

フィレット部を有する丸棒試験片のねじりによる応力集中*

(フィレット部を有する板の面外せん断問題との比較)

野田 尚 昭*¹, 梶 川 真一郎*²
上 鶴 貢*³, 西 谷 弘 信*⁴

Stress Concentration of Shoulder Fillets in a Round Test Specimen under Torsion (Stress Concentration of Shoulder Fillets in a Plate under Anti-Plane Shear)

Nao-Aki NODA, Shinichirou KAJIKAWA,
Mitsugu KAMIZURU and Hironobu NISITANI

This paper deals with the stress concentration analysis of shoulder fillets in a round test specimen under torsion and in a flat plate under anti-plane shear. The stress fields induced by the ring force acting to the tangential direction in the infinite body and the anti-plane shear force in the infinite plate are used as fundamental solutions to solve those problems. The stress concentration factors are systematically calculated under various geometrical conditions. Through the comparison of the present results with the previous research works, it is found that the results of Matthews-Hooke and of Tsuji et al. are in good agreement with the present results. The stress concentration factors are illustrated in tables and diagrams so they can be used easily in design or research.

Key Words: Elasticity, Stress Concentration, Body Force Method, Torsion, Fillet, Test Specimen

1. 結 言

円孔やノッチ、フィレットなどは、機械部品の多くにみられる応力集中の要因であって、これが材料の疲労現象に結びついて破損や破壊という結果になって現れることが極めて多いので、これらの影響を考慮して設計に織り込むことは重要と思われる。フィレット部を有する丸棒の応力集中問題は、実用上は直接、軸の設計に役立つばかりではなく、材料の強度研究用の試験片においても重要であるため、相当古くから研究がなされてきた。代表的な研究として、Weigand⁽¹⁾のひずみゲージによる測定、Allison⁽²⁾の光弾性による測定、Rushton⁽³⁾の電気類似法による解析、Matthews-Hooke⁽⁴⁾の選点法による解析、辻ら⁽⁵⁾の級数解法による解析、長谷川ら⁽⁶⁾の物体力分布法による解析などが挙げられる。

本論文では、フィレット部を有する丸棒試験片のねじり問題(図1)を取扱い、数値解析法の一つである体

積力法によって解析を行い、設計や研究用として高精度の応力集中係数を得ると同時に、その線図を作成する。また、この問題の特別な場合として、 p, h, l を一定に保ち直径 $D \rightarrow \infty$ とした場合、フィレット部を有する半無限板の面外せん断問題となる。これは、キー溝をもつ丸棒がねじりを受ける問題とも関連して重要であるので、この場合についても解析を行う。

2. 解 析 方 法

解析に使用した体積力法は無限体中の一点に集中力

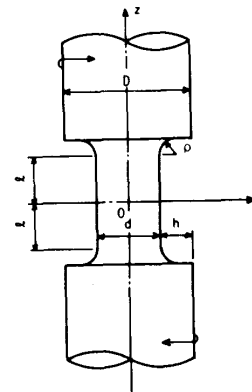


図1 フィレット部を有する丸棒試験片のねじり($D \rightarrow \infty$ の場合はフィレット部を有する半無限板の面外せん断)

* 原稿受付 平成2年2月15日。

*¹ 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市) 柳区仙水町1-1)。

*² 学生員、九州工業大学大学院。

*³ 准員、キャノン(株) (〒163 東京都新宿区西新宿2-7-1)。

*⁴ 正員、九州大学工学部 (〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

が作用する場合の応力場を与える式を基礎式とし、その重ね合わせにより境界条件を満たす解析法⁽⁸⁾⁽⁹⁾である。

軸対称体のねじり問題では、無限体中の一つの円周上に作用する周方向の集中力の輪による応力の式を基本解として使用する⁽¹¹⁾。具体的には、無限体中において、丸棒円筒面およびフィレット部となるべき仮想境界上に集中力の輪を作用させて、 \ominus 境界(無限小近傍からなる境界)で境界条件を満足させる。すなわち、解法は連続的に作用させる基本解の強さ(体積力の密度)を決定する問題に還元される。尚、 p, h, l を一定に保ち $D \rightarrow \infty$ の極限と考えられるフィレット部を有する半無限板の面外せん断の解析には、無限板中の一点に板厚方向の集中力が作用する場合の応力場を基本解とした。以下ではフィレット部を有する丸棒のねじり問題の解法を中心に述べる。

