Factor, Singular Integral Equation, Cylindrical Inclusions, Fundamental Density Functions, Weight Functions

1. 緒言

繊維強化複合材料では、繊維端部に生じる特異応力が原因となって、き裂の発生や進展が生じるため、その強度評価に際して特異応力の強さを知る必要がある。実際の繊維は3次元形状を有するので、強化繊維の3次元モデルとして円柱状介在物を有する無限体の引張り問題は重要な応力集中問題の一つである。今までに円柱状介在物を有する無限体の軸方向引張り問題といった軸対称問題の解析は剛体介在物について笠野ら⁽¹⁾、端部を丸めた円柱状介在物について長谷川ら⁽²⁾により解析が行われている。また、eigen ひずみによる円柱状介在物の応力、変位場がTakaoら⁽³⁾ Hasegawaら⁽⁴⁾ Wuら^{(5),(6)}によって考察されている。著者らもさきに体積力法の特異積分方程式を厳密に解析する方法を用いて3次元円柱状介在物の軸対称問題の解析を行い端部の特異応力場の強さを考察した⁽⁷⁾。しかし、実際の繊維は繊維の長手方向以外にも荷重を受ける場合があるので、そのような非軸対称一軸引張り問題も考察する必要がある。

そこで、本論文では、円柱状介在物を有する無限体の2つの問題(二軸引張り問題と純せん断問題)を体積

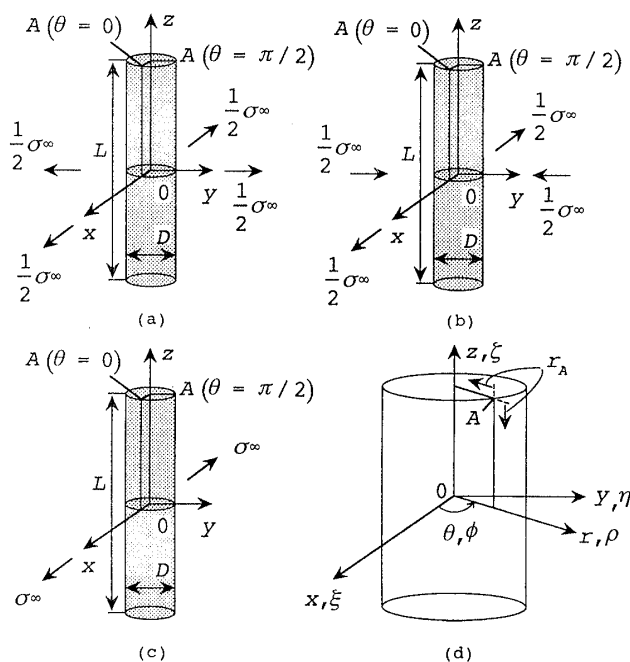


Fig.1 Problems and coordinate system;(a) Hydrostatic tension in a plane perpendicular to the axis of the inclusion(xy-plane);(b) Pure shear in a plane perpendicular to the axis of the inclusion(xy-plane);(c) Uniaxial tension perpendicular to the axis of the inclusion(x-direction);(d) Coordinate system.

* 原稿受付 1999年7月8日。

*¹ 正員,九州工業大学工学部 (☎ 804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。*² 学生員,九州工業大学大学院。*³ 九州工業大学大学院。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

力法の特異積分方程式を用いて繊維端部の特異応力場の強さを厳密に解析し、これらを重ね合わせるにより、非軸対称問題（一軸引張り問題）へと発展させる。そして、アスペクト比と母材の弾性率の比を系統的に変化させ、その特異応力場の強さを考察する。著者らが先に行った円柱状介在物の軸方向引張りの結果⁽⁷⁾は2次元横方向引張りの長方形モデルの結果とかなり似た傾向を示した。このため今回の非軸対称一軸引張りの結果を2次元長方形介在物の横方向引張りの結果と比較する。解析には、著者らがこれまでこの種の問題に高精度の結果を与えることを確認している体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いる^{(7)~(9)}。

2. 解析方法

図1に示すような、直径D、長さLの円柱状介在物を有する無限体が遠方でx方向の様な一軸引張り応力 σ^∞ を受けている非軸対称問題cを体積力法を用いて解析する。本問題は、図1に示されるように2つの問題A,Bの重ね合わせにより構成される。いま直角座標系を(x,y,z)とし、円筒座標系を(r,θ,z)として図1のように定義する[着力点に関する座標の記号は、(ξ,η,ζ)と(ρ,φ,ς)とする]。問題Aについては、軸対称問題であるので前論文の方法⁽⁷⁾により解析可能である。問題Bは、介在物のない無限体中の2つの円周上[ρ = ±D/2, ζ = ±L/2]に、

- (1) 大きさがcos2φで変化するr方向の集中力の輪、
 - (2) 大きさがsin2φで変化するθ方向の集中力の輪、
 - (3) 大きさがcos2φで変化するz方向の集中力の輪
- が作用するときの任意の点の応力場の解⁽¹⁰⁾と変位場の解⁽¹⁰⁾を用いて解くことができる。以下では、問題Bにおける介在物端部(r=D/2, z=L/2)近傍の境界条件の満たし方を中心に説明する。ここで母材と介在物のそれぞれの横弾性定数、ポアソン比をG_M, ν_MおよびG_I, ν_Iとする。

