

リング状界面き裂の応力拡大係数の解析*

野田 尚 昭*¹, 鍵田 雅 幸*²
陳 夢 成*³, 小田 和 広*⁴

Analysis of Stress Intensity Factors of a Ring Shaped Interface Crack

Nao-Aki NODA*⁵, Masayuki KAGITA,
Meng-Cheng CHEN and Kazuhiro ODA⁵Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper, numerical solutions of singular integral equations are discussed in the analysis of axi-symmetric interface cracks under torsion and tension. The problems of a ring-shaped interface crack are formulated in terms of a system of singular integral equations on the basis of the body force method. In the numerical analysis, the unknown functions of the body force densities are approximated by the products of the fundamental density functions and power series, where the fundamental densities are chosen to express a two-dimensional interface crack exactly. The accuracy of the present analysis is verified by comparing the present results with the results obtained by other researchers for the limiting cases. The calculation shows that the present method gives rapidly converging numerical results for these problems as well as for ordinary crack problems in homogeneous material. The stress intensity factors of a ring-shaped interface crack are shown in tables and charts with varying in material combination and also geometrical conditions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Stress Intensity Factor, Composite Material, Singular Integral Equation, Interface Crack

1. 緒 言

最近, 軽量化と高機能化を目的として材料の複合化, 接合化などの技術が進んでいる. それに伴い, 接合材, 複合材の界面の強度評価が大きな問題となっている. これまでに界面き裂の応力拡大係数に関して多くの研究がなされている. 2次元界面き裂に関しては Salganikの解析⁽¹⁾をはじめとして多くの解析⁽²⁾⁻⁽¹¹⁾がなされている. しかし, 3次元界面き裂に関しては円形界面き裂⁽¹²⁾⁻⁽¹⁷⁾や円形界面き裂⁽¹⁸⁾や有限体中のき裂⁽¹⁹⁾などいくつかの解析はなされているものの, その多くは特定の材料の組合わせに対する数値計算である場合がほとんどであり, 任意の材料の組合わせに対して応力拡大係数が閉じた形で与えられているものは円形界面き裂⁽¹⁵⁾と深い環状界面き裂⁽²⁰⁾に関するもののみである.

3次元界面き裂問題を特異積分方程式として表現することは, 最近陳・野田・湯⁽²¹⁾によって行われている

けれども, 一般に界面き裂の問題では変位の振動現象と応力の振動特異性とその厳密な解析を困難にしている. そこで本研究では, その特異積分方程式を厳密に解析する方法を考察するため, まず軸対称問題について応力拡大係数の解析を行う. 解析方法としては, 体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いる. 本解析方法は, 界面き裂先端近傍で生じる変位の振動現象を厳密に評価した解析が可能であり, 応力拡大係数が連立方程式の解(力対の重み)から直接決定されるという特徴を持っている.

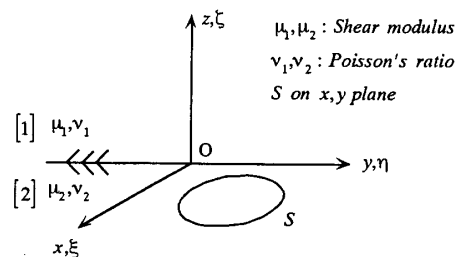


Fig.1 Three dimensional interface crack

* 原稿受付 2002年12月2日.

¹ 正員, 九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1).² 九州工業大学大学院.³ 九州工業大学工学部.⁴ 正員, 徳山工業高等専門学校(〒745-0801 徳山市久米高城3538).

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

2. リング状界面き裂の特異積分方程式

2.1 3次元界面き裂の特異積分方程式

図1に示すような異種接合界面上に存在する3次元き裂問題については、陳-野田-湯⁽²¹⁾によって体積法の特異積分方程式が示されている。これらの特異積分方程式は、変位食い違い $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$ を未知関数としている。ここで、 $(x, y, z), (\xi, \eta, \zeta)$ はそれぞれ注目点及び着力点の座標である。以下で p_x, p_y, p_z は遠方での応力 $\tau_{xz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ であり、 ν_1, ν_2 はポアソン比、 f_s は発散積分の有限部分をとることを意味する。

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial \Delta u_x(x, y)}{\partial x} + \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \\ & \times \int_s \frac{1}{r^3} \Delta u_x(\xi) dS(\xi) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \\ & \times \left\{ \int_s \frac{(x - \xi)^2}{r^5} \Delta u_x(\xi) dS(\xi) \right. \\ & \left. + \int_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \Delta u_y(\xi) dS(\xi) \right\} = -p_x(x, y), \quad x, y \in S \end{aligned} \quad (1.a)$$

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial \Delta u_z(x, y)}{\partial y} + \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \\ & \times \int_s \frac{1}{r^3} \Delta u_y(\xi) dS(\xi) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \\ & \times \left\{ \int_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \Delta u_x(\xi) dS(\xi) \right. \\ & \left. + \int_s \frac{(y - \eta)^2}{r^5} \Delta u_y(\xi) dS(\xi) \right\} = -p_y(x, y), \quad x, y \in S \end{aligned} \quad (1.b)$$

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) \left\{ \frac{\partial \Delta u_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_y(x, y)}{\partial y} \right\} \\ & + \mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\pi} \int_s \frac{1}{r^3} \Delta u_z(\xi) dS(\xi) = -p_z(x, y), \quad x, y \in S \end{aligned} \quad (1.c)$$

$$\begin{aligned} & \Lambda = \mu_2 / (\mu_1 + \mu_2), \quad \Lambda_1 = \mu_2 / (\mu_1 + \kappa_1 \mu_2), \quad \Lambda_2 = \mu_2 / (\mu_2 + \kappa_2 \mu_1), \\ & \kappa_1 = 3 - 4\nu_1, \quad \kappa_2 = 3 - 4\nu_2, \quad r^2 = (x - \xi)(y - \eta) \end{aligned} \quad (1.d)$$

$$\Delta u_i(x, y) = u_i(x, y, 0^+) - u_i(x, y, 0^-), \quad (i = x, y, z) \quad (1.e)$$

2.2 軸対称ねじり問題の特異積分方程式

図2に示すようなリング状界面き裂問題を取扱う。まず、遠方でねじりモーメントを受ける場合の表現を

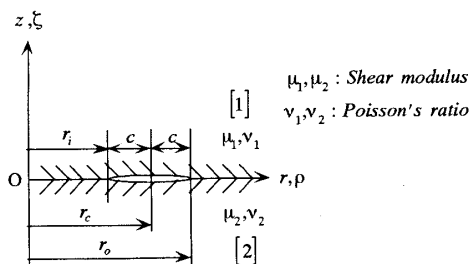


Fig.2 Ring-shaped interface crack

求めるとそれは以下のようなになる。ここで $(r, \theta, z), (\rho, \varphi, 0)$ はそれぞれ注目点及び着力点の円柱座標である。式(1.a), (1.b), (1.c)において、 $\Delta u_x = -\Delta u_\theta \sin \varphi, \Delta u_y = \Delta u_\theta \cos \varphi, \Delta u_z = 0, x = r, y = 0, \xi = \rho \cos \varphi, \eta = \rho \sin \varphi$ を代入し、 $\partial/\partial \theta = 0, p_x = p_z = 0$ を考慮すると、式(1.a), (1.c)は被積分関数が奇関数より0となる。

$$\begin{aligned} & \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_\theta \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r^3} \rho d\varphi d\rho + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \\ & \times \left[\int_{r_i}^{r_0} \Delta u_\theta \int_0^{2\pi} \frac{(r - \rho \cos \varphi)(-\rho \sin \varphi)(-\sin \varphi)}{r^5} \rho d\varphi d\rho \right. \\ & \left. + \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_\theta \int_0^{2\pi} \frac{(\rho \sin \varphi)^2 \cos \varphi}{r^5} \rho d\varphi d\rho \right] = -p_y \end{aligned} \quad (2)$$

