

特異積分方程式による自由表面近傍の傾斜だ円形内部き裂の解析*

小田和広*¹, 村岡善之*², 野田尚昭*³

Analysis of an Elliptical Internal Crack near Free Surface Using Singular Integral Equation of the Body Force Method

Kazuhiro ODA*⁴, Yoshiyuki MURAOKA and Nao-aki NODA^{*4} Department of Mechanical and Electrical Engineering, Tokuyama College of Technology,
3538 Takajo, Kume, Tokuyama-shi, Yamaguchi, 745-8585 Japan

In this paper, a singular integral equation method is applied to calculate the distribution of stress intensity factor along crack front of an elliptical internal crack near the free surface. The stress field induced by the force doublet in a semi-infinite body is used as the fundamental solution. Then, the problem is formulated as an integral equation with a singularity of the form of r^{-3} . In the numerical calculation, the unknown functions of the density of body force doublet are approximated by the product of fundamental density function and polynomials. The numerical results show that the present method yields smooth variation of stress intensity factors along crack front very accurately even when the crack is extremely near from the free surface. The mode I, II and III stress intensity factors for an inclined elliptical crack are shown for various geometrical conditions.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Inclined Elliptical Internal Crack, Numerical Solution, Singular Integral Equation

1. 結 言

一般構造物では, 材料の表面近くの内部き裂や表面き裂が破壊の起点となることが多い。そのため, き裂の存在が材料強度に与える影響を解析することは, 安全性や信頼性を確保するために重要であり, 破壊力学的手法によれば, 応力場の厳しさを表す応力拡大係数を求めることが重要となる。これまで種々の解析方法によってそれらの応力拡大係数が求められている^{(1)~(9)}が, 三次元き裂の解析は非常に困難で, これまではき裂の最深部あるいは応力拡大係数の最大値のみの場合が多く, き裂の進展解析などに使用できるような三次元き裂前縁の全てのK値の解析例は少ない。また, 材料表面近傍や干渉の大きなき裂の場合, 各解析方法により結果に差が見られ⁽⁶⁾, また自由表面に対して角度を持った内部き裂の解析の事例は見当たらないため, これを解析することは信頼設計の分野において大変有意義であるといえる。特に, 斜めき裂等の欠陥を主応力に垂直な平面き裂に置き換える際の誤差を正確に把握する意味でも興味深い。

そこで本研究では, 体積力法の特異積分方程式を高精度に解く方法を用い, 図1に示すような自由表面

近傍に存在する傾斜だ円形き裂前縁の応力拡大係数の滑らかな分布を求めることを目的とする。

2. 解析方法

2.1 体積力法の特異積分方程式 図1のように $z'x$ 平面 ($y' = 0$) を自由表面とする半無限体が z' 方向に一様引張応力 σ_0^z を受ける場合を考える。 xy' 平面に対して角度 ϕ だけ傾いた xy 平面上に主軸長 $2a$, 深さ $2b$, 表面からの距離 d のだ円形内部き裂があるものとする。このとき体積力法によれば, 問題はき裂の存在しない半無限体中においてき裂となるべき仮想境界上に分布された z 方向引張りの標準型体積力対密度 $f_{zz}(\xi, \eta)$, yz 方向せん断の標準型体積力対密度

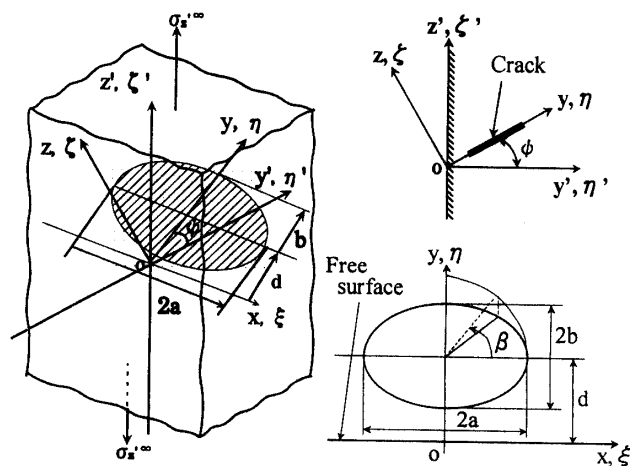


Fig.1 Inclined elliptical internal crack

* 原稿受付 2001年4月20日。

¹ 正員, 徳山工業高等専門学校(☎745-8585 徳山市久米高城3538)。² 学生員, 徳山工業高等専門学校専攻科。³ 正員, 九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

E mail: oda@tokuyama.ac.jp

$f_{yz}(\xi, \eta)$, zx 方向せん断の標準型体積力対の密度 $f_{zx}(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分方程式で表される. ここで (ξ, η) は着力点の (x, y) 座標である. 式 (1. a), (1. b), (1. c) は, それぞれき裂面における境界条件 $\sigma_z=0, \tau_{yz}=0, \tau_{zx}=0$ に相当する.