図2に示すような繊維端部近傍の境界条件を満足させるため、無限体の仮想境界上に分布させるべき体積力を二種類の形式の体積力分布の線形結合によって表現する。このような角部近傍の応力場は角部の2等分線に対して対称と逆対称の混合モードとなる。このような応力場を表現するため、仮想境界上に分布させる法線方向(n方向)と接線方向(t方向)と周方向(θ方向)の体積力に対し、端部角部の二等分線に対して、対称形(モードI, III)と逆対称形(モードII, III)の二種類の分布形式を用いる[図2(a)~(f)]。結局、問題は母材(G_M, ν_M)および介在物(G_I, ν_I)と同じ弾性定数をもつ無限体(これらを無限体M, 無限体Iとする)中の仮想境界上に分布させた面積ρdθdr_Aの微小要素に作用させた体積力密度を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される(例えば文献⁽¹¹⁾を参照)。

$$\begin{aligned}
 &-\frac{1}{2}F_{nM}(s) - \frac{1}{2}F_{nI}(s) + \int_L h_{nn}^{F_{nM}}(r_A, s)F_{nM}(r_A)dr_A + \int_L h_{nn}^{F_{nI}}(r_A, s)F_{nI}(r_A)dr_A + \int_L h_{nn}^{F_{tM}}(r_A, s)F_{tM}(r_A)dr_A - \int_L h_{nn}^{F_{tI}}(r_A, s)F_{tI}(r_A)dr_A \\
 &-\int_L h_{nn}^{F_{\theta I}}(r_A, s)F_{\theta I}(r_A)dr_A - \int_L h_{nn}^{F_{\theta I}}(r_A, s)F_{\theta I}(r_A)dr_A = -\{\sigma_{nM}^\infty(s) - \sigma_{nI}^\infty(s)\}\cos 2\theta \\
 &-\frac{1}{2}F_{tM}(s) - \frac{1}{2}F_{tI}(s) + \int_L h_{nt}^{F_{nM}}(r_A, s)F_{nM}(r_A)dr_A + \int_L h_{nt}^{F_{nI}}(r_A, s)F_{nI}(r_A)dr_A + \int_L h_{nt}^{F_{tM}}(r_A, s)F_{tM}(r_A)dr_A - \int_L h_{nt}^{F_{tI}}(r_A, s)F_{tI}(r_A)dr_A \\
 &-\int_L h_{nt}^{F_{\theta I}}(r_A, s)F_{\theta I}(r_A)dr_A - \int_L h_{nt}^{F_{\theta I}}(r_A, s)F_{\theta I}(r_A)dr_A = 0 \\
 &-\frac{1}{2}F_{\theta M}(s) - \frac{1}{2}F_{\theta I}(s) + \int_L h_{n\theta}^{F_{nM}}(r_A, s)F_{nM}(r_A)dr_A + \int_L h_{n\theta}^{F_{nI}}(r_A, s)F_{nI}(r_A)dr_A + \int_L h_{n\theta}^{F_{tM}}(r_A, s)F_{tM}(r_A)dr_A - \int_L h_{n\theta}^{F_{tI}}(r_A, s)F_{tI}(r_A)dr_A \\
 &-\int_L h_{n\theta}^{F_{\theta I}}(r_A, s)F_{\theta I}(r_A)dr_A - \int_L h_{n\theta}^{F_{\theta I}}(r_A, s)F_{\theta I}(r_A)dr_A = -\{\tau_{n\theta M}^\infty(s) - \tau_{n\theta I}^\infty(s)\}\sin 2\theta \quad \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

ここで、r_Aは介在物端部(r=D/2, z=L/2)から接合界面に沿って測った距離(半径方向および軸方向への)である。式(1)の各式は、仮想境界上における応力の境界条件(σ_{nM} - σ_{nI} = 0, τ_{ntM} - τ_{ntI} = 0, τ_{nθM} - τ_{nθI} = 0)に相当している。紙面の都合により変位の境界条件(u_M - u_I = 0, v_M - v_I = 0, w_M - w_I = 0)の表示は省略する。また右辺のσ_{nM}[∞](s), σ_{nI}[∞](s)等は無限体Mの円柱状空かおよび無限体Iの円柱状介在物となるべき仮想境界上に生じる遠方荷重による応力および変位である(母材と介在物の角点の位置を一致させるため無限体Iにも遠方荷重を作用させる^{(12), (13)})。また、h_{nn}^{F_{nM}}(r_A, s)等は無限体M(または無限体I)の円柱状空か(または円柱状介在物)の仮想境界上の点r_Aにn方向, t方向またはθ方向の単位大きさの集中力(対称形および逆対称形)が作用するとき、円柱状空か(または円柱状介在物)となる仮想境界上の任意の選点sに生じる応力および変位である。本研究では、未知関数であるF_{nM}(r_A) - F_{θI}(r_A)を基本密度関数r_A^{λ₁-1} - r_A^{λ₁-1}と重み関数W_{nM}^I - W_{θI}^{III, λ₁}で以下のように近似する。

