

## 半無限板縁き裂の同定問題の解析およびその効率化\*

陳 玳珩\*<sup>1</sup>, 野田尚昭\*<sup>2</sup>, 小田和広\*<sup>3</sup>Efficient Inverse Analysis to Search  
for the Edge Crack in the Semi-Infinite Plate

Dai-Heng CHEN, Nao-Aki NODA and Kazuhiro ODA

In this study, the location of the edge crack in the semi-infinite plate and the loading stress at the infinity are detected by the data of strains measured around the region of the crack. In searching for the location of the edge crack, the method of gradient search is employed to minimize the square sum of the residuals between the measured strain distributions and the computed ones for the assumed crack locations. The strain field induced by the assumed edge crack is exactly analyzed by using the hypersingular integral equation method (HIEM). All integrals used in the present analysis are expressed in closed forms and the results can be given with short CPU time. The starting point for the gradient search can be estimated efficiently on the basis of the concept of the body force method where the crack can be represented by a pair of point forces. The results show the location of the crack are determined efficiently with good accuracies.

**Key Words:** Inverse Problem, Elasticity, Nondestructive Inspection, Hypersingular Integral Equation Method, Edge Crack, Semi-Infinite Plate

## 1. 緒 言

構造物の安全性および残存寿命を評価するうえで、その破壊を生む原因となるき裂等の欠陥を同定することは重要であり、多くの研究がなされている<sup>(1)(2)</sup>。とくに、最近では、計測により得られるいくつかのデータを補助情報として、計算力学的手法を援用し定量的に欠陥を同定する手法が注目を集めている<sup>(3)~(5)</sup>。この種の問題は逆問題としてとらえることができ、種々の分野で取扱われている重要な研究テーマである。

構造物の使用中にき裂が生じると周囲のひずみ場も変化するので、その周囲のひずみ場の変化という情報に基づけば、その物理量変化の原因となっているき裂を同定することができると思われる。著者らは、このようなき裂逆問題に関する研究の第1報として、さきに無限板中に存在する内部き裂の位置・寸法および外部荷重を、き裂を囲む閉曲線上の数点で測定したひ

ずみ情報に基づいて同定する解析を行った<sup>(6)</sup>。

一方、疲労き裂は物体の表面から発生するため、自由縁に生じた縁き裂の位置・形状を精度良く求めることは実用上極めて重要である。そこで、本研究では、物体表面で測定したひずみ分布に関する多点のデータに基づいて、半無限板中の斜め縁き裂の位置・形状を求める解析を行う。その際、仮定した斜め縁き裂の位置・形状に対して周辺のひずみ場を少ない計算時間で高精度に求める必要がある。その順解析には、著者らが先に報告した超越特異積分方程式を未知関数の多項式展開で解く方法<sup>(7)(8)</sup>を用い、さらに積分をすべて閉じた

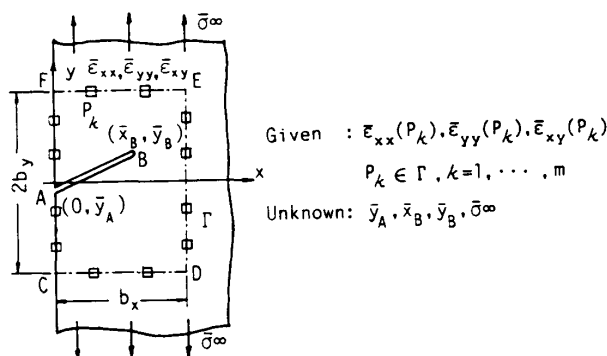


図1 探索問題

\* 平成2年3月30日 第67期通常総会講演会および平成3年4月1日 第68期通常総会講演会において講演、原稿受付 平成3年5月24日。

\*<sup>1</sup> 正員, 九州工業大学情報工学部(☎820 飯塚市大字川津 680-4)。

\*<sup>2</sup> 正員, 九州工業大学工学部(☎804 北九州市戸畑区仙水町 1-1)。

\*<sup>3</sup> 学生員, 九州工業大学大学院。

形で求めることによって効率化をはかった。

図1に示すように、問題となるのは、曲線Γ(図中のCDEF)上のm個の点Pkにおいて測定されたひずみ情報  $\bar{\epsilon}_{xx}(P_k), \bar{\epsilon}_{yy}(P_k), \bar{\epsilon}_{xy}(P_k)(k=1, \dots, m)$  に基づいて、き裂の位置  $\bar{y}_A, \bar{x}_B, \bar{y}_B$  と外部荷重  $\bar{\sigma}^\infty$  を求めることである。ここで、使用中に外部荷重の値をあらかじめ知ることはできないことを考慮して、 $\bar{\sigma}^\infty$  も未知数として扱う。