$$\begin{aligned} & \frac{(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)^2} \left[\iint_S \frac{f_{zz}(\xi, \eta)}{r_1^3} d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S K_{zz}^{fzz}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \\ & + \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S K_{zz}^{fyz}(\xi, \eta, y, \psi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S K_{zz}^{fzx}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \\ & = -\sigma_z^\infty \cos^2 \psi \quad \dots\dots\dots (1 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S K_{yz}^{fyz}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S K_{yz}^{fzx}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] \\ & = -\sigma_z^\infty \cos \psi \sin \psi \quad \dots\dots\dots (1 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(x-\xi)^2}{r_1^5} \right\} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S K_{zx}^{fyz}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & + \left. \iint_S K_{zx}^{fzx}(\xi, \eta, x, y, \psi) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = 0 \quad \dots\dots (1 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & y = y' / \cos \psi \quad z = z' / \cos \psi \\ & r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y'-\eta')^2 + (z'-\zeta')^2} \\ & S = \left\{ (\xi, \eta) \mid (\xi/a)^2 + \{(\eta-d)/b\}^2 \leq 1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (1 \cdot d)$$

図 2 にき裂面上に分布させる 3 種類の集中力対を示す. これらの分布密度が, それぞれ未知数 $f_{zz}(\xi, \eta)$, $f_{yz}(\xi, \eta)$, $f_{zx}(\xi, \eta)$ に相当する. 左辺の $1/r_1^3$ を含む項は無窮大中のだ円き裂の存在を表現し, 注目点と着力点が一一致するときに特異性を示す特異項である. また, \iint_S は発散積分の有限部分を表す. 左辺の $K_{zz}^{fzz}(\xi, \eta, x, y, \psi)$ 等は自由表面の境界条件を満足させる関数で, 領域 S はき裂のない半無限体中に想定しただ円形内部き裂となるべき仮想き裂面を表している.

2・2 数値解析方法 体積力法では体積力対密度を式(2)のように基本密度関数と重み関数の積で近似する.

$$\left. \begin{aligned} & f_{zz}(\xi, \eta) = F_{zz}(\xi_a, \eta_b) w_{zz}(\xi_a, \eta_b) \\ & f_{yz}(\xi, \eta) = F_{yz}(\xi_a, \eta_b) w_{yz}(\xi_a, \eta_b) \\ & f_{zx}(\xi, \eta) = F_{zx}(\xi_a, \eta_b) w_{zx}(\xi_a, \eta_b) \\ & w_{zz}(\xi_a, \eta_b) = \frac{4(1-\nu)^2 b \sigma_z^\infty}{(1-2\nu)E(k)} \sqrt{1-\xi_a^2 - \eta_b^2} \\ & w_{yz}(\xi_a, \eta_b) = \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{yz}^\infty}{C(k)} \sqrt{1-\xi_a^2 - \eta_b^2} \\ & w_{zx}(\xi_a, \eta_b) = \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{zx}^\infty}{B(k)} \sqrt{1-\xi_a^2 - \eta_b^2} \\ & B(k) = (k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k) \\ & C(k) = (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k) \\ & k' = b/a \leq 1 \quad k = \sqrt{1-(b/a)^2} \\ & \xi_a = \xi/a \quad \eta_b = (\eta-d)/b \\ & K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}} \\ & E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (2)$$

ここで $w_{zz}(\xi_a, \eta_b)$, $w_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $w_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は基本密度関数を表し, 無窮大中の xy 平面上にあるだ円形き裂の遠方で, それぞれ $\sigma_z^\infty, \tau_{yz}^\infty, \tau_{zx}^\infty$ が作用したときのだ円き裂の応力場を厳密に表現する体積力対密度に相当する (実際の数値計算では $\sigma_z^\infty = \tau_{yz}^\infty = \tau_{zx}^\infty = 1$ とおく). そして $F_{zz}(\xi_a, \eta_b), F_{yz}(\xi_a, \eta_b), F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は重み関数に相当する. このとき, (ξ_a, η_b) はき裂中心からの (x, y) 座標の距離を表している. このような基本密度関数を導入することにより, き裂先端の特異性を厳密に表現することができる. 本研究では, 重み関数を以下の式(3. a)~(3. d)のような曲面関数で近似する.

$$\begin{aligned} & F_{zz}(\xi_a, \eta_b) = \alpha_0 + \alpha_1 \eta_b + \dots + \alpha_{n-1} \eta_b^{n-1} + \alpha_n \eta_b^n \\ & \quad + \alpha_{n+1} \xi_a^{2 \times 1} + \alpha_{n+2} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b + \dots + \alpha_{2n} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b^{n-1} \\ & \quad \vdots \\ & \quad + \alpha_{1-2} \xi_a^{2 \times (n-1)} + \alpha_{1-1} \xi_a^{2 \times (n-1)} \\ & \quad + \alpha_1 \xi_a^{2 \times n} \\ & = \sum_{i=0}^l \alpha_i G_i(\xi_a, \eta_b) \quad \dots\dots\dots (3 \cdot a) \end{aligned}$$