$$\begin{aligned}
 F_{nI}(r_A) &= F_{nI}^{I, \lambda_1}(r_A) + F_{nI}^{II, \lambda_2}(r_A) = W_{nI}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{nI}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1}, & F_{tI}(r_A) &= F_{tI}^{I, \lambda_1}(r_A) + F_{tI}^{II, \lambda_2}(r_A) = W_{tI}^I(r_A)r_A^{\lambda_1-1} + W_{tI}^{II}(r_A)r_A^{\lambda_2-1} \\
 F_{\theta I}(r_A) &= F_{\theta I}^{III, \lambda_3}(r_A) + F_{\theta I}^{III, \lambda_4}(r_A) = W_{\theta I}^{III, \lambda_3}(r_A)r_A^{\lambda_3-1} + W_{\theta I}^{III, \lambda_4}(r_A)r_A^{\lambda_4-1} & (i = M, I) & \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

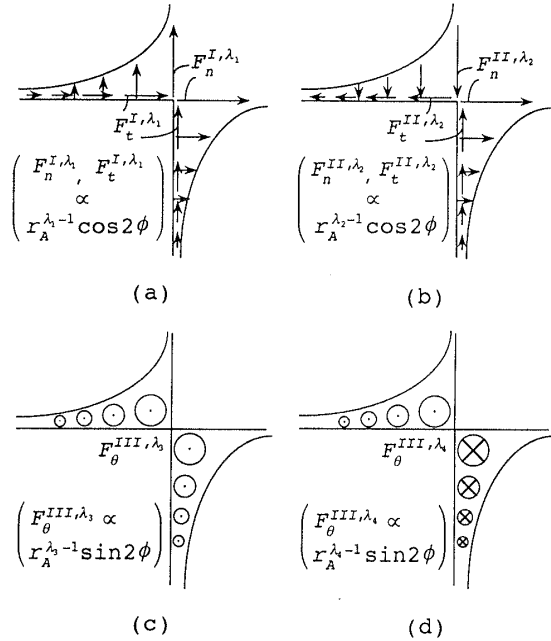


Fig.2 Body force distributed around the corner ;(a)Symmetric body force distributed in the n- and t-directions(mode I);(b)Skew symmetric body force distributed in the n- and t-directions (mode II);(c)Symmetric body force distributed in the θ -direction(mode III);(d)Skew symmetric body force distributed in the θ -direction(mode III)(r_A : distance from the corner)

$$\begin{aligned}
 W_{nj}^I(r_A) &= \sum_{n=1}^j a_n r_A^{n-1}, W_{tj}^I(r_A) = \sum_{n=1}^j b_n r_A^{n-1}, \\
 W_{\theta j}^{III,\lambda_3}(r_A) &= \sum_{n=1}^j c_n r_A^{n-1}, W_{\theta j}^{II}(r_A) = \sum_{n=1}^j d_n r_A^{n-1}, \\
 W_{tj}^{II}(r_A) &= \sum_{n=1}^j e_n r_A^{n-1}, W_{\theta j}^{III,\lambda_4}(r_A) = \sum_{n=1}^j f_n r_A^{n-1} \\
 (j = M, I) & \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

ここで $r_A^{\lambda_1-1}, r_A^{\lambda_2-1}, r_A^{\lambda_3-1}, r_A^{\lambda_4-1}$ は円柱状介在物における端部Aでの特異応力場を表現するための基本密度関数であり λ_1, λ_2 は面内変形⁽¹⁴⁾, λ_3, λ_4 は面外変形⁽¹⁵⁾に対して介在物角部の幾何条件と材料条件より得られる特性方程式の根である (λ_1, λ_2 は文献⁽¹⁴⁾の式(12), (13)で, λ_3, λ_4 は文献⁽¹⁵⁾の式(11), (12)で与えられる)。また, 添字 I, II は, 端部角部の二等分線に対して対称形および逆対称形の体積力を作用させることを意味する。式(2)に含まれる基本密度関数 $r_A^{\lambda_1-1}, r_A^{\lambda_2-1}, r_A^{\lambda_3-1}, r_A^{\lambda_4-1}$ は体積力密度の分布を精度良く表現するため角部近傍についてのみ用いる。本解析では円柱状介在物の形状比 L/D が大きい場合まで含めて解析するため本解析では円柱状介在物となる境界の端部と側面をいくつかの基本区間に分けて, 各基本区間について体積力密度を式(2), (3)のような級数で表現する⁽⁸⁾。角部近傍以外の境界条件を満足させる方法も, 上述した方法とほぼ同様であるが, 体積力の分布を対称形と

逆対称形の2種類に分ける必要のない点が異なる。以上のような離散化手法により, 境界上に適当に選んだ点での境界条件より式(3)の係数 $a_n - f_n$ 等を決定すれば, 特異積分方程式(1)等の解が得られる。

