

回転だ円体状介在物を有する半無限体の二軸一様引張り*

野田 尚昭*¹, 森山 泰嘉*²Stress Concentration of an Ellipsoidal Inclusion of Revolution
in a Semi-Infinite Body under Biaxial TensionNao-Aki NODA*³ and Yasuhiro MORIYAMA*³ Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

This paper deals with a stress concentration problem of an ellipsoidal inclusion of revolution in a semi-infinite body under biaxial tension. The problem is formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type or logarithmic-type singularities, where unknowns are densities of body forces distributed in the r - and z -directions in semi-infinite bodies having the same elastic constants of the matrix and inclusion. In order to satisfy the boundary conditions along the ellipsoidal boundary, four fundamental density functions proposed in the previous paper are used. Then the body force densities are approximated by a linear combination of fundamental density functions and polynomials. The present method is found to yield rapidly converging numerical results for stress distribution along the boundaries of both the matrix and inclusion even when the inclusion is very close to the free boundary. Then, the effect of free surface on the stress concentration factor is discussed with varying the distance from the surface, shape ratio, and elastic ratio. Also the present results are compared with the ones of an ellipsoidal cavity in a semi-infinite body.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Body Force Method, Ellipsoidal Inclusion, Singular Integral Equation, Numerical Analysis, Semi-Infinite Body, Biaxial Tension

1. 緒 言

多くの機械構造材料中には、き裂、空か、介在物などの欠陥が存在するため、その強度評価のためには、これらの欠陥によって生じる応力集中を把握することが必要である。だ円形介在物やだ円体状介在物の問題はその特別な場合にき裂や空かも含んでおり、欠陥としての一般的な性質をある程度有しているため重要な応力集中問題の一つである。回転だ円体状空かを有する半無限体の二軸引張り問題については、土田ら⁽¹⁾⁽²⁾により解析されているが、半無限体中の回転だ円体状介在物の問題はこれまで解析されていないようである。

そこで本研究は、体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法⁽³⁾を用いて、半無限体中の回転だ円体状介在物の二軸引張りにおける応力集中問題(図1)について精度よく解析して考察する。そして剛性比 $E_I/E_M = 0$ の空かの場合の最大応力を求め、本解析結果と土田らの解析結果を比較し考察する。母材と介在物の弾性比および半無限体表面からの距離を系統的に変化させて最大応力や境界上の応力分布を求め、半無限体中の介在物の剛性比、形状比、距離の変化が応力に及ぼす影響を検討する。本方法では母材と介在物

の境界上の任意の点の応力を正確に求めることが可能である。

2. 解析方法

図1に示すような、主軸長 $2a$, $2b$ の回転だ円体状介在物を有する半無限体が遠方で一様な r 方向の引張応力 σ_r を受けている問題を体積力法を用いて解析する。

この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、半無限体中の半径 ρ 、高さ ζ の円周上に半径方向および軸方向の集中力の輪が作用するときの任意の点 (r, z) の応力場の解 $(K_{nn}^{Fr}, K_{nn}^{Fz}, K_{nt}^{Fr}, K_{nt}^{Fz})$ と変位場の解

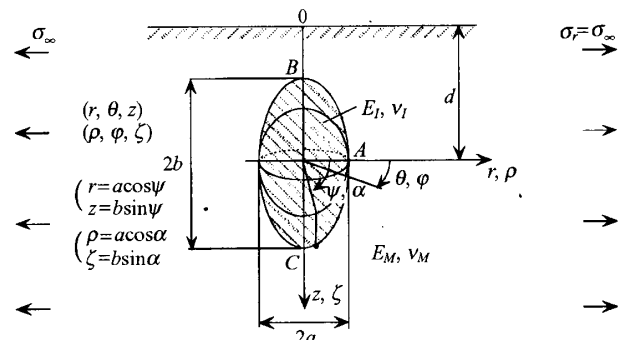


Fig.1 An ellipsoidal inclusion in a semi-infinite body under biaxial tension.

* 原稿受付 2002年2月21日。

*¹ 正員, 九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。*² 九州工業大学大学院工学研究科。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

$(K_{\nu}^{Fr}, K_{\nu}^{Fz}, K_{\nu}^{Fr}, K_{\nu}^{Fz})$ を用いて解くことができる。ここで、着力点の円柱座標系を (ρ, α, ζ) として、注目点の円柱座標系を (r, θ, z) と区別して用いるものとすれば、 $\rho = a \cos \alpha$, $\zeta = d + b \sin \alpha$, $r = a \cos \psi$, $z = d + b \sin \psi$ である。このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_I, ν_I) と同じ弾性定数を持つ半無限体(これらを半無限体M, 半無限体Iとする)中の仮想境界上に分布させた面積 $\rho d\phi ds$ の微小面素に作用させた体積力密度 $\rho_{rM}^*(\alpha)$, $\rho_{zM}^*(\alpha)$, $\rho_{rI}^*(\alpha)$, $\rho_{zI}^*(\alpha)$ を未知関数とする特異積分方程式(1)~(2)で表現される。