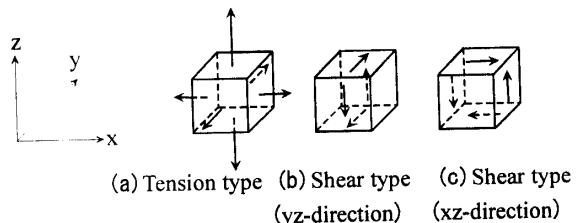


Fig.2 Three kinds of force doublets

$$\begin{aligned}
 F_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \beta_0 + \beta_1 \eta_b + \dots \\
 &+ \beta_{n-1} \eta_b^{n-1} + \beta_n \eta_b^n \\
 &+ \beta_{n+1} \xi_a^{2 \times 1} + \beta_{n+2} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b + \dots + \beta_{2n} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b^{n-1} \\
 &\quad \vdots \\
 &+ \beta_{l-2} \xi_a^{2 \times (n-1)} + \beta_{l-1} \xi_a^{2 \times (n-1)} \eta_b + \beta_l \xi_a^{2 \times n} \\
 &= \sum_{i=0}^l \beta_i G_i(\xi_a, \eta_b) \dots \dots \dots (3 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \gamma_0 \xi_a + \gamma_1 \xi_a \eta_b + \dots \\
 &+ \gamma_{n-1} \xi_a \eta_b^{n-1} + \gamma_n \xi_a \eta_b^n \\
 &+ \gamma_{n+1} \xi_a^{2 \times 1+1} + \gamma_{n+2} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b + \dots + \gamma_{2n} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b^{n-1} \\
 &\quad \vdots \\
 &\gamma_{l-2} \xi_a^{2 \times (n-1)+1} + \gamma_{l-1} \xi_a^{2 \times (n-1)+1} \eta_b + \gamma_l \xi_a^{2 \times n+1} \\
 &= \sum_{i=0}^l \gamma_i Q_i(\xi_a, \eta_b) \dots \dots \dots (3 \cdot c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 l &= \sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 G_0(\xi_a, \eta_b) &= 1, G_1(\xi_a, \eta_b) = \eta_b, \dots \\
 \dots, G_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1}, \dots, G_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2 \times n} \\
 Q_0(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a, Q_1(\xi_a, \eta_b) = \xi_a \eta_b, \dots \\
 \dots, Q_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1+1}, \dots, Q_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2 \times n+1} \dots (3 \cdot d)
 \end{aligned}$$

ここで $F_{zz}(\xi_a, \eta_b)$ は z 方向引張型体積力対の重み関数である。これは、 α_i ($i=0, 1, 2, \dots, (n+1)(n+2)/2$) を係数とする ξ_a の偶数乗と η_b のべき乗の組み合わせによる多項式の表現を採用している。また、yz 方向せん断型体積力対の重み関数 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$ は同様の多項式で与えられ、zx 方向せん断型体積力対の重み関数 $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ は ξ_a の奇数乗と η_b のべき乗の組み合わせによる多項式によって表現される。

き裂面の選点の取り方については、図3のようにき裂前縁の位置を半径1の円に写像して、 x_0 軸、 y_0 軸について間隔0.04のメッシュを切り、その格子点を選点とした。また、積分を実行するときに注目点(x,y)と着力点(ξ, η)が一致あるいは極近傍の場合、特異性を有するために通常の数値積分によりその値を求めることができない。このような特異積分の処理については野田ら⁽⁶⁾⁽⁷⁾と同様の解法を用いた。

3. 解析結果および考察

以上の理論に基づいて計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータn、だ円形内部き裂の傾斜角 ϕ を変化させ、き裂形状比 $b/a=0.5, 0.8$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ として計算した。数値積分には二重指数関数型積分公式(FACOM FORTRAN SSL II AQME)等のサブルーチンを用いて計算した。また結果として

得られた応力拡大係数 K_I, K_{II}, K_{III} をまとめるのに以下の無次元化値 M_I および F_I, F_{II}, F_{III} を用いた。

$$M_I(\beta) = \frac{K_I(\beta)}{K_{IE}(\beta)} \dots \dots \dots (4 \cdot a)$$

$K_{IE}(\beta)$: Stress intensity factor of elliptical crack in an infinite body

$$\begin{aligned}
 F_I(\beta) &= \frac{K_I(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} \\
 &= \frac{F_{zz}}{E(k)} \left[\sin^2 \beta + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \cos^2 \beta \right]^{1/4} \\
 F_{II}(\beta) &= \frac{K_{II}(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \left(F_{zx} \frac{k' \cos \beta}{B(k)} \right. \\
 &\quad \left. + F_{yz} \frac{\sin \beta}{C(k)} \right) \frac{k^2}{(1-k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}} \\
 F_{III}(\beta) &= \frac{K_{III}(\beta)}{\sigma_z^\infty \sqrt{\pi b}} = \left(-F_{zx} \frac{\sin \beta}{B(k)} \right. \\
 &\quad \left. + F_{yz} \frac{k' \cos \beta}{C(k)} \right) \frac{(1-\nu)k^2}{(1-k^2 \cos^2 \beta)^{1/4}}
 \end{aligned} \dots (4 \cdot b)$$