そして, 介在物の端部に関して定義された応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}, K_{III,\lambda_3}, K_{III,\lambda_4}$ は端部先端での重み関数の $W_n^I(0), W_t^I(0), W_n^{II}(0), W_t^{II}(0), W_\theta^{III,\lambda_3}(0), W_\theta^{III,\lambda_4}(0)$ から求められる。

3. 解析結果および考察

以下で, ポアソン比 $\nu_I = \nu_M = 0.3$ として計算した。図3に, $L/D = 10^2$ の場合の境界を分割した各基本区間の例を示す。図1(c)に示す無限体中の円柱状介在物を有する問題において, 寸法比 L/D , 介在物の剛性率 G_I/G_M を系統的に変えて繊維端 $A(\theta = 0, \pi/2)$ の応力拡大係数 $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$ の解析を行った。分割した各基本区間のおいてまず, 本法の解析精度について検討を行う。繊維端の応力拡大係数は, K_{I,λ_1} については $W_{nm}^I(0), W_{tm}^I(0)$ より, K_{II,λ_2} については $W_{nm}^{II}(0), W_{tm}^{II}(0)$ からそれぞれ求められる。n方向とt方向の重みより求められる $K_{I,\lambda_1}, K_{II,\lambda_2}$ の値は, 数値解析の誤差を除けばそれぞれ一致する。例として図1(b)の端部 $A(\theta = 0)$ での $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$, 端部 $A(\theta = \pi/4)$ での $F_{III,\lambda_3}, F_{III,\lambda_4}$ の収束状況を $L/D = 10, G_I/G_M = 10^2$ と $L/D = 10, G_I/G_M = 10^{-5}$ について, それぞれ表1,2に示す。ここで,

$$\begin{aligned}
 F_{I,\lambda_1} &= K_{I,\lambda_1} / \sigma^\infty \sqrt{\pi(D/2)^{1-\lambda_1}} \\
 F_{II,\lambda_2} &= K_{II,\lambda_2} / \sigma^\infty \sqrt{\pi(D/2)^{1-\lambda_2}} \\
 F_{III,\lambda_3} &= K_{III,\lambda_3} / \sigma^\infty \sqrt{\pi(D/2)^{1-\lambda_3}} \\
 F_{III,\lambda_4} &= K_{III,\lambda_4} / \sigma^\infty \sqrt{\pi(D/2)^{1-\lambda_4}} \dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

表1, 2の例では M は基本区間あたりの選点数であり, 総選点数は $7M$ である。表1,2などの検討から以下のことがわかる。

- (1) $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ については, $W_{nm}^I(0), W_{tm}^I(0)$ 等から求めた値の平均値は, いづれの場合も $M = 5,6$ 程度で有効数字3桁以上一致しており良好な収束性を示す。
- (2) $G_I/G_M > 1$ の時の F_{I,λ_1} については $W_{nm}^I(0), W_{tm}^I(0)$ から求めた値とその平均値の違いはやや大きく数%程度である。
- (3) $F_{III,\lambda_3}, F_{III,\lambda_4}$ の絶対値は $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ に比べて小さく数%程度である(以下の議論では省略する)。

以下では, このような検討によって得られた円柱状介在物端部の応力拡大係数を, 介在物の剛性率と長さを系統的に変化させて正確に計算した。

表3に円柱状介在物の横方向一軸引張りでの端部 $A(\theta = 0)$ での $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ の値を示す。また, 表4に端部

$A(\theta = \pi/2)$ での $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ の値を示す. 図4, 図5は表3, 表4の値をグラフで表わしたものである. 図6に著者らが先に行った円柱状介在物(3次元)と長方形介在物(2次元)の長手方向引張りの結果^{(7),(8)}を比較して示す. 図6では円柱モデルと長方形モデルはよく似た傾向を示している. そこで今回の結果と比較のため長方形介在物⁽⁸⁾の横方向(x方向)引張りについて追加計算を行った結果を図7に示す.

図4,5に示されるように, 円柱状介在物をx軸方向から引張ると, ほとんどの場合 $\theta = 0$ の端部でモードI, II応力拡大係数は最大となる. 円柱状介在物の縦引張と横引張の結果(図4と図6)を比較すると, モードI応力拡大係数は縦引張が横引張より1~4倍大きい, モードII応力拡大係数の絶対値は同程度となる場合が多い. また, 例えば, $G_I/G_N = 10^2$ のとき縦引張と横引張ともに $L/D = 100$ 程度で収束しており, 縦横比 L/D の増加に対

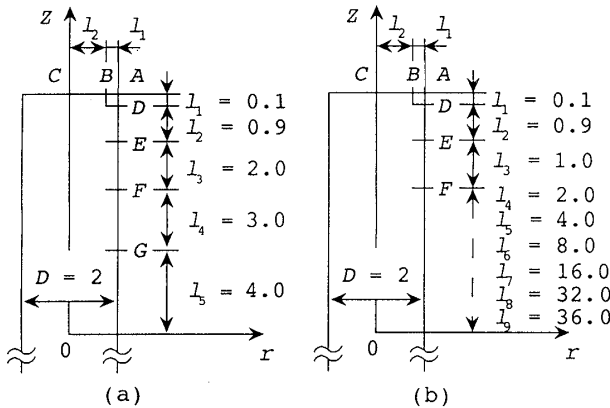


Fig.3 Boundary division for eqn(3), (4), (a)when $L/D=10$ and (b)when $L/D=10^2$

して, 同程度の L/D で収束する傾向がみられる.