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\{\rho_{rM}^*(\psi)\cos\psi_0 + \rho_{zM}^*(\psi)\sin\psi_0\} - \frac{1}{2}\{\rho_{rI}^*(\psi)\cos\psi_0 + \rho_{zI}^*(\psi)\sin\psi_0\} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rM}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zM}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rI}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zI}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds = -(\sigma_z^\infty \sin^2\psi_0 + \sigma_r^\infty \cos^2\psi_0) \\
 & -\frac{1}{2}\{-\rho_{rM}^*(\psi)\sin\psi_0 + \rho_{zM}^*(\psi)\cos\psi_0\} - \frac{1}{2}\{-\rho_{rI}^*(\psi)\sin\psi_0 + \rho_{zI}^*(\psi)\cos\psi_0\} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rM}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zM}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds \\
 & - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rI}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zI}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds = -(\sigma_z^\infty - \sigma_r^\infty)\sin\psi_0 \cos\psi_0 \dots \dots \dots (1) \\
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rM}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zM}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rI}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zI}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = -\{\sigma_r^\infty - \nu_M(\sigma_\theta^\infty + \sigma_z^\infty)\}r/E_M \\
 & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rM}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rM}^*(\alpha)ds + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zM}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zM}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{rI}^{Fr}(\alpha, \psi)\rho_{rI}^*(\alpha)ds - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{zI}^{Fz}(\alpha, \psi)\rho_{zI}^*(\alpha)ds \\
 & = -\{\sigma_z^\infty - \nu_M(\sigma_r^\infty + \sigma_\theta^\infty)\}z/E_M \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -d\rho = a \sin \alpha d\alpha, \quad d\zeta = b \cos \alpha d\alpha, \quad ds = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \dots \dots \dots (3)$$

である。また、 ψ_0 は点 (r, z) における介在物の外向き法線と r 軸となす角である。
 半無限体M中の回転だ円体状空かとなるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nM}, \tau_{nM}, u_{rM}, u_{zM}$ 、半無限体I中の回転だ円体状介在物となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nI}, \tau_{nI}, u_{rI}, u_{zI}$ とすると、式(1), (2)は母材と介在物の接合境界上における境界条件 $\sigma_M - \sigma_I = 0, \tau_{nM} - \tau_{nI} = 0, u_{rM} - u_{rI} = 0, u_{zM} - u_{zI} = 0$ に相当している。式(1)の第1項と第2項は、体積力を無限小近傍からなる境界上に作用させたとき境界条件を満たすべき仮想境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{rM}^{Fr}(\alpha, \psi)$ を例にとると、これは半無限体Mの仮想境界上の1円周上に r 方向に集中力の輪が作用するとき境界上の点に生じる法線方向の垂直応力 σ_{nM} を意味している。これらはMindlinの解⁽⁶⁾を θ 方向に積分することによって得られる。 $K_{rM}^{Fr}(\alpha, \psi)$ などは式(4)~(18)で示される集中力の輪による応力場、変位場の式に母材の弾性定数や着力点、注目点の座標を代入したものと表される。

$$K_{rM}^{Fr} = \sigma_{rM}^{Fr} = \sigma^{Fr} \cos^2 \psi + \sigma^{Fz} \sin^2 \psi + 2\tau_{rz}^{Fr} \cos \psi \sin \psi, \quad K_{zM}^{Fz} = \sigma_{zM}^{Fz} = \sigma^{Fr} \cos^2 \psi + \sigma^{Fz} \sin^2 \psi + 2\tau_{rz}^{Fz} \cos \psi \sin \psi \dots \dots \dots (4)$$

$$K_{rI}^{Fr} = \tau_{rI}^{Fr} = (\sigma^{Fr} - \sigma^{Fz}) \cos \psi \sin \psi + 2\tau_{rz}^{Fr} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi), \quad K_{zI}^{Fz} = \tau_{zI}^{Fz} = (\sigma^{Fr} - \sigma^{Fz}) \cos \psi \sin \psi + 2\tau_{rz}^{Fz} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \dots \dots \dots (5)$$