表1に無次元化応力拡大係数 F_I の収束性を示す。y 軸に対称であるため $\beta = -90^\circ \sim 90^\circ$ を示した。き裂が自由表面から離れている $d/b=2.00$ の場合は $n=3 \sim 5$ 程度で小数点以下5桁の精度で非常に良好な収束性が得られた。また表面に極めて近い $d/b=1.05$ の場合は若干精度は落ちるものの、 $n=20$ 程度で小数点以下4桁の収束性が得られた。

図4は、き裂面の各選点における境界条件の満足度を示している。このグラフでは、値が0に近いほど境界条件を精度良く満たしていることを表している。図より分かるように $d/b=2.00$ では小数点以下5桁、 $d/b=1.05$ では小数点以下4桁程度で境界条件を満足している。

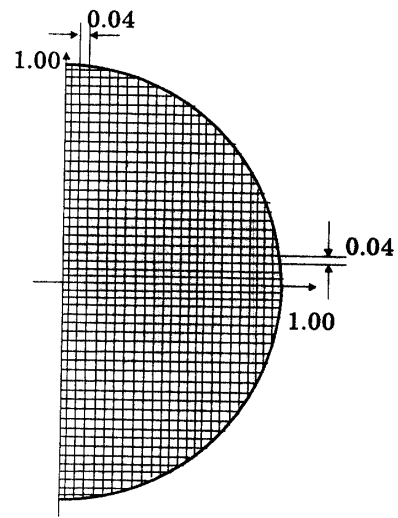


Fig.3 Collocation points of crack plane

表2に本解析結果と野口ら⁽⁵⁾による解析結果を比較したものを示す。ここでは、無限体中における同じ傾きのだ円形き裂の応力拡大係数で無次元化したものである M_I を用いて比較した。このように本解析結果と野口らの解は非常によく一致している。極表面近傍($d/b=1.05, \beta=270^\circ$)においては結果の違いが認められるが、これは野口らによる解析のメッシュ分割が、本解析方法のものと比較して十分でなかったためであると考えられる。以上のことから、本解析方法による計算結果は信頼できるものであると考えられる。

以下には、本法により解析された自由表面近傍の傾斜だ円形き裂の応力拡大係数について得られた結果を述べる。

図5に、き裂前縁での無次元化応力拡大係数 F_I, F_{II}, F_{III} の分布を示す。このようにき裂全周にわたり滑らかな応力拡大係数の分布が得られている。図5で、 F_I と F_{II} は y 軸($\beta=90^\circ$ および 270°)について対称であり、 F_{III} は逆対称のグラフとなっている。また、 F_I と F_{II} に関しては、最も自由表面に近い $\beta=270^\circ$ で最大値をとり、き裂が表面に近づくほど

その値は大きくなる。一方、 F_{III} は $\beta=0^\circ$ (180°)で最大値を示し、その分布はき裂の表面からの距離にほとんど影響を受けていないことが分かる。

図6は、無次元化応力拡大係数の最大値 $F_{I \max}, F_{II \max}, F_{III \max}$ とき裂の傾き角 ϕ の関係をグラフで表したものである。き裂の傾き角 ϕ が大きくなるにつれて $F_{I \max}$ は減少し、 $F_{II \max}, F_{III \max}$ は増加する。 $F_{III \max}$ は傾き角 ϕ が 45° まで変化しても d/b による影響はあまり見られない。

次に、傾斜き裂の最も表面に近い点において、最もき裂が伝ばし易いと考えられる荷重と垂直方向の応力場の厳しさを表す尺度 \hat{K}_I を考える⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。

$$\hat{K}_I = \left(\frac{3}{4} \cos \frac{\phi}{2} + \frac{1}{4} \cos \frac{3}{2} \phi \right) K_I - \left(\frac{3}{4} \sin \frac{\phi}{2} + \frac{3}{4} \sin \frac{3}{2} \phi \right) K_{II} \quad \dots\dots\dots (5)$$

表3に、傾斜だ円形き裂の $\hat{F}_{I \max}$ を示す。比較のために、投影面積が同じで xy' 平面に対して傾きのないだ円形き裂の $F_{I \max}$ も示した。き裂の投影方法は