介在物の長手方向の引張り(図6)では3次元と2次元の値は比較的良く一致しておりその誤差は多くの場合で $\pm 30\%$ 以内である. 一方, 横方向引張りの場合では, 3次元と2次元の結果(図4と図7)は大きく異なる. つまり, 横方向荷重に関しては, 2次元モデルを用いて3次元形状を有する繊維の界面強度を定量的に議論することは難しいようである.

Table 1 Convergence of $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}, F_{III,\lambda_3}$
($\nu_N = \nu_I = 0.3, L/D = 10, G_I/G_N = 10^2,$
 $\lambda_1 = 0.76323491, \lambda_2 = 0.62184397, \lambda_3 = 0.67392123$)

M	F_{I,λ_1}			F_{II,λ_2}			F_{III,λ_3}
	from $W_{NM}^I(0)$	from $W_{CM}^I(0)$	Average	from $W_{NM}^{II}(0)$	from $W_{CM}^{II}(0)$	Average	from $W_{CM}^{III}(0)$
2	0.290	0.417	0.354	-0.723	-0.763	-0.743	0.070
3	0.321	0.396	0.359	-0.792	-0.795	-0.794	0.027
4	0.333	0.388	0.361	-0.790	-0.789	-0.789	0.019
5	0.338	0.383	0.360	-0.788	-0.788	-0.788	0.014
6	0.340	0.379	0.360	-0.789	-0.788	-0.789	0.011

Table 2 Convergence of $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}, F_{III,\lambda_3}$
($\nu_N = \nu_I = 0.3, L/D = 10, G_I/G_N = 10^{-5},$
 $\lambda_1 = 0.54448375, \lambda_2 = 0.90852919, \lambda_3 = 0.66667402$)

M	F_{I,λ_1}			F_{II,λ_2}			F_{III,λ_3}
	from $W_{NM}^I(0)$	from $W_{CM}^I(0)$	Average	from $W_{NM}^{II}(0)$	from $W_{CM}^{II}(0)$	Average	from $W_{CM}^{III}(0)$
2	0.191	0.221	0.206	1.260	0.989	1.125	0.044
3	0.212	0.227	0.220	1.123	1.024	1.074	0.021
4	0.214	0.223	0.219	1.058	1.051	1.055	0.014
5	0.215	0.222	0.219	1.060	1.048	1.054	0.010
6	0.216	0.221	0.219	1.056	1.047	1.052	0.008

Table 3 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for cylindrical inclusion at the corner A when $\theta = 0$

L/D	G_I/G_N	F_{I,λ_1}					
		10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	2	10^1	10^2
$10^{0.0} = 1.0$		0.300	0.288	0.223	0.205	0.263	0.294
$10^{0.5} = 3.162$		0.302	0.289	0.223	0.193	0.206	0.190
$10^{1.0} = 10.0$		0.312	0.299	0.230	0.189	0.165	0.383
$10^{1.5} = 31.62$		0.313	0.300	0.231	0.188	0.165	0.572
$10^{2.0} = 100.0$		0.313	0.300	0.231	0.188	0.166	0.614
$10^{2.5} = 316.2$		0.314	0.300	0.231	0.188	0.164	0.615
$10^{3.0} = 1000$		0.314	0.300	0.231	0.188	0.164	0.616

L/D	G_I/G_N	F_{II,λ_2}					
		10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	2	10^1	10^2
$10^{0.0} = 1.0$		1.403	1.428	1.673	3.279	0.724	0.624
$10^{0.5} = 3.162$		1.317	1.342	1.587	3.388	0.833	0.804
$10^{1.0} = 10.0$		1.279	1.305	1.549	3.435	0.898	1.062
$10^{1.5} = 31.62$		1.274	1.299	1.544	3.441	0.917	1.314
$10^{2.0} = 100.0$		1.274	1.299	1.544	3.442	0.918	1.371
$10^{2.5} = 316.2$		1.274	1.298	1.544	3.443	0.918	1.373
$10^{3.0} = 1000$		1.274	1.298	1.544	3.443	0.918	1.373

Table 4 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for cylindrical inclusion at the corner A when $\theta = \pi/2$