式(2)を整理すると次の式が得られる。ここで、 $K(k)$ は第1種、第2種完全だ円積分である。

$$\frac{1}{\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_\theta \left\{ \frac{r^2 + \rho^2}{(r + \rho)(r - \rho)^2 r} E - \frac{1}{(r + \rho)r} K \right\} d\rho = -p_y \quad (3.a)$$

$$\left. \begin{aligned} & e = 1 + \frac{(r - \rho)^2}{2r\rho}, \quad k = \sqrt{\frac{2}{e + 1}} \\ & K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (3.b)$$

ここで、式(3.a)に $r = r_c + r', \rho = r_c + \rho'$ を代入し、 $r_c \rightarrow \infty$ として式を整理すると次式のようなになる。

$$\frac{1}{\pi} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_\theta \frac{1}{(r' - \rho')^2} d\rho' = -p_y \quad (4)$$

この式は、2次元界面き裂が面外せん断を受ける場合の式⁽⁹⁾と一致する。

2.3 軸対称引張問題の特異積分方程式

次に、遠方でz軸方向に引張りを受ける場合の表現を求めると以下のようなになる。式(1.a), (1.b), (1.c)において、 $\theta = 0$ の面に注目し、 $\Delta u_x = \Delta u_r \cos \varphi, \Delta u_y = \Delta u_r \sin \varphi, x = r, y = 0, \xi = \rho \cos \varphi, \eta = \rho \sin \varphi$ を代入し、 $p_y = 0, \Delta u_z = 0, \partial/\partial y = 0$ を考慮すると、式(1.b)は被積分関数が奇関数より0となる。

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_r \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r^3} \rho d\varphi d\rho \\ & + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \left[\int_{r_i}^{r_0} \Delta u_r \int_0^{2\pi} \frac{(r - \rho \cos \varphi)^2 \cos \varphi}{r^5} \rho d\varphi d\rho \right. \\ & \left. + \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_r \int_0^{2\pi} \frac{(r - \rho \cos \varphi)(-\rho \sin \varphi) \sin \varphi}{r^5} \rho d\varphi d\rho \right] = -p_x \end{aligned} \quad (5.a)$$

$$\mu_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) \frac{\partial \Delta u_r \cos \theta}{\partial r} + \mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\pi} \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_z \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^3} \rho d\varphi d\rho = -p_z \quad (5.b)$$

式(5.a), (5.b)を整理すると次の式が得られる。

$$-\beta C \frac{\partial \Delta u_r \cos \theta}{\partial r} + \frac{C}{\pi} \int_{r_i}^{r_0} \Delta u_z \frac{2}{(r + \rho)(r - \rho)^2} E \rho d\rho = -p_z \quad (6.a)$$

$$\beta C \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} - C \right) \int_{r_c}^r \Delta u_r \left\{ \frac{r^2 + \rho^2}{(r+\rho)(r-\rho)^2 r} E - \frac{1}{(r+\rho)r} K \right\} d\rho + \frac{2}{\pi} \left(C - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \int_{r_c}^r \Delta u_r \left\{ \frac{r^2 + 4r\rho + \rho^2}{(r+\rho)^3 r} E - \frac{8r^2\rho^2}{(r+\rho)^3(r-\rho)^2 r} \right\} d\rho = -P_x \quad \dots\dots(6.b)$$

$$\alpha = \frac{\mu_2(\kappa_1 + 1) - \mu_1(\kappa_2 + 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)}, \quad \beta = \frac{\mu_2(\kappa_1 - 1) - \mu_1(\kappa_2 - 1)}{\mu_2(\kappa_1 + 1) + \mu_1(\kappa_2 + 1)} \quad (6.c)$$

$$C = \frac{2\mu_1(1 + \alpha)}{(1 - \beta^2)(\kappa_1 + 1)} = \frac{2\mu_2(1 - \alpha)}{(1 - \beta^2)(\kappa_2 + 1)}$$

ここで、式(6.a), (6.b)に $r = r_c + r'$, $\rho = r_c + \rho'$ を代入し、 $r_c \rightarrow \infty$ として式を整理すると次式ようになる。

$$-\beta C \frac{\partial \Delta u_r}{\partial r} + \frac{C}{\pi} \int_{r_c}^r \Delta u_z \frac{1}{(r' - \rho')^2} d\rho' = -P_x \quad \dots\dots(7.a)$$

$$\beta C \frac{\partial \Delta u_z}{\partial r} + \frac{C}{\pi} \int_{r_c}^r \Delta u_r \frac{1}{(r' - \rho')^2} d\rho' = -P_x \quad \dots\dots(7.b)$$

この式は、2次元界面き裂が引張りを受ける場合の式(9)と一致する。

3. 特異積分方程式の数値解析法

3.1 リング状界面き裂のねじり 図2に示すような異種接合界面上に存在するリング状界面き裂が遠方でねじりモーメントを受ける場合の数値解析法を証明する。式(3.a)の未知関数である変位食い違い Δu_θ は、界面き裂を表すのに必要な密度を表現する基本密度関数 $w_\theta(\rho)$ と重み関数 $F_M(\rho)$ の積で近似する。

$$\Delta u_\theta = \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{1}{\mu_m} w_\theta(\rho) \right\} F_M(\rho) \quad \dots\dots(8)$$

ここで、基本密度関数 $w_\theta(\rho)$ は2次元界面き裂が一様な面外せん断応力 $\tau_{\theta z}^\infty = 1$ を受ける場合のき裂縁の変位(4)を厳密に表現する次式で表される。

$$\sum_{m=1}^2 \frac{1}{\mu_m} w_\theta(\rho) = \sum_{m=1}^2 \frac{1 + \kappa_m}{4\mu_m} \sqrt{c^2 - \rho^2} \quad \dots\dots(9)$$

本論文では、重み関数 $F_M(\rho)$ を次のような級数で近似する。

$$F_M(\rho) = \sum_{n=1}^M a_n \rho^{n-1} \quad \dots\dots(10)$$

境界条件を満足させる選点は、き裂の先端で密になるように配置する(6)。

$$r = -c \cos \left\{ n\pi / (M+1) \right\} + r_c, \quad (n=1, \dots, M) \quad \dots\dots(11)$$

以上のような離散化手法を用いれば、式(3.a)に式(8), (9), (10)を代入して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^M a_n A_n &= -P_x \\ A_n &= \int_{r_c}^r \sqrt{c^2 - \rho^2} \left\{ \frac{r^2 + \rho^2}{(r+\rho)(r-\rho)^2 r} E - \frac{1}{(r+\rho)r} K \right\} \rho^{n-1} d\rho \end{aligned} \right\} (12)$$

2次元界面き裂が面外せん断を受ける場合、応力拡大

係数が剛性比 ($\Gamma = \mu_2/\mu_1$) によらないことは示されている(7-11)が、式(12)はリング状界面き裂がねじりモーメントを受ける場合も同様に剛性比によらないことを示している。