$$\begin{aligned}
 K_{\nu}^{Fr} = U_{\nu}^{Fr} = & A[r_m^2(3-4\nu)J_{1,1} - \{r\rho I_{3,0} - (r^2 + \rho^2)I_{3,1} + r\rho I_{3,2}\} + r_m^2 J_{1,1} - (3-4\nu)\{r\rho J_{3,0} - (r^2 + \rho^2)J_{3,1} + r\rho J_{3,2}\} + 2z\zeta J_{3,1} \\
 & - 6z\zeta / r_m^2 \{r\rho J_{3,0} - (r^2 + \rho^2)J_{3,1} + r\rho J_{3,2}\}] + A \int_0^\pi \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2 + z + \zeta} \left[\cos \varphi - \frac{(r \cos \varphi - \rho)(r - \rho \cos \varphi)}{R_2(R_2 + z + \zeta)} \right] d\varphi \dots \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\nu}^{Fz} = U_{\nu}^{Fz} = & A[-(z-\zeta)(\rho I_{3,0} - rI_{3,1}) - (3-4\nu)(z-\zeta)(rJ_{3,0} - rJ_{3,1}) + 6z\zeta(z+\zeta)/r_m^2(\rho J_{3,0} - rJ_{3,1})] \\
 & - A \int_0^\pi \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)(\rho - r \cos \varphi)}{R_2(R_2 + z + \zeta)} d\varphi \dots \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\nu}^{\theta} = U_{\nu}^{\theta} = & A[(z-\zeta)(rI_{3,0} - \rho I_{3,1}) + (3-4\nu)(z-\zeta)(rJ_{3,0} - \rho J_{3,1}) + 6z\zeta / r_m^2(z+\zeta)(rJ_{3,0} - \rho J_{3,1})] \\
 & - A \int_0^\pi \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2 + z + \zeta)} (r - \rho \cos \varphi) d\varphi \dots \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K_{\nu}^{\xi} = U_{\nu}^{\xi} = & A[r_m^2(3-4\nu)J_{1,0} + (z-\zeta)^2 I_{3,0} + r_m^2 \{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)\}J_{1,0} - (3-4\nu)\{(3-4\nu)(z+\zeta)^2 - 2z\zeta\}J_{3,0} \\
 & + 6z\zeta / r_m^2(z+\zeta)^2 J_{3,0}] \dots \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rM}^{Fr} = & B[-(1-2\nu)(\rho I_{3,0} + rI_{3,1} - 2\rho I_{3,2}) + 3 / r_m^2 \{r^2 \rho I_{3,0} - r(r^2 + 2\rho^2)J_{3,1} + \rho(2r^2 + \rho^2)I_{3,2} - r\rho^2 I_{3,3}\} \\
 & - (1-2\nu)\{(3-4\nu)\rho J_{3,0} - (5-4\nu)rJ_{3,1} + 2\rho J_{3,2}\} + 3(3-4\nu) / r_m^2 \{r\rho^2 J_{3,0} - r(r^2 + 2\rho^2)J_{3,1} + \rho(2r^2 + \rho^2)J_{3,2} - r\rho^2 J_{3,3}\} \\
 & + 6\zeta / r_m^2 \{1 - 2\nu\}(z+\zeta) - \zeta\}(\rho J_{3,0} - rJ_{3,1}) - 12z\zeta / r_m^2 (rJ_{3,1} - \rho J_{3,2}) - 30 / r_m^4 \{r^2 \rho J_{7,0} - r(r^2 + 2\rho^2)J_{7,1} + \rho(2r^2 + \rho^2)J_{7,2} \\
 & - r\rho^2 J_{7,3}\} + B \int_0^\pi \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2 + z + \zeta)^2} \left[2\rho - 3r \cos \varphi + \rho \cos^2 \varphi + \frac{(3R_2 + z + \zeta)(r - \rho \cos \varphi)^2 (r \cos \varphi - \rho)}{R_2^2(R_2 + z + \zeta)} \right] d\varphi \dots \dots \dots (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{zM}^{Fz} = & B[-(1-2\nu)(\rho I_{3,0} - rI_{3,1}) + 3 / r_m^2 \{(z-\zeta)^2(\rho I_{3,0} - rI_{3,1})\} + (1-2\nu)(\rho J_{3,0} - rJ_{3,1}) + 3 / r_m^2 \{(3-4\nu)(z+\zeta)^2(\rho J_{3,0} - rJ_{3,1})\} \\
 & - 6\zeta / r_m^2 \{\zeta + 1 - 2\nu\}(z+\zeta)\}(\rho J_{3,0} - rJ_{3,1}) - 30z\zeta / r_m^2 (z+\zeta)^2(\rho J_{7,0} - rJ_{7,1})] \dots \dots \dots (11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{\beta} = & B[(1-2\nu)(\rho I_{3,0} + rI_{3,1} - 2\rho I_{3,2}) + 3/r_m^2(\rho I_{5,0} - rI_{5,1} - \rho I_{5,2} + rI_{5,3}) - (1-2\nu)\{(5-4\nu)\rho J_{3,0} - (3-4\nu)rJ_{3,1} - 2\rho J_{3,2}\} \\ & + 3(3-4\nu)\rho^2/r_m^2(\rho J_{5,0} - rJ_{5,1} - \rho J_{5,2} + rJ_{5,3}) + 6z\zeta/r_m^2(3\rho J_{5,0} - rJ_{5,1} - 2\rho J_{5,2}) - 12\nu\zeta(z+\zeta)/r_m^2(\rho J_{5,0} - rJ_{5,1}) \\ & - 30\rho^2z\zeta/r_m^4(\rho J_{7,0} - rJ_{7,1} - \rho J_{7,2} + rJ_{7,3})] \\ & + B \int_0^{\pi} \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+\zeta)^2} \left[3\rho + r\cos\varphi + 2\rho\cos^2\varphi + \frac{(3R_2+z+\zeta)\rho^2(r\cos\varphi-\rho)(1-\cos^2\varphi)}{R_2^2(R_2+z+\zeta)} \right] d\varphi \quad \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta}^{\beta} = & B[-(1-2\nu)(z-\zeta)I_{3,1} + 3(z-\zeta)/r_m^2\{r\rho I_{5,0} - (r^2+\rho^2)I_{5,1} + r\rho I_{5,2}\} + (1-2\nu)(z-\zeta)J_{3,1} \\ & + 3(3-4\nu)(z+\zeta)/r_m^2\{r\rho J_{5,0} - (r^2+\rho^2)J_{5,1} + r\rho J_{5,2}\} - 6\zeta(1-2\nu)/r_m^2\{r\rho J_{5,0} - (r^2+\rho^2)J_{5,1} + r\rho J_{5,2}\} - 6z\zeta/r_m^2(z+\zeta)J_{5,1} \\ & - 30z\zeta/r_m^2(z+\zeta)\{r\rho J_{7,0} - (r^2+\rho^2)J_{7,1} + r\rho J_{7,2}\}] \quad \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{z}^{\beta} = & B[(1-2\nu)(z-\zeta)I_{3,0} - 3/r_m^2(z-\zeta)\{r^2I_{5,0} - 2r\rho I_{5,1} + \rho^2I_{5,2}\} + (1-2\nu)\{3(z-\zeta) - 4\nu(z+\zeta)\}J_{3,0} \\ & - 3/r_m^2(3-4\nu)(z-\zeta)\{r^2J_{5,0} - 2r\rho J_{5,1} + \rho^2J_{5,2}\} + 6/r_m^2\zeta(z+\zeta)\{z-2\nu(z+\zeta)\}J_{5,0} \\ & - 30/r_m^4z\zeta(z+\zeta)\{r^2J_{5,0} - 2r\rho J_{5,1} + \rho^2J_{5,2}\}] \\ & + B \int_0^{\pi} \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+\zeta)} \left[1 - \left\{ \frac{1}{R_2(R_2+z+\zeta)} + \frac{1}{R_2^2} \right\} (r-\rho\cos\varphi)^2 \right] d\varphi \quad \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta}^{\beta} = & B[-(1-2\nu)(z-\zeta)I_{3,0} - 3/r_m^2(z-\zeta)^3I_{5,0} + (1-2\nu)(z-\zeta)J_{3,0} + 3/r_m^2\{(3-4\nu)z(z+\zeta)^2 - \zeta(z+\zeta)(5z-\zeta)\}J_{5,0} \\ & - 30z\zeta/r_m^4(z+\zeta)^3J_{7,0}] \quad \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta}^{\beta} = & B[(1-2\nu)(z-\zeta)I_{3,0} - 3\rho^2/r_m^2(z-\zeta)(I_{5,0} - I_{5,2}) + (1-2\nu)\{3(z-\zeta) - 4\nu(z+\zeta)\}J_{3,0} - 3/r_m^2(3-4\nu)\rho^2(z-\zeta)(J_{5,0} - J_{5,2}) \\ & + 6\zeta/r_m^2(z+\zeta)\{z-2\nu(z+\zeta)\}J_{5,0} - 30\rho^2z\zeta/r_m^4(z+\zeta)(J_{7,0} - J_{7,2})] \\ & - B \int_0^{\pi} \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+\zeta)} \left[1 - \left\{ \frac{1}{R_2(R_2+z+\zeta)} + \frac{1}{R_2^2} \right\} \rho^2(1-\cos^2\varphi) \right] d\varphi \quad \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{z}^{\beta} = & B[-(1-2\nu)(rI_{3,0} - \rho I_{3,1}) - 3/r_m^2(z-\zeta)^2(rI_{5,0} - \rho I_{5,1}) + (1-2\nu)(rJ_{3,0} - \rho J_{3,1}) \\ & - 3/r_m^2\{(3-4\nu)z(z+\zeta) - \zeta(3z+\zeta)\}(rJ_{5,0} - \rho J_{5,1}) - 30z\zeta/r_m^4(z+\zeta)^2(rJ_{7,0} - \rho J_{7,1})] \quad \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} I_{n,m} = & \int_0^{\pi} \frac{\cos^m\varphi}{(e_1 - \cos\varphi)^{n/2}} d\varphi, \quad J_{n,m} = \int_0^{\pi} \frac{\cos^m\varphi}{(e_2 - \cos\varphi)^{n/2}} d\varphi, \quad e_1 = 1 + \frac{(r-\rho)^2 + (z-\zeta)^2}{2r\rho}, \quad e_2 = 1 + \frac{(r-\rho)^2 + (z+\zeta)^2}{2r\rho} \quad \dots \dots \dots (18) \\ A = & \rho/\{8\pi G(1-\nu)r_m^3\}, \quad B = \rho/\{4\pi(1-\nu)r_m^3\}, \quad r_m = \sqrt{2r\rho}, \quad R_2^2 = r^2 + \rho^2 + (z+\zeta)^2 - 2r\rho\cos\varphi \end{aligned}$$