L/D	G_I/G_N	F_{I,λ_1}					
		10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	2	10^1	10^2
$10^{0.0} = 1.0$		0.067	0.062	0.033	-0.019	-0.068	-0.091
$10^{0.5} = 3.162$		0.083	0.076	0.041	-0.022	-0.103	-0.168
$10^{1.0} = 10.0$		0.094	0.086	0.045	-0.027	-0.146	0.023
$10^{1.5} = 31.62$		0.095	0.087	0.046	-0.027	-0.145	0.212
$10^{2.0} = 100.0$		0.095	0.087	0.046	-0.027	-0.145	0.254
$10^{2.5} = 316.2$		0.096	0.087	0.046	-0.027	-0.146	0.255
$10^{3.0} = 1000$		0.096	0.087	0.046	-0.027	-0.146	0.256

L/D	G_I/G_N	F_{II,λ_2}					
		10^{-5}	10^{-2}	10^{-1}	2	10^1	10^2
$10^{0.0} = 1.0$		0.161	0.162	0.164	-0.167	-0.080	-0.069
$10^{0.5} = 3.162$		0.241	0.242	0.246	-0.217	-0.060	0.018
$10^{1.0} = 10.0$		0.227	0.229	0.232	-0.188	0.000	0.273
$10^{1.5} = 31.62$		0.222	0.223	0.227	-0.181	0.019	0.525
$10^{2.0} = 100.0$		0.222	0.223	0.227	-0.180	0.020	0.582
$10^{2.5} = 316.2$		0.222	0.222	0.227	-0.179	0.020	0.584
$10^{3.0} = 1000$		0.222	0.222	0.227	-0.179	0.020	0.584

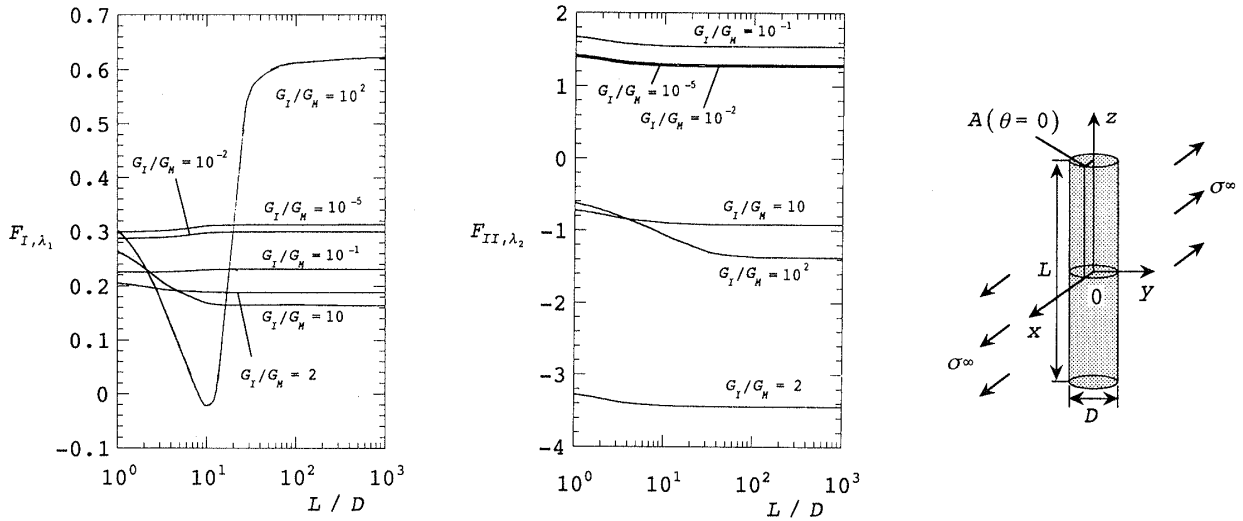


Fig. 4 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for cylindrical inclusion at the corner A when $\theta = 0$, $\nu_H = \nu_I = 0.3$