式(3.a)に含まれる積分を実行するとき注目点の座標 r と着力点の座標 ρ が一致するとき特異性を有するため通常の数値積分によりその値を求めることはできない。そこで注目点 r を含む微少区間 $2\varepsilon_0(r - \varepsilon_0, r + \varepsilon_0)$ については被積分関数に $\rho = r + \varepsilon$ (ε は微少距離) を代入し、被積分関数の ε のべき級数展開を用いて ε 以上の項を無視すれば式(3.a)は次のようになる。

$$\int_{r-\varepsilon_0}^{r+\varepsilon_0} \sqrt{c^2 - \rho^2} \left\{ \frac{r^2 + \rho^2}{(r+\rho)(r-\rho)^2 r} E - \frac{1}{(r+\rho)r} K \right\} F_M(\rho) d\rho = \int_{-\varepsilon_0}^{\varepsilon_0} \sqrt{c^2 - r^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \left[1 - \left(\frac{1}{c^2 - r^2} - \frac{1}{2r} \right) \varepsilon - \left\{ \frac{1}{2(c^2 - r^2)} + \frac{c^2}{2(c^2 - r^2)^2} - \frac{3}{16r^2} + \frac{3}{8r^2} \ln \left(\frac{8r}{\varepsilon} \right) \right\} \varepsilon^2 + \dots \right] F_M(\rho) d\varepsilon \quad \dots\dots(13.a)$$

但し、

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= \ln(8r/\varepsilon) - \left\{ \ln(8r/\varepsilon) - 1 \right\} \varepsilon^2 / 16r^2 + \dots \\ E(k) &= 1 + \left\{ \ln(8r/\varepsilon) - 1/2 \right\} \varepsilon^2 / 8r^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(13.b)$$

を用いる。また、

$$\left. \begin{aligned} F_M(\rho) &= \sum_{n=1}^M a_n \rho^{n-1}, \\ \rho^{n-1} &= r^{n-1} + (n-1)r^{n-2}\varepsilon + \sum_{j=0}^{n-2} \left\{ (j+1)\rho^{(n-3-j)}r^j \right\} \varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(13.c)$$

式(13)の被積分関数の $1/\varepsilon^2$ の項、定数項、 $\ln(8r/\varepsilon)$ の項を ε_0 を適当に小さくとして積分して求めれば、特異積分を正確に評価できる。

3.2 リング状界面き裂の引張り 次に遠方で z 軸方向に引張りを受ける場合について述べる。式(6.a), (6.b)の未知関数である変位食い違い $\Delta u_z, \Delta u_r$ は、界面き裂を表すのに必要な密度を表現する基本密度関数 $w_z(\rho), w_r(\rho)$ と重み関数 $F_1(\rho), F_2(\rho)$ の積で近似する。

$$\Delta u_z + i\Delta u_r = \sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{\kappa_m - 1}{\mu_m(1 + \kappa_m)} w_z(\rho) + i \frac{1}{\mu_m} w_r(\rho) \right\} \times \left\{ F_1(\rho) + iF_2(\rho) \right\} \quad \dots\dots(14)$$

ここで、基本密度関数 $w_z(\rho), w_r(\rho)$ は次式で表される。

$$\sum_{m=1}^2 \left\{ \frac{\kappa_m - 1}{\mu_m(1 + \kappa_m)} w_z(\rho) + i \frac{1}{\mu_m} w_r(\rho) \right\} = \sum_{m=1}^2 \frac{1}{\mu_m} \frac{1 + \kappa_m}{4 \cosh(\pi\gamma/i)} \sqrt{c^2 - \rho^2} \left(\frac{c - \rho}{c + \rho} \right)^\gamma \quad \dots\dots(15)$$

式(14), (15)は2次元界面き裂が一様な内圧 $\sigma_z = p$, または $\tau_z = q$ を受ける場合の厳密解である(9)(22)。また、 γ は次式で定義される。

$$\gamma = \frac{1}{2\pi i} \ln \left[(\mu_1\kappa_2 + \mu_2) / (\mu_2\kappa_1 + \mu_1) \right] \quad \dots\dots(16)$$

本論文では、重み関数 $F_1(\rho), F_2(\rho)$ を次のような級数で近似する。

$$F_1(\rho) = \sum_{n=1}^M b_n \rho^{n-1}, F_2(\rho) = \sum_{n=1}^M c_n \rho^{n-1} \dots\dots\dots(17)$$

式(14)~(17)を式(6,a), (6,b)に代入すればリング状界面き裂の基礎式が得られる。その結果は γ のみに依存する⁽¹⁵⁾⁽²⁰⁾。また、境界条件を満足させる選点は、き裂の先端で密になるように配置する(式(11))。式(6,a), (6,b)に含まれる積分についても、式(3,a)の特異項の処理法を用いると、式(6,a), (6,b)は次のようになる。

Table 1. Convergence of the present result of interface crack when $c/r_c = 0.9$

$$\left[\begin{aligned} K_1^i - iK_2^i &= (F_1^i + iF_2^i) \sigma \sqrt{\pi c} (1 - 2\gamma), F_j^i = F_j(r_i), (j=1,2) \\ K_1^i - iK_2^i &= \lim_{r \rightarrow r_i} \sqrt{2\pi(r_i - r)} (\sigma_z - i\tau_{rz}) \Big|_{z=0} \{ (r_i - r)/2c \}^\gamma \\ K_1^o + iK_2^o &= (F_1^o + iF_2^o) \sigma \sqrt{\pi c} (1 + 2\gamma), F_j^o = F_j(r_o), (j=1,2) \\ K_1^o + iK_2^o &= \lim_{r \rightarrow r_o} \sqrt{2\pi(r - r_o)} (\sigma_z + i\tau_{rz}) \Big|_{z=0} \{ (r - r_o)/2c \}^\gamma \end{aligned} \right]$$

γ/i	M	F_1^i	F_2^i	F_1^o	F_2^o
0.07	6	2.413	0.105	0.883	0.026
	7	2.501	0.107	0.907	0.013
	8	2.559	0.107	0.892	0.022
	9	2.597	0.106	0.901	0.016
	10	2.621	0.104	0.896	0.020
	11	2.629	0.103	0.896	0.019
	13	2.650	0.102	0.898	0.020
0.15	6	2.530	0.248	0.862	0.056
	7	2.633	0.255	0.878	0.027
	8	2.703	0.258	0.870	0.046
	9	2.750	0.256	0.874	0.032
	10	2.781	0.253	0.872	0.041
	11	2.794	0.249	0.871	0.037
	13	2.817	0.243	0.873	0.038

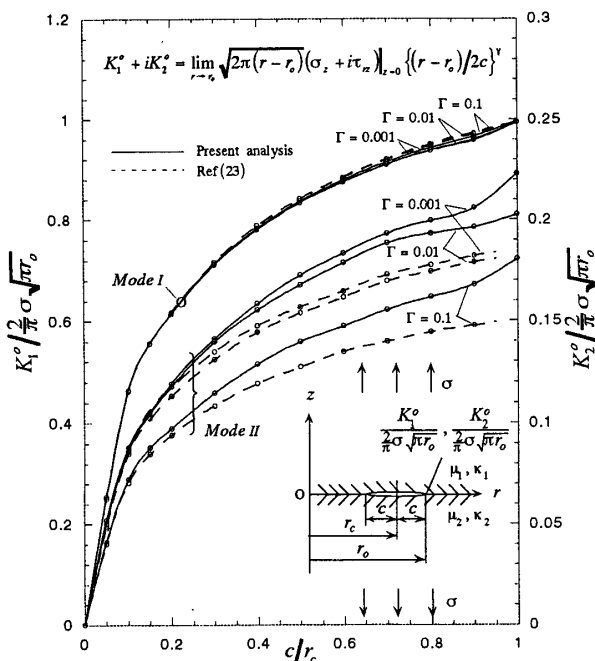


Fig. 3 $K_1^o/2\sigma\sqrt{\pi r_o}, K_2^o/2\sigma\sqrt{\pi r_o}$ at the outer tip of ring-shaped interface crack