ここで、 $I_{n,m}$ 、 $J_{n,m}$ は完全だ円積分で表される³⁾。式(1)はコーシー形、式(2)は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため $\psi = \alpha$ の場合には、式(1)は積分のコーシーの主値をとるものとする。

本研究では、式(1)、(2)の特異積分方程式を精度よく解析するために、未知関数を前報³⁾で定義した基本密度関数と重み関数の一次結合により式(19)、(20)のように表現する。

$$\rho_{rM}^*(\alpha) = \rho_{r2M}(\alpha)w_{r3}(\alpha) + \rho_{r2M}(\alpha)w_{r4}(\alpha), \quad \rho_{z3M}^*(\alpha) = \rho_{z1M}(\alpha)w_{z1}(\alpha) + \rho_{z3M}(\alpha)w_{z3}(\alpha) \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$\rho_{r1}^*(\alpha) = \rho_{r21}(\alpha)w_{r2}(\alpha) + \rho_{r41}(\alpha)w_{r4}(\alpha), \quad \rho_{z1}^*(\alpha) = \rho_{z11}(\alpha)w_{z1}(\alpha) + \rho_{z31}(\alpha)w_{z3}(\alpha) \quad \dots \dots \dots (20)$$

ここで、基本密度関数 $w_{r1}(\alpha)$ 、 $w_{r2}(\alpha)$ 、 \dots 、 $w_{r4}(\alpha)$ などは次式で定義される。

$$w_{r2}(\alpha) = n_r(\alpha)\tan\alpha, \quad w_{r4}(\alpha) = n_r(\alpha)\sin\alpha, \quad w_{z1}(\alpha) = n_z(\alpha)/\sin\alpha, \quad w_{z3}(\alpha) = n_z(\alpha)\cot\alpha. \quad \dots \dots \dots (21)$$

$$n_r(\alpha) = \frac{b\cos\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}, \quad n_z(\alpha) = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}} \quad \dots \dots \dots (22)$$