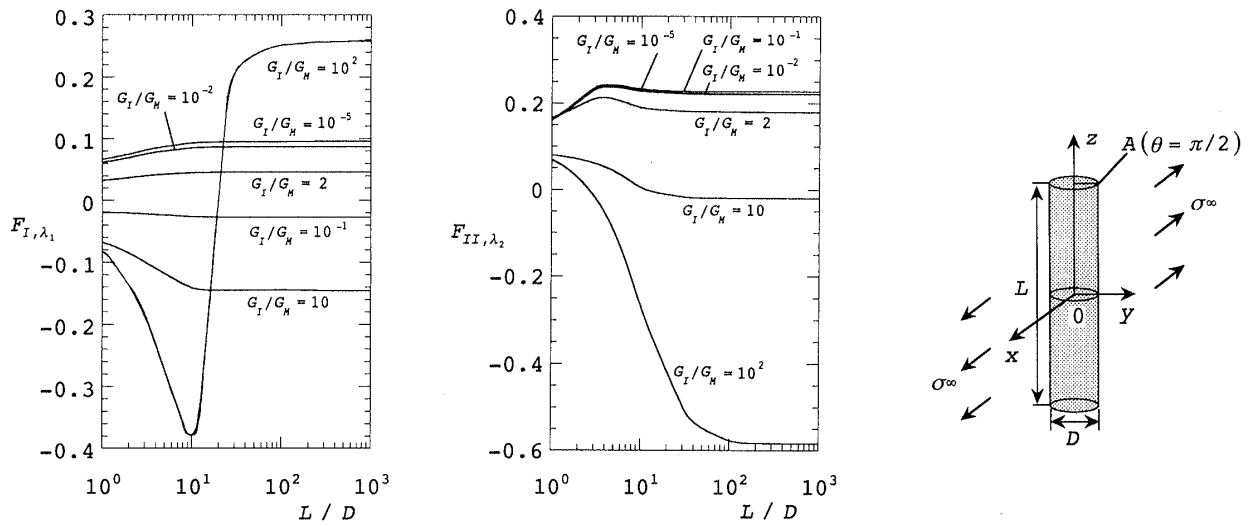


Fig. 5 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for cylindrical inclusion at the corner A when $\theta = \pi/2$, $\nu_H = \nu_I = 0.3$

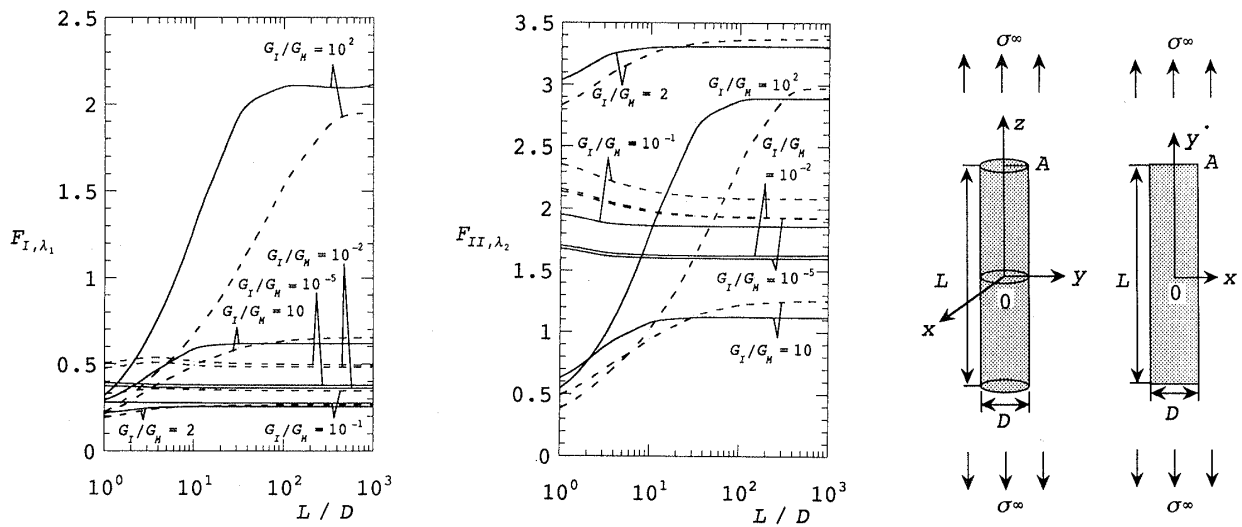


Fig. 6 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for cylindrical inclusion at the corner A when $\nu_H = \nu_I = 0.3$
(Solid line : 3D inclusion, Broken line : 2D inclusion)

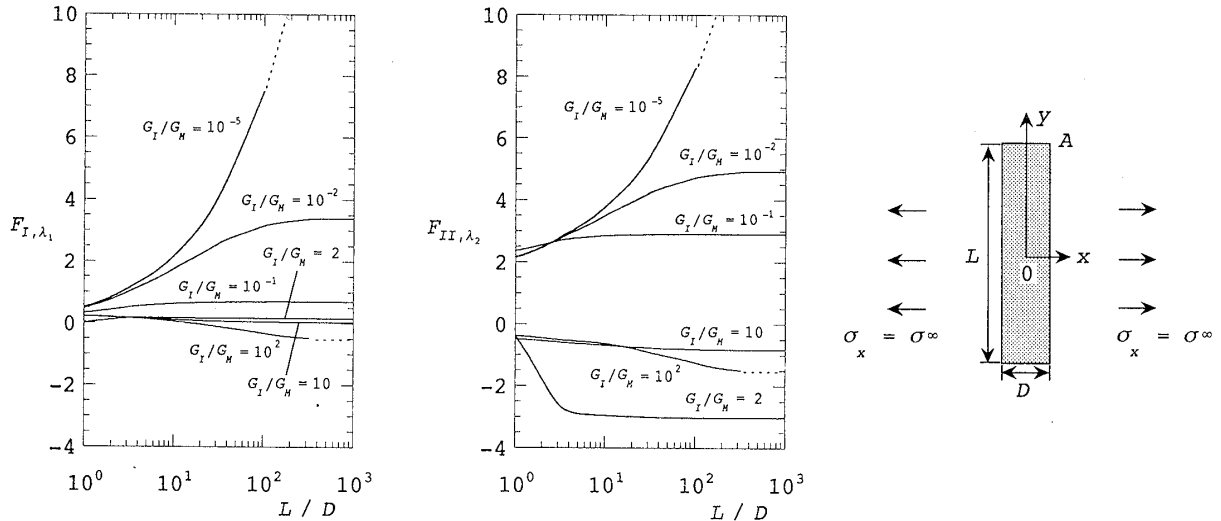


Fig.7 F_{I,λ_1} and F_{II,λ_2} for rectangular inclusion at the corner A, the case of plane strain, $\nu_M = \nu_I = 0.3$