$$\int_{r-\epsilon_0}^{r+\epsilon_0} \Delta u_z(\rho) \frac{2}{(r+\rho)(r-\rho)^2} E \rho d\rho = \int_{r-\epsilon_0}^{r+\epsilon_0} \Delta u_z(\rho) \frac{1}{\epsilon^2} \left[1 + \frac{\epsilon}{2r} + \left\{ -\frac{5}{16r^2} + \frac{1}{8r^2} \ln\left(\frac{8r}{\epsilon}\right) \right\} \epsilon^2 + \dots \right] d\epsilon \dots(18.a)$$

$$\int_{r-\epsilon_0}^{r+\epsilon_0} \Delta u_r(\rho) \left\{ \frac{r^2 + \rho^2}{(r+\rho)(r-\rho)^2} E - \frac{1}{(r+\rho)r} K \right\} d\rho = \int_{r-\epsilon_0}^{r+\epsilon_0} \Delta u_r(\rho) \left\{ \frac{r^2 + 4r\rho + \rho^2}{(r+\rho)^3 r} - \frac{8r^2 \rho^2}{(r+\rho)^3 (r-\rho)^2 r} \right\} E - \frac{1}{(r+\rho)r} K \Big| d\rho = \int_{r-\epsilon_0}^{r+\epsilon_0} \Delta u_r(\rho) \frac{1}{\epsilon^2} \left[1 + \frac{\epsilon}{2r} + \left\{ \frac{3}{16r^2} - \frac{3}{8r^2} \ln\left(\frac{8r}{\epsilon}\right) \right\} \epsilon^2 + \dots \right] d\epsilon \dots(18.b)$$

$$\Delta u_z(\rho) + i\Delta u_r(\rho) = \sum_{m=1}^2 \frac{1}{\mu_m} \frac{1 + \kappa_m}{4 \cosh(\pi \gamma / \mu)} \sqrt{c^2 - \rho^2} \left(\frac{c + \rho}{c - \rho} \right)^\gamma \times \left\{ F_1(\rho) + iF_2(\rho) \right\},$$

$$\sqrt{c^2 - \rho^2} \left(\frac{c + \rho}{c - \rho} \right)^\gamma = \sqrt{c^2 - \rho^2} \left[\cos \left\{ \ln \left(\frac{c + \rho}{c - \rho} \right) \right\}^\gamma + i \sin \left\{ \ln \left(\frac{c + \rho}{c - \rho} \right) \right\}^\gamma \right]$$

$$= \sqrt{c^2 - \rho^2} \left[\cos \left\{ \ln \left(\frac{c + r}{c - r} \right) \right\}^\gamma + i \sin \left\{ \ln \left(\frac{c + r}{c - r} \right) \right\}^\gamma \right]$$

$$\times \left[1 - \frac{\epsilon}{c^2 - r^2} (r - 2c\gamma) - \frac{\epsilon^2}{2(c^2 - r^2)^2} \{ (1 - 4\gamma^2)c^2 - 4cr\gamma \} + \dots \right],$$

$$F_1(\rho) + iF_2(\rho) = \sum_{n=1}^M b_n \rho^{n-1} + i \sum_{n=1}^M c_n \rho^{n-1},$$

$$\rho^{n-1} = r^{n-1} + (n-1)r^{n-2}\epsilon + \sum_{j=0}^{n-3} \{ (j+1)\rho^{(n-3-j)r} \} \epsilon^2 + \dots \dots\dots(18.c)$$

式(18)の被積分関数の $1/\epsilon^2$ の項、定数項、 $\ln(8r/\epsilon)$ の項を ϵ_0 を適当に小さくとして積分して求めれば、特異積分を正確に評価できる。

4. 数値計算結果と考察

4.1 解の収束性 表1に $\sigma_z = \sigma$ を受けるリング状界面き裂が $c/r_c = 0.9, \gamma/i = 0.07, 0.15$ の場合に数値計算で求めた F_1, F_2 の値の収束性を示す。ここで、 F_1^i は $r = r_i$ (図2参照)での F_1 の値で、 F_1^o は $r = r_o$ での F_1 の値である。本解析では二次元き裂の厳密解を利用している

Table 2. Dimensionless stress intensity factors F_m^i, F_m^o of interface crack

$$\left[\begin{aligned} F_m^i &= K_m^i / \left((r_i/r_o) \tau \sqrt{\pi c} \right), K_m^i = \lim_{r \rightarrow r_i} \sqrt{2\pi(r_i - r)} \tau_{z\theta} \Big|_{z=0} \\ F_m^o &= K_m^o / \tau \sqrt{\pi c}, K_m^o = \lim_{r \rightarrow r_o} \sqrt{2\pi(r - r_o)} \tau_{z\theta} \Big|_{z=0} \\ F_m^i &= F_m(r_i), F_m^o = F_m(r_o) \end{aligned} \right]$$

c/r_c	F_m^i	F_m^o
→ 0.0	1	1
0.1	1.018	0.970
0.2	1.027	0.935
0.3	1.027	0.899
0.4	1.019	0.864
0.5	1.002	0.831
0.6	0.973	0.801
0.7	0.928	0.773
0.8	0.857	0.748
0.9	0.724	0.726
→ 1.0		0.707

ので $c/r_c \rightarrow 1$ で収束性が悪くなるが、 $c/r_c = 0.9$ でも選点数 $M = 13$ で有効数字 3 けた程度の収束性がある。

図 3 に c/r_c および剛性比 ($\Gamma = \mu_2/\mu_1$) を変化させて解析を行ったときの本解析結果と西谷らの解析結果⁽²³⁾を比較したものを示す。ここで、図の中の $c/r_c \rightarrow 1$ の値は Kassir⁽¹⁵⁾ によって与えられている円板状界面き裂の厳密解である。外側のき裂先端の $K_1^o/(2\pi)\sigma\sqrt{\pi r_c}$ は、本解析結果、西谷らの結果ともに厳密解に無理なく一致することがわかる。しかし、 $K_2^o/(2\pi)\sigma\sqrt{\pi r_c}$ は本解析結果が $c/r_c \rightarrow 1$ で厳密解に無理なく一致しており、信頼性が高い。

4.2 リング状界面き裂のねじりの解析結果

遠方でねじりモーメントを受ける場合のリング状界面き裂の応力拡大係数の解析を行った。表 2 および図 4 に c/r_c を系統的に変化させて解析を行った結果を示す。ここで、 F_{III}^i は $r = r_i$ (図 2 参照) での F_{III} の値で、 F_{III}^o は

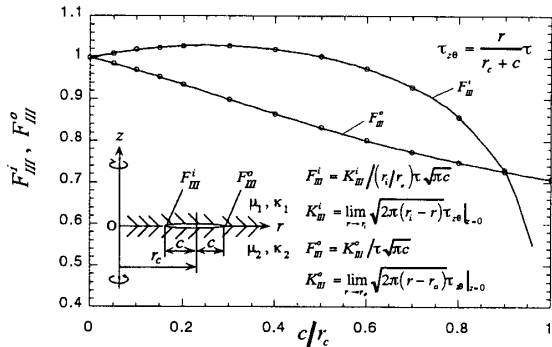


Fig. 4 F_{III}^i and F_{III}^o at the inner tip and outer tip of ring-shaped interface crack