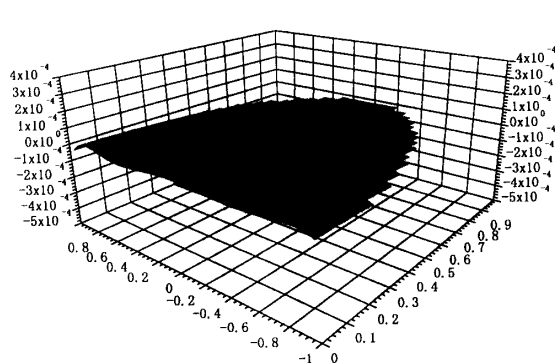
Table 1 Dimensionless stress intensity factor F_I along the crack front

(a) $F_I(\beta) = K_I(\beta) / \sigma_2^\infty \sqrt{\pi b}$, $b/a=0.5, d/b=2.00, \phi=0^\circ, \nu=0.3$

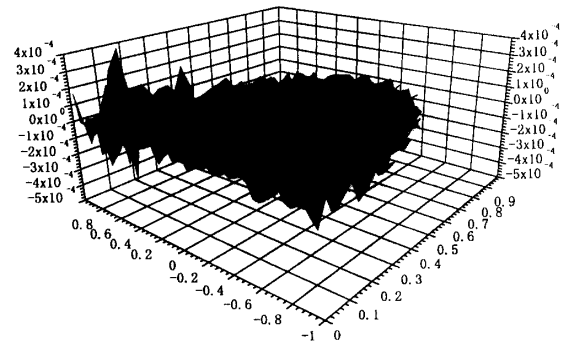
n	$\beta=90$ [deg.]	80	70	60	30	0	-30	-60	-70	-80	-90
1	0.83762	0.83278	0.81839	0.79483	0.68076	0.59353	0.69693	0.80732	0.83234	0.84765	0.85281
2	0.83817	0.83339	0.81915	0.79578	0.68190	0.59365	0.68603	0.80769	0.83350	0.84943	0.85482
3	0.83822	0.83343	0.81914	0.79570	0.68169	0.59370	0.68601	0.80753	0.83352	0.84963	0.85509
4	0.83818	0.83339	0.81911	0.79569	0.68172	0.59369	0.68602	0.80748	0.83347	0.84961	0.85509
5	0.83820	0.83340	0.81912	0.79570	0.68172	0.59369	0.68602	0.80747	0.83345	0.84960	0.85508

(b) $F_I(\beta) = K_I(\beta) / \sigma_2^\infty \sqrt{\pi b}$, $b/a=0.5, d/b=1.05, \phi=0^\circ, \nu=0.3$

n	$\beta=90$ [deg.]	80	70	60	30	0	-30	-60	-70	-80	-90
16	0.89183	0.88745	0.87189	0.84602	0.72332	0.63731	0.76638	1.04365	1.17140	1.30752	1.38559
17	0.89319	0.88782	0.87188	0.84597	0.72329	0.63423	0.76636	1.04368	1.17141	1.30753	1.38506
18	0.89265	0.88763	0.87184	0.84601	0.72330	0.63703	0.76632	1.04366	1.17143	1.30662	1.38316
19	0.89327	0.88779	0.87186	0.84599	0.72335	0.63866	0.76634	1.04365	1.17147	1.30648	1.38320
20	0.89293	0.88773	0.87187	0.84601	0.72336	0.64088	0.76633	1.04365	1.17147	1.30639	1.38306



(a) $b/a=0.5, d/b=2.0, \phi=0^\circ, \nu=0.3, n=5$



(b) $b/a=0.5, d/b=1.05, \phi=0^\circ, \nu=0.3, n=20$

Fig.4 Compliance of boundary condition

Table 2 Dimensionless stress intensity factor M_I nearby the free surface

($M_I(\beta) = K_I(\beta) / K_{IE}(\beta)$, $b/a=0.5$, $\nu=0.3$, $\phi=0^\circ$)

$K_{IE}(\beta)$: Stress intensity factor of the elliptical crack in an infinite body

$\beta = 90[\text{deg.}]$			$\beta = 270[\text{deg.}]$		
d/b	Present results	Noguchi et al[5]	d/b	Present results	Noguchi et al[5]
2.00	1.015	1.015	2.00	1.036	1.035
1.80	1.020	1.020	1.80	1.051	1.051
1.60	1.027	1.026	1.60	1.078	1.078
1.40	1.037	1.037	1.40	1.131	1.130
1.30	1.045	1.044	1.30	1.178	1.178
1.25	1.050	1.050	1.25	1.212	1.212
1.20	1.056	1.055	1.20	1.259	1.260
1.10	1.071	1.069	1.10	1.436	1.439
1.05	1.081	1.080	1.05	1.675	1.663