無限体中において、図2に示すような集中力の輪が作用するときの点 (r, θ, z) における応力の式は次のようになる[円柱座標系において着力点の座標を (ρ, ϕ, ζ) とする(図2)]。

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{f_0} &= \frac{F_0 \rho}{2\pi r_m^3} (-\rho I_0 - r I_1 + 2\rho I_2) \\ \tau_{\theta z}^{f_0} &= \frac{-F_0 \rho}{2\pi r_m^3} (z - \zeta) I_1 \\ \sigma_r^{f_0} = \sigma_\theta^{f_0} = \sigma_z^{f_0} = \tau_{rz}^{f_0} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

(*は集中力の輪による応力の表示)

ここで、

$$r_m = \sqrt{2} r \rho$$

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos^n \phi}{(e - \cos \phi)^{3/2}} d\phi$$

であり、

$$I_0 = \frac{1}{e^2 - 1} K_1, \quad I_1 = \frac{e}{e^2 - 1} K_1 - K_2$$

$$I_2 = \frac{2e^2 - 1}{e^2 - 1} K_1 - 2e K_2$$

$$K_1 = \int_0^\pi (e - \cos \phi)^{1/2} d\phi = \frac{2\sqrt{2}}{k} E(k)$$

$$K_2 = \int_0^\pi (e - \cos \phi)^{-1/2} d\phi = \sqrt{2} k K(k)$$

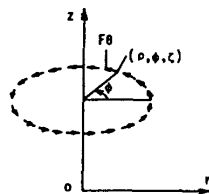


図2 無限体中の半径 ρ の円周上に作用する円周方向の集中力の輪 F_0 (F_0 は単位長さ当たりの集中力の大きさ)

$$e = 1 + \frac{(r - \rho)^2 + (z - \zeta)^2}{2r\rho}$$

ただし、 $K(k), E(k)$ は第1種および第2種の完全だ円積分で、 $k = \sqrt{2/(e+1)}$ である。

本論文では面積 $\rho d\phi ds$ ($ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (d\zeta)^2}$) の帯状の微小要素に働く体積力の合力の成分を dP_θ とするとき、各部において次のような体積力の密度を採用した。

(i) 半径 ρ の円弧からなるフィレット部および段の直線部

$$\rho_\theta = \frac{d}{2\rho} \cdot \frac{dP_\theta}{\rho d\phi ds} \quad (2)$$

(ii) 最小断面部および丸棒円筒面

$$\rho_\theta = \frac{dP_\theta}{\rho d\phi d\zeta} \quad (3)$$

$$\left(\rho_\theta = \frac{l + \rho}{\zeta} \cdot \frac{dP_\theta}{\rho d\phi d\zeta} \cdot \text{BO間}^{**1} \right) \quad (4)$$

境界上で満足すべき条件は次のように表される。

(A) 最小断面部： $r = d/2, 0 \leq |z| \leq l$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

(B) 半径 ρ の円弧からなるフィレット部

$$\tau_{n\theta} = 0 \quad (n, t \text{ は境界の法線, 接線方向})$$

(C) 段の直線部： $d/2 + \rho \leq r \leq D/2, z = \pm(l + \rho)$

$$\tau_{\theta z} = 0$$

(D) 丸棒円筒面： $r = D/2, l + \rho \leq |z|$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (5)$$

図3に体積力を分布させる仮想境界を示す。円筒面 $r = D/2$ に生じるせん断応力 $\tau_{r\theta}$ をあらかじめ小さくしておくため、フィレットとなる境界 BAB' のほかに $BA'B'$ にも同じ密度の体積力を分布させた。また、B点付近の体積力の分布を滑らかにするため、 BO' にも