$r = r_o$ での F_{III} の値である。図 4 より、 F_{III}^o は円板状界面き裂 ($c/r_c = 1$) のときの結果に無理なく一致する。

4.3 リング状界面き裂の引張りの解析結果

遠方で z 軸方向に引張りを受ける場合のリング状界面き裂の応力拡大係数の解析を行った。表 3, 4 および図 5, 6 に γ/i および c/r_c を系統的に変化させて解析を行った結果を示す。ここで、表 3 の $c/r_c \rightarrow 1$ の値は Kassir⁽¹⁵⁾ によって与えられている円板状界面き裂の厳密解である。

$$K_1^o + iK_2^o \rightarrow \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi c} \times F(\gamma) \quad (c/r_c \rightarrow 1), \quad F(\gamma) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2+\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\gamma)} \dots (19)$$

表 3, 4 において、 $\gamma/i = 0 \sim 0.15$ としたがこれは多くの材料の組合わせに対応している⁽²⁴⁾。次に図 7 はき裂外側の K_1^o , K_2^o を円板状界面き裂の解と比較するために $K_1^o/(2\pi)\sigma\sqrt{\pi r_c}$ と $K_2^o/(2\pi)\sigma\sqrt{\pi r_c}$ を用いて結果を整理した。図 7 のように、本解析結果は円板状界面き裂の解に $c/r_c \rightarrow 1$ で無理なく近づく。一方図 8 では、リング状界面き裂の内部における公称応力 σ_{net} を使って結果を整理した。

$$\sigma_{net} = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_0^{r_i} 2\pi r \sigma_z \Big|_{z=0} dr \dots (20)$$

図 8 の $c/r_c \rightarrow 1$ の値は高久田⁽²⁰⁾ によって与えられている深い環状界面き裂の解を示している。

$$K_1^i - iK_2^i \rightarrow \frac{1}{2} \sigma_{net} \sqrt{\pi r_i} \times F(\gamma) \quad (c/r_c \rightarrow 1),$$

$$F(\gamma) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{i}{\gamma} (e^{\pi\gamma} - e^{-\pi\gamma}) \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\frac{1}{2}-\gamma)} \dots (21)$$

図 8 に示すように、 K_1^i , K_2^i ともに高久田らの解に無理なく一致する。

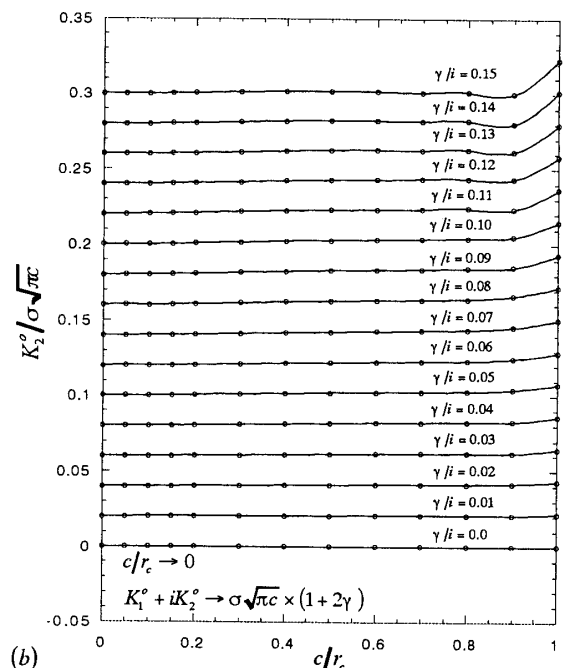
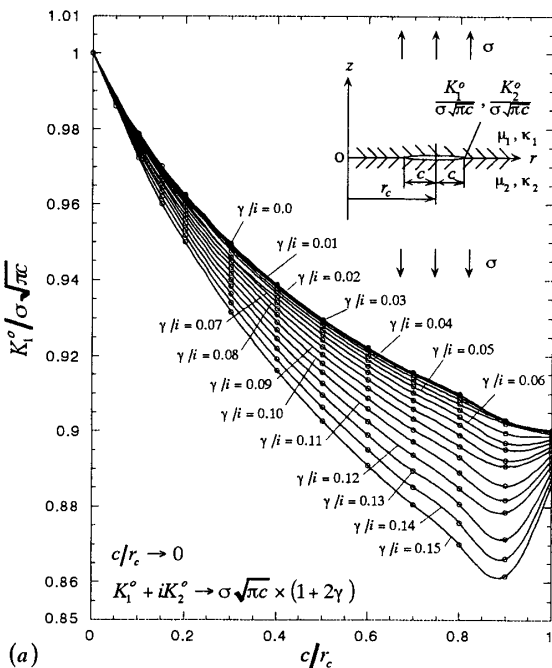


Fig. 5 Stress intensity factors at the outer tip of ring-shaped interface crack (a) $K_1^o/\sigma\sqrt{\pi r_c}$, (b) $K_2^o/\sigma\sqrt{\pi r_c}$ ($K_1^o + iK_2^o = \lim_{r \rightarrow r_o} \sqrt{2\pi(r-r_o)} (\sigma_z + i\tau_z) \Big|_{z=0} \left\{ (r-r_o)/2c \right\}^\gamma$)

Table 3. Dimensionless stress intensity factors $K_1^i/\sigma\sqrt{\pi c}$, $K_2^i/\sigma\sqrt{\pi c}$ of ring-shaped interface crack ($K_1^i + iK_2^i = \lim_{r \rightarrow r_0} \sqrt{2\pi(r-r_0)}(\sigma_z + i\tau_{rz})|_{z=0} \{ (r-r_0)/2c \}^{\gamma/2}$)