4. 結 言

本研究では体積力法の特異積分方程式を利用して無限体中に存在する円柱状介在物の応力拡大係数 $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}, F_{III,\lambda_3}, F_{III,\lambda_4}$ を、介在物の剛性比と距離を系統的に変化させ厳密に解析した。得られた結果を図表にまとめたほか以下のような結論が得られた。

(1) 特異積分方程式の数値解析には、未知関数である体積力密度を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法を用いた。その結果、介在物のアスペクト比、剛性比が変化しても異なる重み関数から得られる値の平均値は、各基本区間の選点数 $M=6$ 程度で有効数字 3 桁程度収束しており、解法の有効性が確認された。

(2) 円柱状介在物の縦引張と横引張の結果 (図 4 と図 6) を比較すると、モード I 応力拡大係数は縦引張が横引張より 1~4 倍大きい、モード II 応力拡大係数は同程度となる場合が多い。また、縦引張と横引張ともに、縦横比 L/D の増加に対して、同程度の L/D で収束する傾向がみられる。

(3) 円柱状介在物と長方形介在物の結果を比較すると、長手方向の引張り (図 6) では 3 次元と 2 次元の値は比較的良く一致しておりその誤差は多くの場合で $\pm 30\%$ 以内であるのに対して、横方向引張りの場合 (図 4 と図 7) では大きく異なる。従って 2 次元モデルの適用には注意が必要である。

(4) 円柱状介在物の純粋せん断問題 (図 1(b)) で、無次元化モード III 応力拡大係数 $F_{III,\lambda_3}, F_{III,\lambda_4}$ の絶対値は $F_{I,\lambda_1}, F_{II,\lambda_2}$ に比べて小さく、数%程度である。

本研究の一部は王 清氏 (学振外国人特別研究員) と諸富貴光氏 (九州工業大学大学院) の助力を得た。心からお礼申し上げます。

文 献

- (1) 笠野英秋・松本浩之・中原一郎, 有限円柱状剛体介在物を含む無限体の引張り, 機論, 47-413, A(1981), 18-26.
- (2) 長谷川久夫・吉家幸一, 円柱状弾性介在物を有する弾性体の引張り, 機論, 60-575, A(1994), 1585-1590.
- (3) Takao, Y., Taya M. and Chou, T. W., Stress Field Due to a Cylindrical Inclusion With Constant Axial Eigenstrain in an Infinite Elastic Body, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **48**(1981), 853-858.
- (4) Hasegawa, H., Lee, V.-G. and Mura, T., The Stress Fields Caused by a Circular Cylindrical Inclusion, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **59**(1992), 107-114.
- (5) Wu, L., Du, S., The Elastic Field Caused by a Circular Cylindrical Inclusion Part I, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **62**(1995), 579-584.
- (6) Wu, L., Du, S., The Elastic Field Caused by a Circular Cylindrical Inclusion Part II, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **62**(1995), 585-589.
- (7) 野田尚昭・王 清・諸富貴光, 円柱状介在物端部の特異応力場の強さ解析, 機論, 63-612, A(1997), 1701-1706.
- (8) 野田尚昭・王 清・上村仁誉・川島祐二, 特異積分方程式による長方形介在物の干渉効果の解析, 機論, 63-612, A(1997), 1663-1668.
- (9) 野田尚昭・泊 賢治・松尾忠利, 回転円柱状介在物の非軸対称一軸引張りにおける干渉効果, 機論, 64-622, A(1998), 1577-1582.
- (10) 野田尚昭・泊 賢治, 軸対称体の非軸対称一軸引張りにおける応力解析の基本解とその応用, 九州工業大学研究報告 (工学), (1997), 7-12.
- (11) Noda, N.-A., Matsuo, T., Singular Integral Equation Method for Interaction Between Elliptical Inclusions, *Trans. ASME J. Appl. Mech.*, **65**(1998), 310-319.
- (12) 西谷弘信・陳 玳珩・柴戸 明, 面外せん断による菱形介在物角部の特異応力場, 機論, 59-561, A(1993), 1191-1195.
- (13) 陳 玳珩・西谷弘信, 短繊維端における特異応力場の強さ解析 (第 1 報, 解析方法), 機論, 58-554, A(1992), 1834-1838.
- (14) 陳 玳珩・西谷弘信, 接合異材の角部近傍での応力場, 機論, 57-534, A(1991), 366-372.
- (15) 陳 玳珩・西谷弘信, 面外せん断を受ける接合異材角部の特異応力場, 機論, 57-542, A(1991), 2499-2503.