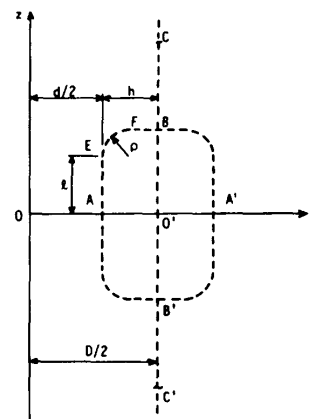


図3 無限体中に想定した体積力を分布させる仮想境界

**1 式(4)の定義はO'B間で体積力をz座標に比例して変化させることを意味している。同様の定義をAE間のAに最も近い区間にも用いた。

体積力を分布させた [式(4)].

分布させるべき体積力の密度は閉じた形では求まらないので、丸棒の最小断面部 AE を n_1 分割、半径 ρ の円弧からなるフィレット部 EF を n_2 分割、段の側面の直線部 FB を n_3 分割、丸棒円筒面 BC を n_4 分割して分割した各区間の中点で境界条件を満足するように分布させる体積力の密度を決定する。分布させる体積力の密度は各区間で一定とした。この際、注目点が着力区間に含まれるとき特異性をもつので、特別な配慮が必要である。つまり、中点を含む微小領域 $2\epsilon_0$ を除いた範囲の境界上に分布させた体積力の中点に及ぼす応力は数値積分によって精度よく計算できるのでそのまま実行し、中点を含む $2\epsilon_0$ の区間に対しては直接積分を実行した。中点を含む $2\epsilon_0$ に関する積分値を示すと次のようになる⁽¹¹⁾。

(a) 半径 ρ の円弧からなるフィレット部

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{r\theta}^{\rho\theta} &= \frac{1}{2\pi} r_i \sin \psi_i \left(\frac{2}{d} \right) \\ &\times \left(3 \frac{\rho}{r_i} \sin \psi_i - \cot \psi_i \right) \epsilon_0 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \rho \left(\frac{2}{d} \right) \left\{ 4 - 3 \ln \left(\frac{8r_i}{\rho \epsilon_0} \right) \right\} \epsilon_0 \\ \Delta\tau_{\theta z}^{\rho\theta} &= \frac{1}{2\pi} r_i \cos \psi_i \left(\frac{2}{d} \right) \\ &\times \left(-3 \frac{\rho}{r_i} \sin \psi_i - \tan \psi_i \right) \epsilon_0 \end{aligned} \dots\dots\dots (6)$$

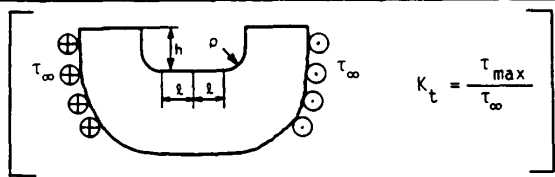
(b) 段の直線部

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{r\theta}^{\rho\theta} &= \frac{3}{2\pi} \cos^3 \left(\frac{\omega}{2} \right) \left(\frac{2}{d} \right) \epsilon_0 \\ &+ \frac{1}{2\pi} \cos \left(\frac{\omega}{2} \right) \left(\frac{2}{d} \right) \left\{ 4 - 3 \left(\frac{3r_i}{\epsilon_0} \right) \right\} \epsilon_0 \\ \Delta\tau_{\theta z}^{\rho\theta} &= \frac{3}{2\pi} \sin \left(\frac{\omega}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{\omega}{2} \right) \left(\frac{2}{d} \right) \epsilon_0 \end{aligned} \dots\dots\dots (7)$$