さらに、未知関数を連続関数として近似するために重み関数を多項式を用いて次式のように表現する。

$$\begin{cases} \rho_{r3M}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} a_{nM} t_n(\alpha), & \rho_{r31}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} a_{n1} t_n(\alpha) \\ \rho_{r4M}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} b_{nM} t_n(\alpha), & \rho_{r41}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} b_{n1} t_n(\alpha) \end{cases} \quad \begin{cases} \rho_{z1M}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} c_{nM} t_n(\alpha), & \rho_{z11}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} c_{n1} t_n(\alpha) \\ \rho_{z2M}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} d_{nM} t_n(\alpha), & \rho_{z21}^*(\alpha) = \sum_{n=1}^{M/2} d_{n1} t_n(\alpha) \end{cases} \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$t_n(\alpha) = \cos\{2(n-1)\alpha\} \quad \dots \dots \dots$$

ここで、 M は $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ の範囲の選点数である。

以上の離散化の方法により式(1)、(2)は式(24)~(27)で示される $4M$ 元の連立方程式に還元される。

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM}A_{nM} + b_{nM}B_{nM} + c_{nM}C_{nM} + d_{nM}D_{nM} + a_{n1}A_{n1} + b_{n1}B_{n1} + c_{n1}C_{n1} + d_{n1}D_{n1}) = -(\sigma_z^* \sin^2\varphi_0 + \sigma_r^* \cos^2\varphi_0) \quad \dots \dots \dots (24)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM} E_{nM} + b_{nM} F_{nM} + c_{nM} G_{nM} + d_{nM} H_{nM} + a_n E_n + b_n F_n + c_n G_n + d_n H_n) = -(\sigma_z^* - \sigma_r^*) \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \dots \dots \dots (25)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM} I_{nM} + b_{nM} J_{nM} + c_{nM} K_{nM} + d_{nM} L_{nM} + a_n I_n + b_n J_n + c_n K_n + d_n L_n) = -\{\sigma_z^* - \nu_M(\sigma_\theta^* + \sigma_r^*)\} r / E_M \dots \dots \dots (26)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM} M_{nM} + b_{nM} N_{nM} + c_{nM} O_{nM} + d_{nM} P_{nM} + a_n M_n + b_n N_n + c_n O_n + d_n P_n) = -\{\sigma_z^* - \nu_M(\sigma_r^* + \sigma_\theta^*)\} z / E_M \dots \dots \dots (27)$$

$$A_{nM} = -\frac{1}{2} I_n(\varphi) \cos^2 \varphi_0 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nmM}^E(\alpha, \varphi) I_n(\alpha) b \cos \alpha d\alpha$$

(他も同様) $\dots \dots \dots (28)$

任意の点の応力は4M個の係数 a_{nM}, \dots, d_n と A_{nM}, \dots, P_n に相当する影響係数の一次結合で表現される^③。以上の解析法により回転だ円体状介在物の境界上での最大応力ならびに応力分布を求める。

3. 解析結果および考察

3.1 応力の収束性と境界条件の満足度 図1に示した半無限体中の回転だ円体状介在物の問題において、形状比が $a/b=1, b/d=0.9$, 剛性比 $E_1/E_M=2.0$, ポアソン比 $\nu_M=\nu_1=0.3$ の場合、応力 $\sigma_{IM}, \sigma_{nM}, \tau_{nM}, \sigma_{II}, \sigma_{nI}, \tau_{nI}$ の収束状況を表1に示す。また、この場合の境界条件 ($\sigma_{IM} - \sigma_{II} = 0, \tau_{nM} - \tau_{nI} = 0, U_{IM} - U_{II} = 0, U_{nM} - U_{nI} = 0$) の満足度を確かめるため、それらの値を表2に示す。表1, 2より本解析結果は、選点数 $M=20$ 程度で有効数字5けた程度まで収束して良好な収束性を示しており、境界条件も 10^{-4} 以下で満足されていることがわかった。このような検討によって本解析結果の良好な収束性と高い境界条件の満足度が $E_1/E_M=0 \sim \infty, b/d=0 \sim 0.9$ のすべてで確認された。

Table1 Convergence of the stress ($a/b=1, b/d=0.9, E_1/E_M=2, \nu_M=\nu_1=0.3$).

M	σ_{IM}	σ_{II}	σ_{nM}	σ_{nI}	τ_{nM}	τ_{nI}
8	0.5247	1.5997	0.1448	0.1976	0.0128	0.0132
12	0.5080	1.5539	0.1451	0.1376	0.0132	0.0131
20	0.5024	1.5530	0.1396	0.1395	0.0130	0.0130
22	0.5024	1.5530	0.1396	0.1396	0.0130	0.0130

Table2 Satisfaction of boundary conditions ($a/b=1, b/d=0.9, E_1/E_M=2, \nu_M=\nu_1=0.3$).

M	$\sigma_{IM} - \sigma_{II}$	$\tau_{nM} - \tau_{nI}$	$U_{IM} - U_{II}$	$U_{nM} - U_{nI}$
8	-5.3×10^{-2}	-3.6×10^{-4}	-3.9×10^{-5}	6.3×10^{-3}
12	7.6×10^{-3}	-2.1×10^{-4}	-1.0×10^{-5}	5.8×10^{-4}
20	1.1×10^{-4}	1.4×10^{-5}	-2.7×10^{-7}	5.3×10^{-7}
22	-6.1×10^{-6}	1.1×10^{-5}	3.4×10^{-8}	3.7×10^{-7}

Table3 The maximum stress of cavity at B ($E_1/E_M=0, \nu=0.25, a/b=1, \psi=-90^\circ$).