c/l_c	$\gamma/2$	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15
$K_1^i/\sigma\sqrt{\pi c}$	→ 0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.1	0.979	0.979	0.979	0.978	0.978	0.978	0.977	0.977	0.977	0.976	0.976	0.975	0.975	0.974	0.973	0.972
	0.2	0.963	0.962	0.962	0.962	0.961	0.961	0.960	0.960	0.960	0.959	0.958	0.957	0.956	0.955	0.954	0.950
	0.3	0.950	0.949	0.949	0.948	0.948	0.946	0.946	0.946	0.945	0.943	0.943	0.942	0.940	0.938	0.936	0.932
	0.4	0.939	0.939	0.938	0.938	0.937	0.936	0.935	0.934	0.933	0.931	0.929	0.928	0.927	0.925	0.922	0.919
	0.5	0.930	0.930	0.929	0.929	0.928	0.927	0.927	0.926	0.924	0.922	0.920	0.918	0.916	0.913	0.910	0.906
	0.6	0.922	0.922	0.922	0.921	0.920	0.919	0.917	0.916	0.914	0.912	0.911	0.909	0.906	0.903	0.899	0.895
	0.7	0.916	0.915	0.915	0.914	0.913	0.912	0.910	0.908	0.906	0.903	0.900	0.897	0.894	0.889	0.885	0.881
	0.8	0.910	0.910	0.909	0.908	0.907	0.906	0.904	0.902	0.899	0.896	0.893	0.889	0.886	0.882	0.877	0.871
	0.9	0.903	0.903	0.903	0.903	0.902	0.900	0.897	0.895	0.892	0.889	0.886	0.882	0.879	0.875	0.866	0.862
→ 1.0 ⁽¹⁵⁾	0.900	0.900	0.900	0.899	0.899	0.899	0.898	0.897	0.896	0.895	0.894	0.893	0.891	0.889	0.888	0.886	
$K_2^i/\sigma\sqrt{\pi c}$	→ 0.0	0.0000	0.0200	0.0400	0.0600	0.0800	0.1000	0.1200	0.1400	0.1600	0.1800	0.2000	0.2200	0.2400	0.2600	0.2800	0.3000
	0.1	0.0000	0.0200	0.0401	0.0601	0.0801	0.1001	0.1202	0.1402	0.1601	0.1802	0.2002	0.2202	0.2401	0.2601	0.2800	0.3000
	0.2	0.0000	0.0201	0.0402	0.0604	0.0805	0.1006	0.1207	0.1407	0.1608	0.1808	0.2009	0.2209	0.2409	0.2608	0.2813	0.3015
	0.3	0.0000	0.0202	0.0404	0.0606	0.0808	0.1014	0.1218	0.1419	0.1623	0.1822	0.2023	0.2224	0.2422	0.2614	0.2819	0.3015
	0.4	0.0000	0.0203	0.0406	0.0610	0.0812	0.1019	0.1221	0.1424	0.1627	0.1828	0.2034	0.2231	0.2430	0.2625	0.2821	0.3017
	0.5	0.0000	0.0204	0.0408	0.0614	0.0816	0.1023	0.1226	0.1429	0.1631	0.1833	0.2039	0.2235	0.2435	0.2625	0.2817	0.3014
	0.6	0.0000	0.0205	0.0410	0.0617	0.0820	0.1028	0.1230	0.1433	0.1635	0.1837	0.2036	0.2235	0.2435	0.2625	0.2817	0.3014
	0.7	0.0000	0.0206	0.0413	0.0619	0.0824	0.1032	0.1234	0.1437	0.1641	0.1842	0.2042	0.2234	0.2436	0.2625	0.2817	0.3014
	0.8	0.0000	0.0207	0.0417	0.0620	0.0827	0.1034	0.1236	0.1439	0.1644	0.1845	0.2045	0.2234	0.2436	0.2625	0.2817	0.3014
	0.9	0.0000	0.0206	0.0417	0.0620	0.0827	0.1034	0.1236	0.1439	0.1644	0.1845	0.2045	0.2234	0.2436	0.2625	0.2817	0.3014
→ 1.0 ⁽¹⁵⁾	0.0000	0.0215	0.0430	0.0645	0.0859	0.1074	0.1289	0.1504	0.1719	0.1934	0.2150	0.2365	0.2580	0.2795	0.3011	0.3226	

Table 4. Dimensionless stress intensity factors $K_1^i/\sigma\sqrt{\pi c}$, $-K_2^i/\sigma\sqrt{\pi c}$ of ring-shaped interface crack ($K_1^i - iK_2^i = \lim_{r \rightarrow r_0} \sqrt{2\pi(r-r_0)}(\sigma_z - i\tau_{rz})|_{z=0} \{ (r-r_0)/2c \}^{\gamma/2}$)

c/l_c	$\gamma/2$	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15
$K_1^i/\sigma\sqrt{\pi c}$	→ 0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	0.1	1.068	1.068	1.068	1.069	1.070	1.071	1.071	1.072	1.073	1.074	1.075	1.077	1.079	1.081	1.083	1.085
	0.2	1.118	1.118	1.118	1.119	1.120	1.121	1.122	1.123	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.139	1.142	1.146
	0.3	1.182	1.182	1.183	1.184	1.185	1.187	1.188	1.191	1.194	1.197	1.200	1.204	1.208	1.213	1.218	1.224
	0.4	1.269	1.269	1.270	1.271	1.273	1.275	1.278	1.281	1.285	1.289	1.294	1.299	1.305	1.312	1.319	1.327
	0.5	1.390	1.390	1.391	1.393	1.395	1.398	1.402	1.407	1.412	1.418	1.425	1.432	1.440	1.450	1.460	1.470
	0.6	1.572	1.573	1.574	1.577	1.580	1.584	1.590	1.596	1.603	1.612	1.621	1.632	1.643	1.656	1.670	1.685
	0.7	1.884	1.885	1.887	1.891	1.896	1.903	1.910	1.920	1.931	1.943	1.957	1.972	1.992	2.009	2.030	2.055
	0.8	2.576	2.577	2.580	2.587	2.595	2.606	2.620	2.636	2.655	2.677	2.698	2.728	2.772	2.809	2.820	2.854
	→ 1.0 ⁽¹⁵⁾	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15
$-K_2^i/\sigma\sqrt{\pi c}$	→ 0.0	0.0000	0.0400	0.0600	0.0800	0.1000	0.1200	0.1400	0.1600	0.1800	0.2000	0.2200	0.2400	0.2600	0.2800	0.3000	0.3000
	0.1	0.0000	0.0400	0.0600	0.0801	0.1001	0.1202	0.1402	0.1601	0.1802	0.2002	0.2202	0.2401	0.2601	0.2800	0.3000	0.3000
	0.2	0.0000	0.0401	0.0602	0.0803	0.1003	0.1204	0.1404	0.1603	0.1804	0.2004	0.2204	0.2403	0.2603	0.2802	0.3002	0.3002
	0.3	0.0000	0.0402	0.0604	0.0806	0.1006	0.1207	0.1407	0.1608	0.1808	0.2009	0.2209	0.2409	0.2609	0.2808	0.3008	0.3008
	0.4	0.0000	0.0403	0.0606	0.0808	0.1014	0.1218	0.1419	0.1623	0.1822	0.2023	0.2224	0.2422	0.2622	0.2821	0.3021	0.3021
	0.5	0.0000	0.0404	0.0608	0.0812	0.1019	0.1221	0.1424	0.1627	0.1828	0.2034	0.2231	0.2430	0.2625	0.2821	0.3017	0.3017
	0.6	0.0000	0.0405	0.0610	0.0814	0.1019	0.1222	0.1425	0.1628	0.1830	0.2036	0.2235	0.2435	0.2625	0.2817	0.3014	0.3014
	0.7	0.0000	0.0406	0.0614	0.0819	0.1023	0.1226	0.1429	0.1631	0.1833	0.2039	0.2235	0.2435	0.2625	0.2817	0.3014	0.3014
	0.8	0.0000	0.0407	0.0617	0.0822	0.1028	0.1230	0.1433	0.1635	0.1837	0.2036	0.2235	0.2435	0.2625	0.2817	0.3014	0.3014
	0.9	0.0000	0.0408	0.0619	0.0824	0.1032	0.1234	0.1437	0.1641	0.1842	0.2042	0.2234	0.2436	0.2625	0.2817	0.3014	0.3014
→ 1.0 ⁽¹⁵⁾	0.0000	0.0430	0.0645	0.0859	0.1074	0.1289	0.1504	0.1719	0.1934	0.2150	0.2365	0.2580	0.2795	0.3011	0.3226	0.3226	

5. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を用いて3次元界面き裂問題を厳密に解析する方法を考察した。具体的には、リング状界面き裂が遠方でねじりモーメントを受ける場合とz軸方向に引張りを受ける場合について解析を行った。得られた結果をまとめると以下のようなになる。

(1) 未知関数を基本密度関数と重み関数の積で近似す

る方法を用いて良好な収束性(表1)と任意の材料の組合わせに対する応力拡大係数(表3,4)が得られた。(2) リング状界面き裂が遠方でねじりモーメントを受ける場合、2次元界面き裂が面外せん断を受ける場合と同様に応力拡大係数が剛性比に依存しないことがわかった(式(12))。また、 c/r_c を系統的に変化させたときの応力拡大係数を図表に示した(表2, 図4)。(3) リング状界面き裂がz軸方向に引張りを受ける場