(c) 最小断面部および丸棒円筒面

表 1 フィレット部を有する半無限板の応力集中係数 K_t

h/ρ	0.5	1	2	4	8
$\rho/(l+\rho)$					
0.0 ($l=\infty$)	1.414	1.590	1.842	2.200	2.691
0.2 ($l=4\rho$)	1.437	1.637	1.939	2.394	3.068
0.4 ($l=1.5\rho$)	1.464	1.687	2.027	2.542	3.312
0.6 ($l=2\rho/3$)	1.500	1.746	2.120	2.687	3.534
0.8 ($l=\rho/4$)	1.554	1.826	2.237	2.857	3.777
1.0 ($l=0$)	1.688	2.000	2.467	3.164	4.192



$$\Delta\tau_{r\theta}^{\rho\theta} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r_i} \left\{ 4 - 3 \ln \left(\frac{8r_i}{\epsilon_0} \right) \right\} \epsilon_0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\Delta\tau_{\theta z}^{\rho\theta} = 0$$

ここで、 r_i は区間の中点の r 座標、 ψ_i は区間の中点における法線と r 軸のなす角度である。

本論文の計算結果で示す応力集中係数の値は、分割数を無限大にした場合を外挿によって求めたものである。さらに、最大せん断応力はフィレットの円弧部の $0^\circ \sim 30^\circ$ 入った位置に生じているが、その正確な位置は形状によって変化するのであらかじめ知ることはできない。そこで、特にこの範囲を細かい分割にして最大せん断応力 $\tau_{\theta\max}$ を計算し、応力集中係数 K_t を求めた。また、他の部分はフィレット部から離れるに従って粗い分割にして計算を行った。

$$K_t = \frac{\tau_{\theta\max}}{\tau_n}, \tau_n = \frac{16T}{\pi d^3} \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 T は丸棒に作用するねじりトルクを表す。

3. 計算結果および考察

3.1 フィレット部を有する半無限板の面外せん断 (図1で $D \rightarrow \infty$ の場合)

表1はフィレット部を有する半無限板の面外せん断問題で、段の形状比 h/ρ を一定にして l を変化させた場合の応力集中係数 K_t の変化を示したものである。この結果を線図にしたものを図4に示す。本解析結果は $l \rightarrow 0$ に従って、U形切欠きを有する半無限板の面外せん断問題の解⁽¹⁰⁾ に一致する。

3.2 フィレット部を有する段付棒のねじり (図1で $l \rightarrow \infty$ の場合**2)

図5には $\rho=h$ のフィレット部を有する段付棒の場合の結果を、過去の研究と比較して Weigand⁽¹⁾, Allison⁽²⁾, Rushton⁽³⁾, Matthews - Hooke⁽⁴⁾ の論文に示された線図からの読取り値および

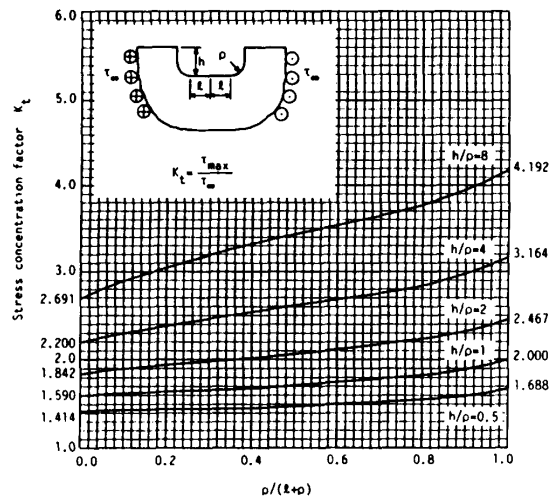
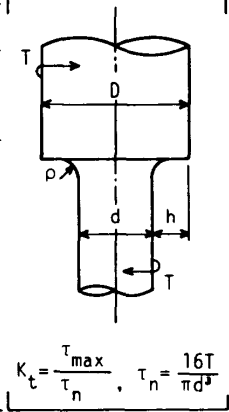