b/d	0	0.2	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9
Present	2.087	2.092	2.145	2.332	2.506	2.759	3.173
Tsuchida [5]	2.087	2.092	2.145	2.332	2.506	2.760	3.270

3.2 $E_1/E_M=0$ で $a/b=1$ (球か) の場合 $\nu=0.25$ とし、 $b/d=0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ の場合の最大応力の値を表3に土田ら^⑤の結果とともに示す。ここで、最大応力は図1のB点での $\sigma_I = \sigma_\theta$ である。表3より $b/d=0.9$ のとき土田らの結果には約3%の誤差があるが^①、他の場合は本解析結果とよく一致していることがわかる。

3.3 $E_1/E_M=0$ (回転だ円体状空か) の場合 $\nu=0.3$ とし、形状比 $a/b=0.286, 0.333, 0.4, 0.5, 0.667, 1.0$ とした場合の $\psi=-90^\circ$ での最大応力の値を表4に土田ら^⑥の結果とともに示す。表4より土田らの結果は $a/b=1, b/d=0.667$ のときに約2%の誤差があるが^①、ほとんど本解析結果とよく一致していることがわかる。表5に $a/b=0.25, 0.5$ の場合のB点 ($\psi=-90^\circ$) とC点 ($\psi=90^\circ$) における応力 ($\sigma_I = \sigma_\theta$) の値を土田らの結果^⑥とともに示す。表5より土田らの結果には $b/d=0.8$ の時に約11%の誤差があることがわかる^①。一方、本解析結果は $b/d=0.8, 0.9$ でも表2のような境界条件は 10^{-4} 以下で満足されており信頼性が高い。

3.4 回転だ円体状介在物の場合 ここでは、 $E_1/E_M < 1$ では界面上の母材の σ_θ に注目する。また、 $E_1/E_M > 1$ では界面上の σ_n が界面の破壊に最も重要と考える。図2~4に $a/b=1, 1/2, 2, E_1/E_M=0, 0.5$, のとき $b/d=0, 2/3, 0.8, 0.9$ の各場合における σ_θ の境界上の分布および $E_1/E_M=2.0, \infty$ ときの各場合における σ_n の分布を示す。図2~4より $E_1/E_M=0.5$

Table4 The maximum stress of cavity at B ($E_1/E_M=0, \nu=0.3, \psi=-90^\circ$).

b/d	a/b	0.286	0.333	0.4	0.5	0.667	1.0
0.333	Present	2.713	2.679	2.624	2.545	2.420	2.216
	Tsuchida [2]	2.712	2.671	2.624	2.544	2.425	2.227
0.4	Present	2.715	2.680	2.629	2.552	2.434	2.245
	Tsuchida [2]	2.714	2.674	2.627	2.550	2.434	2.245
0.5	Present	2.732	2.690	2.643	2.575	2.471	2.326
	Tsuchida [2]	2.724	2.689	2.648	2.583	2.488	2.350
0.667	Present	2.755	2.731	2.701	2.663	2.620	2.581
	Tsuchida [2]	2.753	2.740	2.716	2.686	2.651	2.618

Table5 The maximum stress of cavity at B ($\psi=-90^\circ$) and C ($\psi=90^\circ$) ($E_1/E_M=0, \nu=0.3$).

b/d	a/b	0.25		0.5		
		ψ (deg.)	-90°	90°	-90°	90°
0	Present		2.737	2.737	2.536	2.536
	Tsuchida [2]		-	-	-	-
0.2	Present		2.738	2.737	2.538	2.537
	Tsuchida [2]		2.741	2.740	2.539	2.538
0.4	Present		2.749	2.729	2.552	2.540
	Tsuchida [2]		2.744	2.741	2.553	2.541
0.6	Present		2.808	2.687	2.617	2.541
	Tsuchida [2]		2.758	2.742	2.615	2.544
0.8	Present		3.169	2.429	2.829	2.539
	Tsuchida [2]		2.810	2.743	2.829	2.547
0.9	Present		4.777	1.210	3.104	2.535
	Tsuchida [2]		-	-	-	-

*1 土田らの解法は正しいので、十分な項数を用いて数値を求めれば、本研究の結果と一致するものと考えられる。

のときには $E_I/E_M=0$ の場合より半無限体表面の影響が小さいことがわかる。 $E_I/E_M=2.0, \infty$ のときには、 b/d が大なるにつれて半無限体表面の影響により、 $\psi = -90^\circ$ 付近で σ_n が圧縮から引張となって表れている。 $b/d \rightarrow 1$ となるにつれて半無限体表面の $\psi = -90^\circ$ 付近の応力分布への影響は複雑に表れる(例えば図3(b)の $b/d=0.9$)。また、半無限体表面の影響は $\psi = -90^\circ \sim -30^\circ$ に大きく生じるけれども、 $\psi = 0^\circ$ 付近の最大引張応力はほとんど変化しない。

表6に $a/b=1, 1/2, 2, E_I/E_M=0, 0.5, 2.0, \infty$ のとき $b/d=0, 1/3, 1/2, 2/3, 0.8, 0.9$ の場合の最大応力とその発生位置を示す。