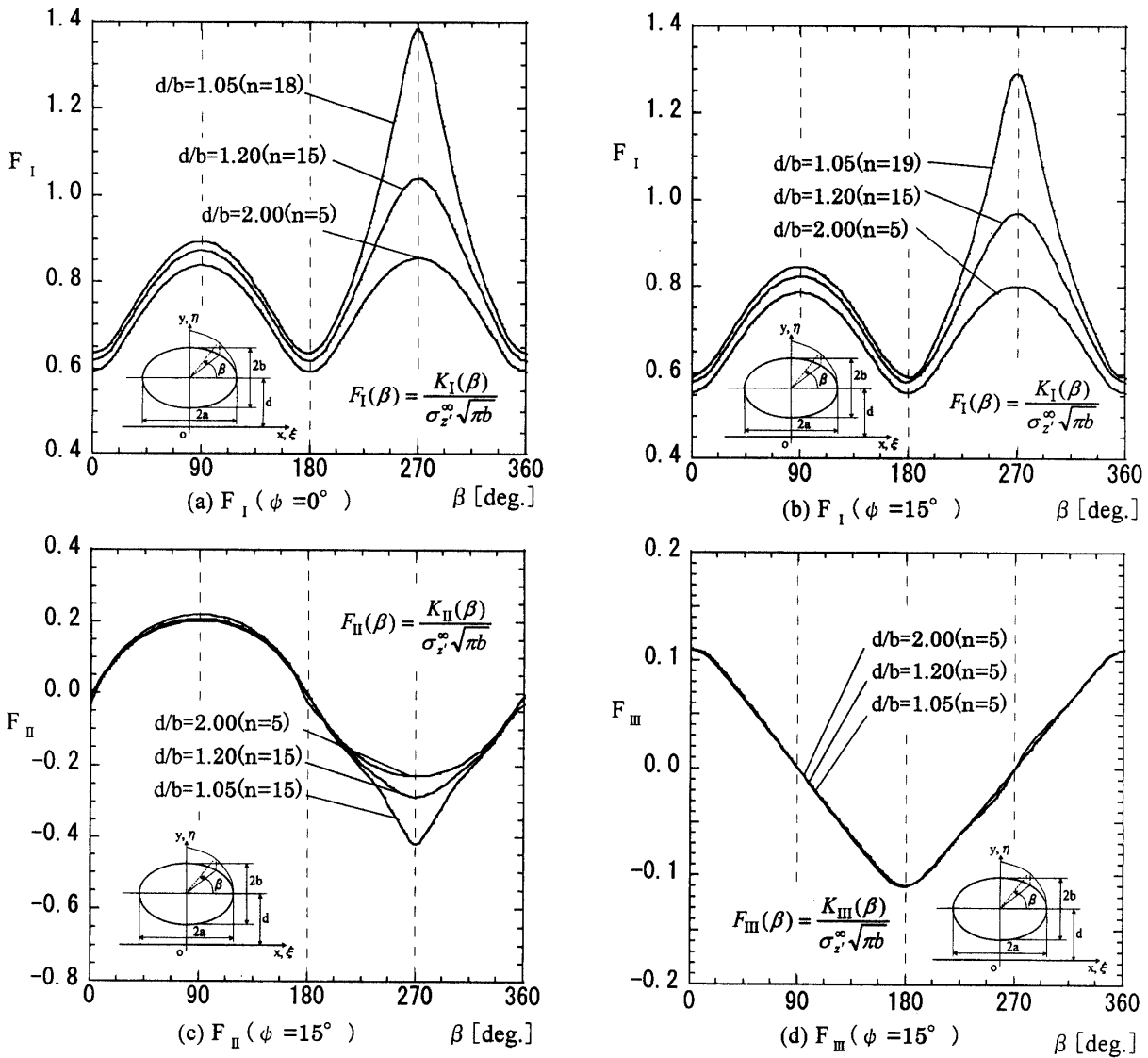


Fig.5 Variation of dimensionless stress intensity factor along the crack front

($b/a=0.5$, $\nu=0.3$, $\phi=0^\circ$ and 15°)