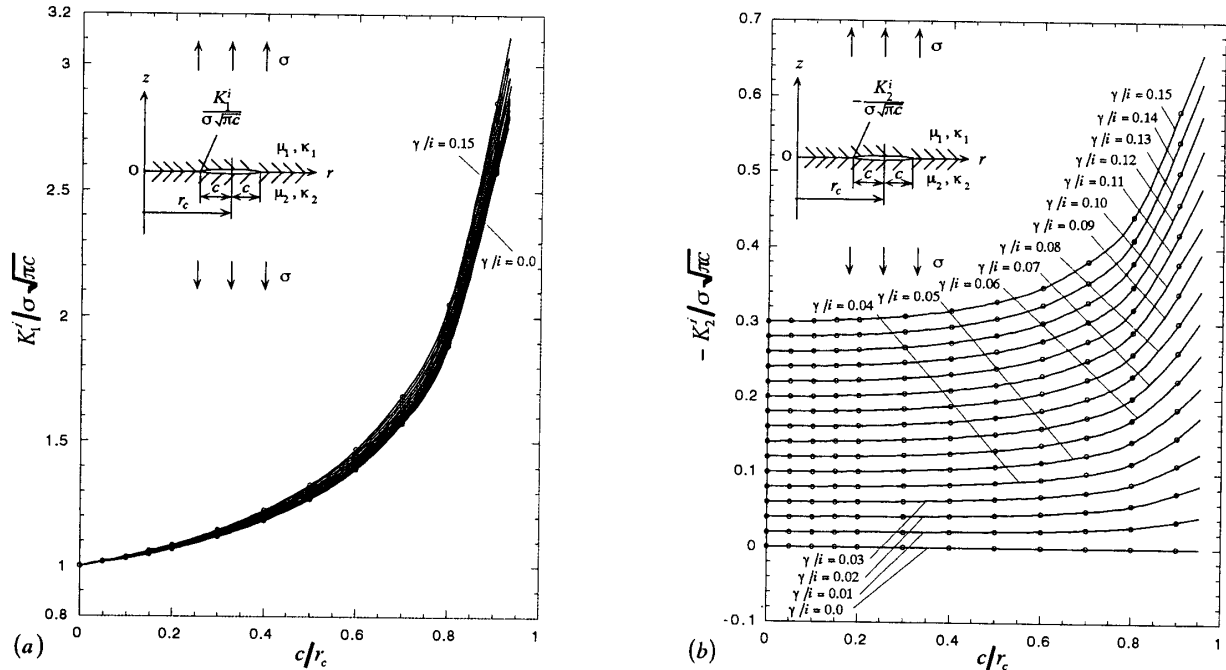


Fig.6 Stress intensity factors at the inner tip of ring-shaped interface crack
 (a) $K_1^i / \sigma \sqrt{\pi c}$, (b) $-K_2^i / \sigma \sqrt{\pi c}$ ($K_1^i - iK_2^i = \lim_{r \rightarrow r_c} \sqrt{2\pi(r_i - r)} (\sigma_z - i\tau_{rz})|_{z=0} \{ (r_i - r)/2c \}^\gamma$)

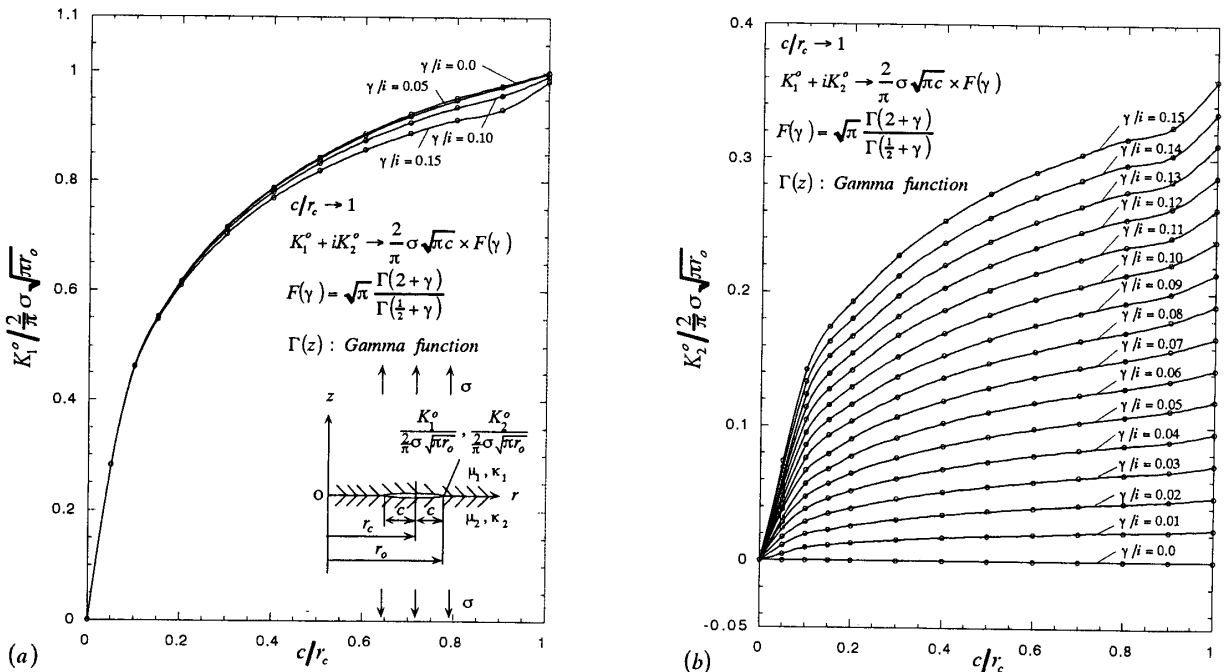


Fig.7 Stress intensity factors at the outer tip of ring-shaped interface crack
 (a) $K_1^o / 2\sigma \sqrt{\pi r_o}$, (b) $K_2^o / 2\sigma \sqrt{\pi r_o}$ ($K_1^o + iK_2^o = \lim_{r \rightarrow r_o} \sqrt{2\pi(r - r_o)} (\sigma_z + i\tau_{rz})|_{z=0} \{ (r - r_o)/2c \}^\gamma$)