ここで $E_I/E_M=0, 0.5$ の最大応力 σ_θ は、ほとんど $\psi = \pm 90^\circ$ に生じている。また、 $E_I/E_M=2.0, \infty$ の最大応力 σ_n はすべて $\psi = 0^\circ$ に生じている。表6より $E_I/E_M=0, 0.5$ のとき、最大応力は $\psi = -90^\circ$ 付近で発生しており、一般的には b/d が大きくなるにつれて引張応力の増加として表れている。しかし、 $a/b=1, E_I/E_M=0.5, b/d=0.9$ および $a/b=2, E_I/E_M=0.5, b/d=0.8$ のときなど $b/d \rightarrow 1$ で最大応力は単純に増加せず、むしろ小さくなる場合がある。また、 $a/b=2, E_I/E_M=0.5, b/d=0.8$ のときのように $\psi = -90^\circ$ ではなく $\psi = -70^\circ$ で応力が最大になる場合もある。 $E_I/E_M < 1$ のときは b/d の変化で最大応

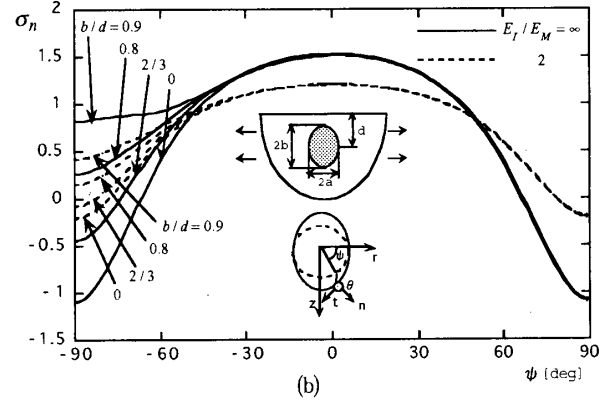
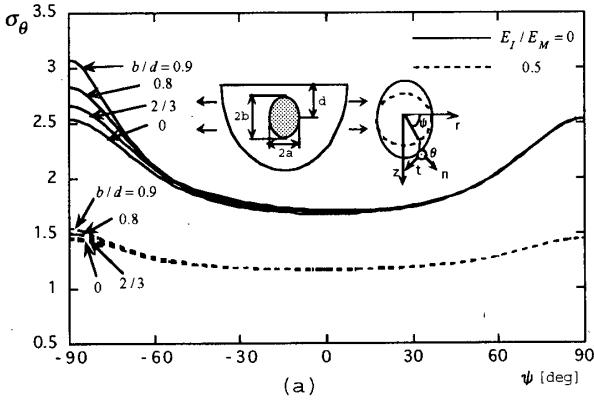


Fig.2 Interface stress for $a/b=1/2$ (a) σ_θ when $E_I/E_M < 1$ (b) σ_n when $E_I/E_M > 1$.

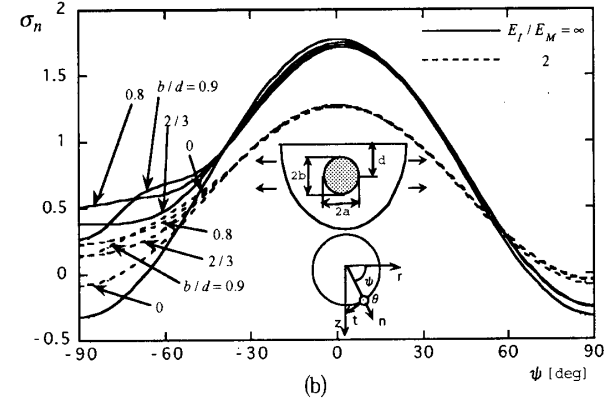
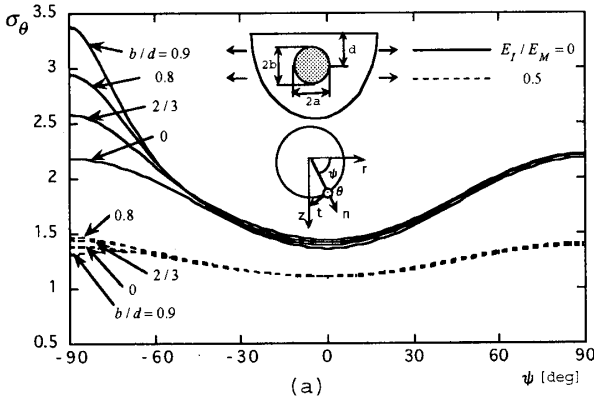


Fig.3 Interface stress for $a/b=1$ (a) σ_θ when $E_I/E_M < 1$ (b) σ_n when $E_I/E_M > 1$.

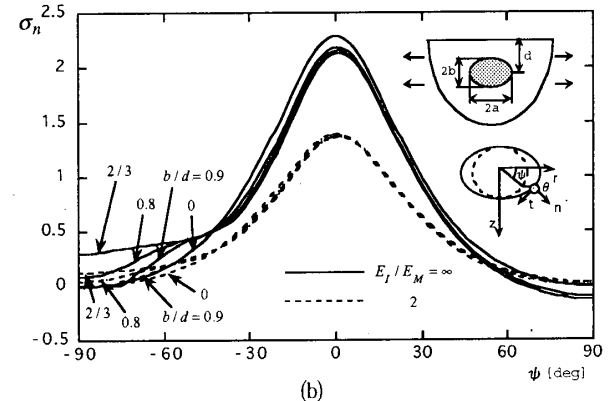
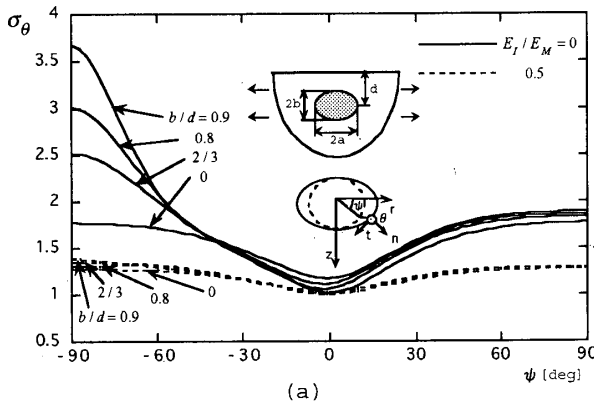


Fig.4 Interface stress for $a/b=2$ (a) σ_θ when $E_I/E_M < 1$ (b) σ_n when $E_I/E_M > 1$.