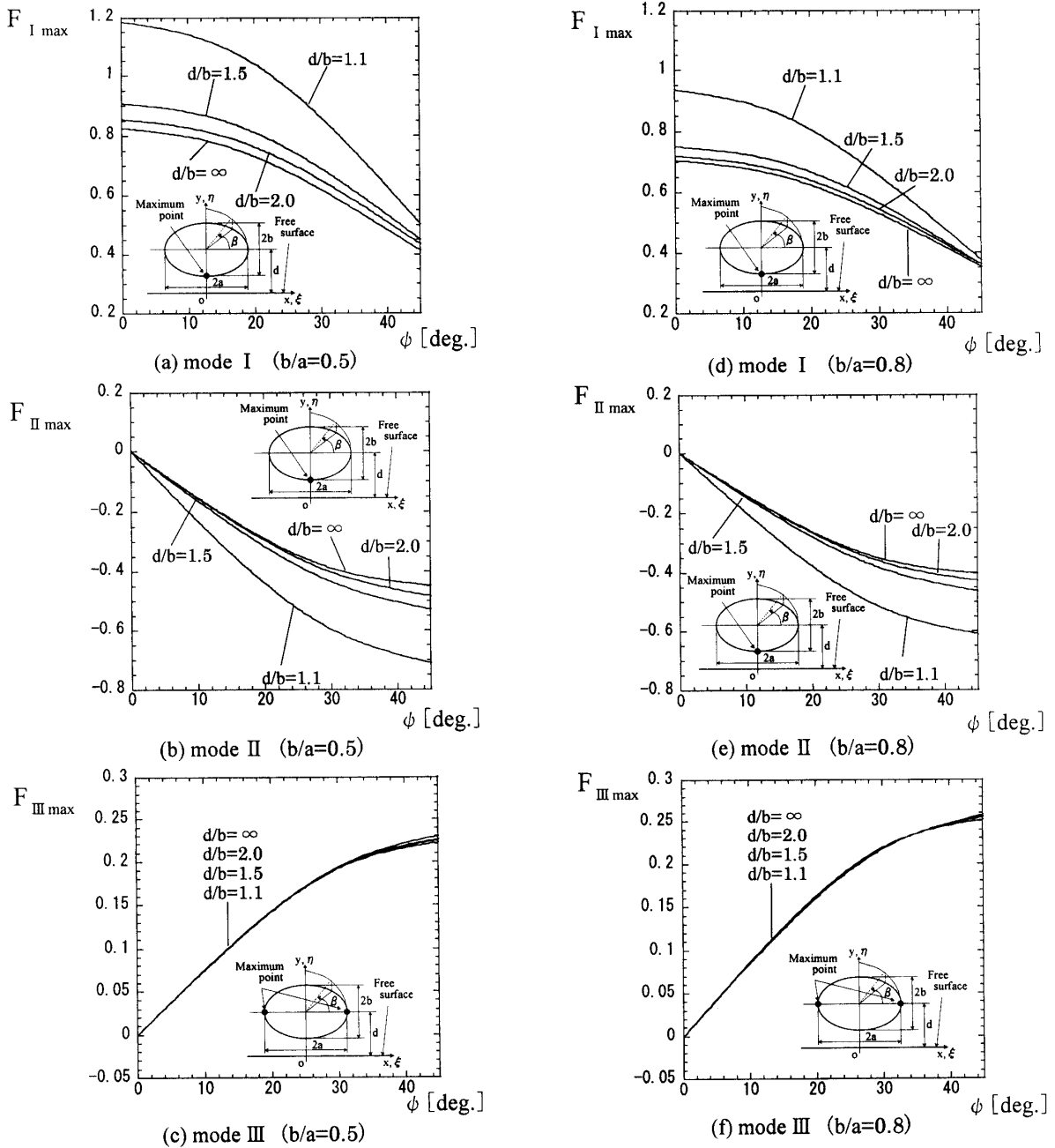


Fig.6 Relation between maximum dimensionless stress intensity factor and inclined angle ϕ

図7のようにした⁽⁹⁾。区別のために、傾いたき裂を \hat{F}_I^ϕ 、 xy 平面に投影したき裂を F_I^0 と表記した。なお、 $b/d=\infty$ のときは次式によって与えられる厳密解を用いた。

$$K_1 = \frac{\sigma\sqrt{mb}}{E(k)} \sqrt{\sin^2 \beta + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cos^2 \beta} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot a)$$

$$E(k) = \sqrt{1 + 1.464(b/a)^{1.65}} \quad \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

ただし、 $E(k)$ は $b/a \leq 1.0$ において誤差0.13%未満である。

表3において、 \hat{F}_I^ϕ と F_I^0 を比較すると、計算した全範囲において \hat{F}_I^ϕ / F_I^0 は1.0より大きい値となっている。また、き裂が自由表面に近くなる程、両者の差は大きくなるが、 $d/b \geq 2.0$ ではその差は8%程度以下である。傾斜角の小さい $\phi = 15^\circ$ では、き裂が表面の極近傍 ($d/b=1.1$)でも F_I^0 との差は小さい。したがって、傾斜内部き裂の荷重方向に対し垂直な方向の応力場の厳しさは、表面に著しく近い場合を除き、投影面積の等しい傾きのないき裂のそれとほぼ等しいと考えてよい。

Table 3 Comparison of $\hat{F}_{I \max}^\phi$ for inclined crack and $F_{I \max}^0$ for crack having the same projected area ($F_{I \max} = K_{I \max} / \sigma_z^0 \sqrt{\pi b \cos \phi}$, $b/a=0.5$, $\nu=0.3$)