図 4 フィレット部を有する半無限板の応力集中係数 K_t

表 2 フィレット部を有する段付棒の応力集中係数 K_t

h/ρ $\lambda=2h/D$	K_t					$K_t/K_{t0} \lambda \rightarrow 0$				
	0.5	1	2	4	8	0.5	1	2	4	8
0.0	1.414	1.590	1.842	2.200	2.691	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.270	1.420	1.638	1.950	2.382	0.898	0.893	0.889	0.886	0.885
0.2	1.177	1.297	1.479	1.746	2.121	0.832	0.816	0.803	0.794	0.788
0.3	1.118	1.210	1.356	1.579	1.899	0.791	0.761	0.736	0.718	0.706
0.4	1.080	1.149	1.262	1.443	1.711	0.764	0.723	0.685	0.656	0.636
0.5	1.055	1.105	1.191	1.332	1.552	0.746	0.695	0.647	0.605	0.577
0.6	1.038	1.073	1.135	1.242	1.415	0.734	0.675	0.616	0.565	0.526
0.7	1.025	1.048	1.091	1.168	1.297	0.725	0.659	0.592	0.531	0.482
0.8	1.014	1.029	1.055	1.105	1.191	0.717	0.647	0.573	0.502	0.443
0.9	1.008	1.013	1.023	1.049	1.094	0.713	0.637	0.555	0.477	0.407
1.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.707	0.629	0.543	0.455	0.372



$$K_t = \frac{\tau_{max}}{\tau_n}, \quad \tau_n = \frac{16T}{\pi d^3}$$

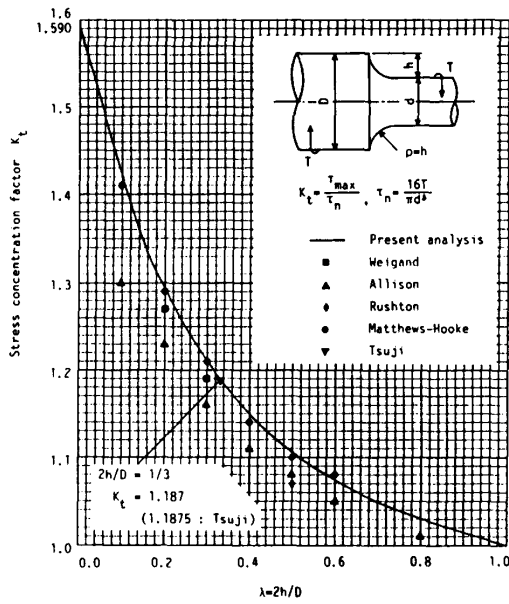


図 5 フィレット部を有する段付棒の応力集中係数 ($\rho=h$ の場合) の他の研究結果との比較

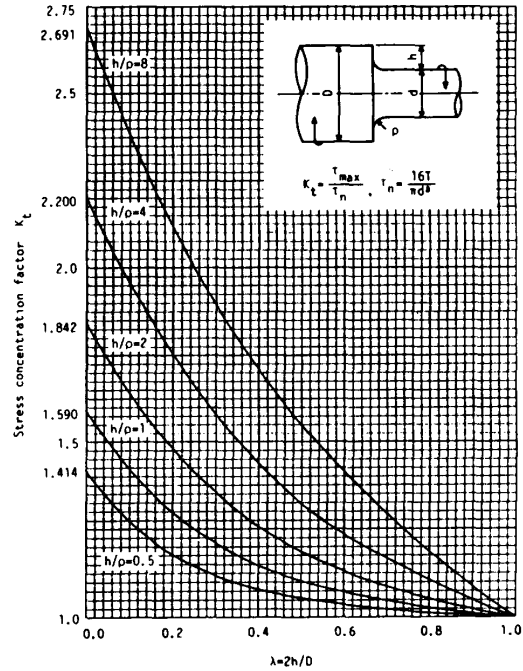


図 6 フィレット部を有する段付棒の応力集中係数 K_t

び辻ら⁽⁵⁾の計算値とともに示した。辻らの結果は本結果と有効数字 4 けたまで一致した。また、Matthews らの結果は他の形状についての結果も本解析結果と誤差数%程度以内で一致した。

表 2 はフィレット部を有する段付棒のねじり問題で、段の形状比 h/ρ を一定にして相対深さ $\lambda=2h/D$ を変化させた場合の応力集中係数 K_t の変化を示したものである。この結果を線図にしたものを図 6 に示す。図 7 は表 2 の応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0} (K_{t0} は $\lambda \rightarrow 0$ における K_t) を縦軸にとり、横軸に $\lambda=2h/D$ をとって図示したものである。また、表 3 に最大せん断応力の発生位置を示す。表 2 および図 6 からわかるように、本計算結果は $\lambda \rightarrow 0$ に従って同一形状のフィレット部を有する半無限板の面外せん断問題の解に、