Table 6 Maximum stress of an ellipsoidal inclusion.

		Matrix		Matrix		Matrix		Matrix	
		$E_I/E_M = 0$		$E_I/E_M = 0.5$		$E_I/E_M = 2$		$E_I/E_M = \infty$	
a/b	b/d	ψ (deg.)	σ_θ	ψ (deg.)	σ_θ	ψ (deg.)	σ_n	ψ (deg.)	σ_n
1/2	0	± 90	2.537	± 90	1.449	0	1.208	0	1.533
	1/3	-90	2.545	-90	1.450	-0.1	1.207	-0.1	1.532
	1/2	-90	2.575	-90	1.454	-0.1	1.207	-0.1	1.529
	2/3	-90	2.663	-90	1.468	0	1.206	0	1.524
	0.8	-90	2.832	-90	1.508	0.4	1.205	0.7	1.518
	0.9	-90	3.076	-90	1.549	1.0	1.204	1.2	1.511
1	0	± 90	2.182	± 90	1.384	0	1.275	0	1.775
	1/3	-90	2.216	-90	1.388	0.1	1.274	0.2	1.770
	1/2	-90	2.326	-90	1.404	0.3	1.274	0.7	1.761
	2/3	-90	2.579	-90	1.448	0.6	1.273	1.3	1.752
	0.8	-90	2.948	-90	1.468	0.8	1.268	1.7	1.732
	0.9	-90	3.385	90	1.405	0.8	1.261	1.9	1.716
2	0	± 90	1.773	± 90	1.279	0	1.392	0	2.288
	1/3	-90	1.890	-90	1.296	0.3	1.390	0.2	2.259
	1/2	-90	2.137	-90	1.335	0.5	1.387	0.4	2.227
	2/3	-90	2.519	-90	1.349	0.7	1.380	0.5	2.184
	0.8	-90	3.014	-70	1.318	0.9	1.373	0.8	2.151
	0.9	-90	3.669	-90	1.387	1.0	1.369	1.0	2.134

力は2倍以上変化することもあるのに対して、 $E_I/E_M > 1$ でb/dが変化するとき、最大応力は常に $\psi = 0^\circ$ 付近で発生しており、その変化は最大でも8%程度と小さいことから、半無限体表面の影響が比較的小さいことがわかる。

4. 結 言

本研究では、体積法の特異積分方程式を用いて、回転だ円体状介在物を有する半無限体の二軸一様引張り問題について精度よく解析する方法を示し、半無限体中での介在物の剛性比、形状比、距離の変化が応力に及ぼす影響を考察した。結果を図表に示したほか結論をまとめると以下のようになる。

(1) 半無限体領域の軸対称問題の解析に有用な半径方向と軸方向の集中力の輪が作用するときの応力と変位の基本解を求め、全て明示した。

(2) 本解析では、特異積分方程式の数値解析に未知関数である体積力密度を4種類の基本密度関数と多項式の積で近似する方法により、少ない選点数で良好な収束性と高い境界条件の満足度を確認した。

(3) $E_I/E_M = 0$ の空かの際に本解析結果と土田らの結果と比較した結果、土田らの結果は大体において本結果とよく一致するけれども、空かが半無限体表面に近い場合、最大11%の誤差を含む場合がある。

(4) $E_I/E_M < 1$ で界面上の母材の σ_θ 、 $E_I/E_M > 1$ で界面の σ_n に注目して、回転だ円体状介在物を有する半無限体の二軸一様引張り問題の解析を行った結果、剛性比 $E_I/E_M = 0$ (空か)の際にはb/d=0.9で最大応力はb/d=0の約1.2~2倍になっており、半無限体表面の影響が大きいことが分かった。しかし、 $E_I/E_M > 1$ では最大応力 σ_n は $\psi = 0^\circ$ に生じ、半無限体表面の影響は比較的小さい。b/d→1となるに従って半無限体表面の表面近傍の応力分布への影響は複雑な挙動を示す。

本研究の一部は元九州工業大学大学院上田高志君の助力を得た。

文 献

- (1)土田栄一郎・中原一郎, 球かを有する半無限体の2軸引張り, 機論, 35-276, A(1969), 1607-1616.
- (2)土田栄一郎・斉藤義之・中原一郎・小玉正雄, へん長回転だ円状空かを有する半無限体の二軸一様引張り, 機論, 47-420, A(1981), 818-825.
- (3)野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法(第1報, 基礎の理論と境界条件の満足度の検討), 機論, 58-555, A(1992), 2179-2184. ; 野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法(第2報, 切欠きの干渉問題の一般的解析法), 機論, 59-559, A(1993), 785-791. ; 野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法(第3報, 三次元問題への応用), 機論, 59-564, A(1993), 1964-1970. ; 野田尚昭・松尾忠利・原田昭治・中村資生, 特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析, 機論, 61-585, A(1995), 965-973.
- (4)Mindlin, R. D., Force at Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid, Physics, 7-6 (1936), 195-202.
- (5)土田栄一郎・中原一郎, 球かを有する半無限体の1軸引張り, 機論, 40-330, A(1974), 285-297.