$\phi = 15^\circ$			
d/b	$\hat{F}_{I \max}^\phi$	$F_{I \max}^0$	$\hat{F}_{I \max}^\phi / F_{I \max}^0$
1.1	1.224	1.129	1.084
1.5	0.940	0.908	1.035
2.0	0.884	0.860	1.028
∞	0.851	0.833	1.022
$\phi = 30^\circ$			
d/b	$\hat{F}_{I \max}^\phi$	$F_{I \max}^0$	$\hat{F}_{I \max}^\phi / F_{I \max}^0$
1.1	1.309	1.039	1.260
1.5	1.005	0.911	1.103
2.0	0.944	0.876	1.078
∞	0.901	0.855	1.054
$\phi = 45^\circ$			
d/b	$\hat{F}_{I \max}^\phi$	$F_{I \max}^0$	$\hat{F}_{I \max}^\phi / F_{I \max}^0$
1.1	1.301	0.987	1.318
1.5	1.039	0.924	1.124
2.0	0.970	0.903	1.074
∞	0.909	0.890	1.021

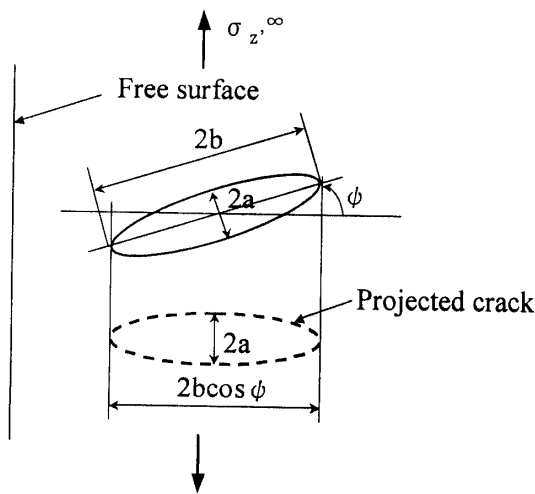


Fig.7 Crack projected on the plane perpendicular to the tensile stress

4. 結 言

本研究では、体積力法の特異積分方程式を高精度に解く方法を用い、自由表面近傍の傾斜だ円形き裂前縁の応力拡大係数の滑らかな分布を求めた。これにより以下の結論が得られた。

(1) 未知関数である体積力対密度を多項式近似する手法により、三次元き裂全面で高い境界条件の満足度と結果の収束性が得られた。

(2) 傾斜だ円形き裂前縁での無次元化応力拡大係数 F_I , F_{II} , F_{III} の滑らかな分布が得られた。き裂と自由表面からの距離および傾き角などを変化させ解析した結果、 F_I と F_{II} に関してはき裂が表面に近いほどその最大値は増加するが、 F_{III} に関しては表面からの距離の影響が非常に小さいことが分かった。

(3) 傾斜内部き裂の荷重方向に対し垂直な方向の応力場の厳しさは、表面に著しく近い場合を除き、投影面積の等しい傾きのないき裂のそれとほぼ等しい。計算した範囲内では、き裂の自由表面からの相対距離 $d/b \geq 2.0$ で、投影したき裂との差は8%程度以下である。

文 献

- (1) Y. Murakami ed, Stress Intensity Factors Handbook, vols.1 and 2, (1987); vol.3, (1992), Pergamon Press.
- (2) 西谷弘信・村上敬宜, だ円板状き裂および半だ円板状き裂の応力拡大係数, 機論, 40-329, (1974), 31-40.
- (3) 石田誠・他3名, 2個の平行なだ円板状き裂の干渉, 機論, 50-450, A(1984), 148-157.
- (4) 石田誠・鶴秀登・野口博司, 三次元き裂問題の高精度新解析法(第1報, 解析基礎理論と無限体問題への応用), 機論, 59-561, A(1993), 1270-1278.
- (5) 野口博司・石田誠・鶴秀登, 三次元き裂問題の高精度新解析法(第2報, 任意形状の表面・内部き裂を持つ半無限体問題への応用), 機論, 59-561, A(1993), 1279-1286.
- (6) 野田尚昭・三好伸介, 特異積分方程式による半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 61-586, A(1995), 1232-1240.
- (7) 野田尚昭・小林公浩・三好伸介, 特異積分方程式を用いた傾斜半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 63-615, A(1997), 2345-2350.
- (8) 野田尚昭・小林公浩・大橋哲彦, 半だ円表面き裂の干渉におけるき裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 64-620, A(1998), 879-884.
- (9) 村上敬宜・石田誠, 任意形状傾斜表面き裂のモードI, II, IIIの応力拡大係数の解析法, 機論, 50-455, A(1984), 1359-1366.
- (10) 西谷弘信・陳耽珩・石田誠, だ円孔から発生した各種き裂の K_I , K_{II} の近似計算法, 機論, 50-451, A(1984), 341-350.
- (11) 野田尚昭・小田和広・石井和光, 曲線状き裂の応力拡大係数の解析, 機論, 59-558, A(1993), 332-336.