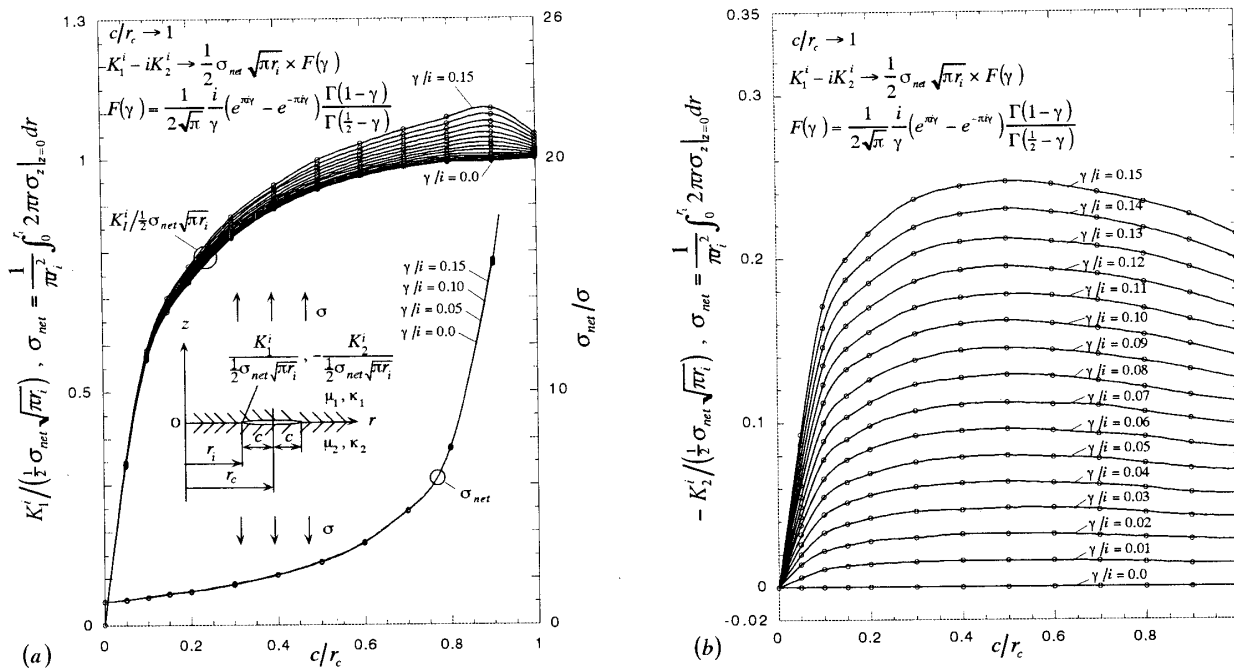


Fig.8 Stress intensity factors at the inner tip of ring-shaped interface crack
 (a) $K_1^i / (\frac{1}{2} \sigma_{net} \sqrt{\pi r_i})$, (b) $-K_2^i / (\frac{1}{2} \sigma_{net} \sqrt{\pi r_i})$ ($K_1^i - iK_2^i = \lim_{r \rightarrow r_i} \sqrt{2\pi(r_i - r)} (\sigma_z - i\tau_{rz})|_{z=0} \{ (r_i - r)/2c \}^{\gamma/i}$)

Table 5. σ_{net}/σ at the inside of ring-shaped interface crack

$$\left[\sigma_{net} = \frac{1}{\pi r_i^2} \int_0^{r_i} 2\pi r \sigma_z|_{z=0} dr \right]$$

c/r_c \ γ/i	0.00	0.05	0.10	0.15
$\rightarrow 0.0$	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.209	1.207	1.197	1.176
0.2	1.456	1.453	1.437	1.411
0.3	1.763	1.758	1.742	1.714
0.4	2.163	2.159	2.141	2.116
0.5	2.716	2.712	2.694	2.660
0.6	3.537	3.534	3.517	3.485
0.7	4.898	4.893	4.876	4.842
0.8	7.606	7.594	7.570	7.534
0.9	15.65	15.58	15.50	15.44

合、式(16)の γ のみに依存することがわかった。また、 γ/i および c/r_c を系統的に変化させたときの応力拡大係数を図に示した(図5~8)。本解析結果は $c/r_c \rightarrow 0$ で2次元界面き裂の解に一致する。また、 $c/r_c \rightarrow 1$ で外側のき裂先端の解析結果は、Kassirら⁽¹⁵⁾によって与えられている厳密解に無理なく一致する(図7)。また、内側のき裂先端の解析結果は、高久田ら⁽²⁰⁾によって与えられている深い環状き裂の解と一致する(図8)。

文献

(1)Salganik, R. L., The Brittle Fracture of Cemented Bodies, Prikl. Mat. Mekh., **27** (1963), 957-962.
 (2)Erdogan, F., Stresses Distribution in a Nonhomogeneous Elastic Plane with Crack, J. Appl. Mech., **30** (1963), 232-236.
 (3)England, A. H., A Crack between Dissimilar Media, J. Appl. Mech., **32** (1965), 400-402.
 (4)Rice, J. R. and Sih, G. C., Plane Problem of Cracks in Dissimilar Media, J. Appl. Mech., **32** (1965), 418-423.
 (5)Comninou, M., The Interface Crack, J. Appl. Mech., **44** (1977), 631-636.
 (6)Noda, N-A. and Oda, K., Interaction Effect of Stress Intensity Factors for

Any Number of Collinear Interface Cracks, Int. J. Fracture, **84** (1997), 117-128.
 (7)Willis, J. R., Fracture Mechanics of Interfacial Crack, J. Mech. Phys. Solids, **19** (1971), 353-368.
 (8)Tucker, M. O., Cracks in Two-Phase Solids under Longitudinal Shear Loading, Int. J. Fracture, **10** (1974), 323-336.
 (9)Erdogan, F. and Gupta, G. D., Bonded Wedges with an Interface Crack under Anti-Plane Shear Loading, Int. J. Fracture, **11** (1975), 583-593.
 (10)Zhang, X. S., A Central Crack at the Interface between Two Different Media in a Rectangular Sheet under Anti-Plane Shear, Engng Frac. Mech., **19** (1984), 709-715.
 (11)Delale, F., Mode-III Fracture of Bonded Nonhomogeneous Materials, Engng Frac. Mech., **22** (1985), 213-226.
 (12)Willis, J. R., The Penny-Shaped Crack on an Interface, Q. J. Mech. Appl. Math., **25** (1972), 367-385.
 (13)Mossakovski, V. I. and Rybka, M. T., Generalization of the Griffith-Sneddon Criterion for the Case of a Nonhomogeneous Body, Prikl. Mat. Mekh., **28** (1964), 1061-1069.
 (14)Erdogan, F., Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials Containing Circular or Ring-Shaped Cavities, Trans. ASME, Ser.E, J. Appl. Mech., **32** (1965), 829-836.
 (15)Kassir, M. K. and Bregman, A. M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack between Two Dissimilar Materials, Trans. ASME, Ser.E, J. Appl. Mech., **39** (1972), 308-310.
 (16)Lowengrub, M. and Sneddon, I. N., The Effect of Internal Pressure on a Penny-Shaped Crack at the Interface of Two Bonded Dissimilar Elastic Half-Spaces, Int. J. Engng Sci., **12** (1974), 387-396.
 (17)Keer, L. M., Chen, S. H. and Comninou, M., The Interface Penny-Shaped Crack Reconsidered, Int. J. Engng Sci., **16** (1978), 765-772.
 (18)Shibuya, T., et al., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bonded Half-Spaces, JSME Int. J., **32** (1989), 485-491.
 (19)結城良治・曹相鳳, 異材界面き裂の応力拡大係数の境界要素解析, 機論, **55-510** (1989), 340-347.
 (20)高久田和夫・渋谷寿一・小泉亮, き裂を有する二層無限体の応力解析, 機論, No. 780-3 (1978), 167-169.
 (21)Chen, M-C., Noda, N-A. and Tang, R., Application of Finite-Part Integrals to Planar Interfacial Fracture Problems in Three-Dimensional Bimaterials, ASME Journal of Applied Mechanics, **66** (1999), 885-890.
 (22)西谷弘信・才本明秀・野口博司, 体積力法に基づく界面き裂の解析, 機論, **59-557, A** (1993), 68-73.
 (23)西谷弘信・才本明秀・野口博司・陳玳珩, 体積力法による軸対称界面き裂の解析, 機論, No. 920-72 (1992), 237-238.
 (24)Sih, G. C. and Chen, E. P., Cracks in Composite Materials, Ch.3 (Mechanics of Fracture VI, edited by Sih, G. C.), Martinus Nijhoff Publishers, Hague (1981).