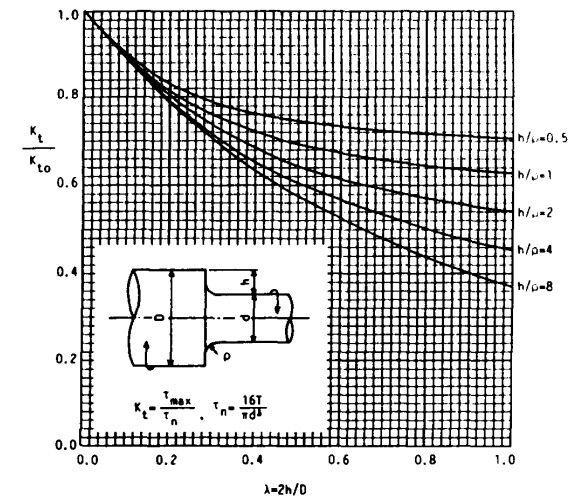
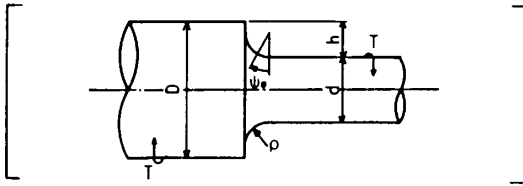


図 7 フィレット部を有する段付棒のねじりにおける K_t/K_{t0} と λ の関係

**2 実際の数値計算では応力集中係数が有効数字 4 けた程度以上変化しない長さをとった。

表 3 フィレット部を有する段付棒のねじりにおける最大せん断応力の発生位置 ψ_0 (deg.)

h/ρ $\lambda=2h/D$	0.5	1	2	4	8
0.0	11	14	19	25	30
0.1	9	13	18	24	29
0.2	7	11	15	21	27
0.3	5	8	13	18	25
0.4	3	6	10	15	22
0.5	2	4	7	12	18
0.6	2	3	5	9	15
0.7	1	2	4	7	11
0.8	1	1	2	4	7
0.9	0	1	1	2	4
1.0	0	0	0	0	0



$\lambda \rightarrow 1$ に従って $K_t = 1$ に無理なく一致している。

これまで円周切欠きを有する丸棒の引張問題⁽⁷⁾やフィレット部を有する帯板の問題⁽¹²⁾⁽¹³⁾では、 K_t/K_{t0} は h/ρ によらず、 λ のみによって決まる傾向が認められたが、本問題では表 2 および図 7 からわかるように K_t/K_{t0} は h/ρ に依存して変化している。この理由として、本問題では λ の小さい場合にも最大せん断応力の発生位置が、 λ に依存してわずかに変化する(表 3)ことが影響していると考えられる**3。

3.3 フィレット部を有する丸棒試験片のねじり(図 1) 表 4 は図 1 で $l=4\rho$ の場合について計算した応力集中係数を $l=\infty$ の場合 [() の値] と比較して示したものである。 $l=4\rho$ と $l=\infty$ の結果は λ の小さい場合を除きよく一致している。これより、一般に用いられている図 1 に示すようなねじり試験片($l \geq 4\rho$)において、その応力集中係数は h/ρ が大きく λ が小さい場合を除き、 $l=\infty$ として評価してよいと考えられる。

4. 結 言

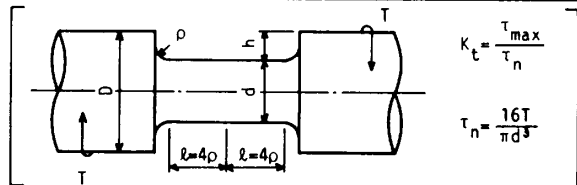
本論文では、材料の強度研究用として重要なフィレット部を有する丸棒試験片のねじりにおける応力集中問題(図 1)を体積法により考察した。丸棒直径が大きくなった極限($\lambda \rightarrow 0$)と考えられるフィレット部を有する半無限板の面外せん断問題も同様に取扱った。得られた結果を表と線図にまとめたほか、以下のことが明らかとなった。

(1) フィレット部を有する段付棒の応力集中係数 K_t は、 $\lambda \rightarrow 0$ でフィレット部を有する半無限板の面外

**3 フィレット部を有する帯板の問題(引張りと面内曲げ)では λ の小さい範囲で最大応力の発生位置は h/ρ のみによって決まる⁽¹⁴⁾。

表 4 フィレット部を有する丸棒試験片($l=4\rho$)の応力集中係数 K_t [() は $l=\infty$ の場合]

h/ρ $\lambda=2h/D$	0.5	1	2
0.0	1.437 (1.414)	1.637 (1.590)	1.939 (1.842)
0.1	1.271 (1.270)	1.421 (1.420)	1.646 (1.638)
0.2	1.177 (1.177)	1.297 (1.297)	1.480 (1.479)
0.3	1.118 (1.118)	1.210 (1.210)	1.356 (1.356)
0.4	1.080 (1.080)	1.149 (1.149)	1.262 (1.262)
0.5	1.055 (1.055)	1.105 (1.105)	1.191 (1.191)
0.6	1.038 (1.038)	1.073 (1.073)	1.135 (1.135)
0.7	1.025 (1.025)	1.048 (1.048)	1.091 (1.091)
0.8	1.014 (1.014)	1.029 (1.029)	1.055 (1.055)
0.9	1.008 (1.008)	1.013 (1.013)	1.023 (1.023)
1.0	1.000	1.000	1.000



せん断問題の結果に、 $\lambda \rightarrow 1$ で $K_t = 1$ にそれぞれ無理なく一致した。過去の研究と比較の結果、Matthews らの選点法による結果および辻らの計算値は本解析結果と比較的よく一致した(図 5)。

(2) 段付丸棒のねじりにおける最大せん断応力の発生位置は λ の小さい場合にも λ および h/ρ に依存して変化する。したがって、この問題の応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0} [K_{t0} は $\lambda \rightarrow 0$ における K_t] は、 λ の小さい場合も h/ρ に依存して変化し、フィレット部を有する帯板の問題⁽¹²⁾⁽¹³⁾のように h/ρ によらず、 λ のみによって決まる傾向は認められなかった(図 7)。

(3) フィレット部を有する丸棒試験片のねじりにおける応力集中係数は、 λ の小さい場合を除き $l=\infty$ として評価できる(表 4)。

文 献

- (1) Weigand, A., *Luftfahrt-Forsch.*, **20**(1943), 217.
- (2) Allison, I. M., *Aeronaut. Q.*, **12**(1961), 189.
- (3) Rushton, K. R., *Aeronaut. Q.*, **15**(1964), 83.
- (4) Matthews, G. J. and Hooke, C. J., *J. Strain Anal.*, **6**(1971), 124.
- (5) 辻・渋谷・小泉, 機論, **52**-480, A(1986), 2017.
- (6) 長谷田・岩田・近藤, 機論, **54**-503, A(1988), 1335.
- (7) 西谷・野田, 機論, **51**-461(1985), A, 54.
- (8) 西谷, 機誌, **70**-580(1967), 627.
- (9) 西谷・陳, 体積法, (1987), 9, 培風館.
- (10) Nisitani, H. (Sih, G. C 編), *Mechanics of Fracture*, **5**(1978), 1, Noordhoff Int. Pub.
- (11) 野田, 九州大学学位論文, (1984), 50.
- (12) 野田・佐伯・西谷, 機論, **55**-509, A(1989), 69.
- (13) 野田・金本・西谷・藤崎, 機論, **56**-523(1990), A, 653.
- (14) Noda, N.-A. and Nisitani, H. (Aliabadi, M. H., ほか 2 名編), *Localized Damage-Computer-Aided Assessment and Control*, **3** (1990), 383, Computational Mechanics Pub.