2. 解析方法

2.1 計算手順 逆問題は極めて困難な非線形問題であるので、一般に順解析の反復計算により真の値に収束させる方法がとられる。

本研究では、求めようとする各未知数  $y_A, x_B, y_B, \sigma^\infty$  の可能なすべての状況を状態空間として定義し、き裂逆問題の解析をその状態空間における探索の過程とみなす。すなわち、もしき裂の位置と荷重条件をそれぞれ仮定すれば、それによる各測定点でのひずみ  $\epsilon_{xx}(P_k), \epsilon_{yy}(P_k), \epsilon_{xy}(P_k)$  の値は数値解析によって計算できる。仮定されたき裂の位置および荷重条件が真のそれと異なる場合、それによって生じたひずみも当然真の値と異なる。その際、数値解析によって求めたひずみ分布  $\epsilon_{xx}(P_k), \epsilon_{yy}(P_k), \epsilon_{xy}(P_k)$  と測定したひずみ分布  $\bar{\epsilon}_{xx}(P_k), \bar{\epsilon}_{yy}(P_k), \bar{\epsilon}_{xy}(P_k)$  との差を、次式

$$R = \sum_{k=1}^m \sum_{ij=xx,yy,xy} \left\{ \epsilon_{ij}(P_k) - \bar{\epsilon}_{ij}(P_k) \right\}^2 \dots\dots(1)$$

のように定義される関数で評価するとすれば、き裂逆問題の解析は、Rの値が最小となるような状況を探すということになる。

き裂の位置など各未知数は全く不明であるので、それらの可能なすべての状況を1個1個チェックすれば、その中からRの値が最小となるような状況を探し出すことは原理的には可能であるが、それらの可能なすべての状況の組合せの数は膨大なものとなり、解くことは時間的に不可能となる。このような組合せ的

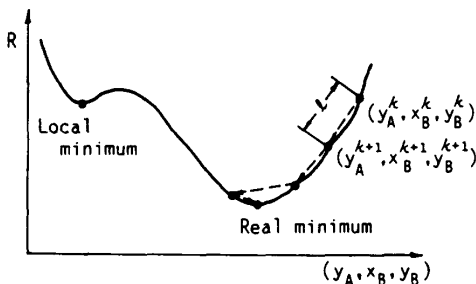


図2 こう配探索法

爆発による問題を克服するため、本研究ではこう配探索法によりき裂位置の探索を行う。図2に示すように、ある検査点  $(y_A^k, x_B^k, y_B^k)$  から検査をはじめるとき、その検査点における誤差関数のこう配

$$\text{grad}R(y_A^k, x_B^k, y_B^k) = \frac{\partial R}{\partial y_A^k} i + \frac{\partial R}{\partial x_B^k} j + \frac{\partial R}{\partial y_B^k} k \dots\dots\dots(2)$$

(i, j, k: 状態空間での  $y_A, x_B, y_B$  の基本ベクトル)も数値解析によって求め、そして、次の検査手続きにおいての新たなき裂位置の仮定点  $(y_A^{k+1}, x_B^{k+1}, y_B^{k+1})$  は次式

$$y_A^{k+1} i + x_B^{k+1} j + y_B^{k+1} k = y_A^k i + x_B^k j + y_B^k k - \frac{\text{grad}R(y_A^k, x_B^k, y_B^k)}{|\text{grad}R(y_A^k, x_B^k, y_B^k)|} \times l \dots\dots\dots(3)$$

で与える<sup>(6)</sup>。次の検査点を常に最も改善される方向に向かって移動させるので、はやく真のき裂位置に近づくことができる。式(3)中のlは検査点を移動させる際の、状態空間における1 stepの長さである。それは、最初適当に指定すればよいが、検査点を真のき裂位置に収束させるため、検査点が“谷底”に近づくとき、その長さが自動的に修正されるようになっている。

2.2 HIEMによる順解析の効率化 き裂の探索は、未知数を仮定し順解析を行い、それによって求まる評価関数を最小にするべく未知数を変更し、それを繰返し計算することによって行われる。また、各ステップでの探索方向を決定する際に必要なこう配計算も差分近似によって数値解析で求めるため、1回のステップごとに未知数の数だけ順解析を行わねばならない。したがって、1回の順解析に要する時間をできるだけ短縮させることは重要である。そこで、本研究では順解析に超越特異積分方程式法(HIEM)を適用する。著者らのこれまでの研究により、HIEMは体積力法と等価な積分方程式を対象とする解法であり、未知関数を多項式展開することにより、少ない時間で高精度の結果が得られることが明らかになっている。さらに、本解析法では数値積分を使用せず、積分をすべて閉じた形で求めることにより、いっそうの計算時間の短縮を行う。

いま、遠方で一様引張応力  $\sigma^\infty$  を受けるき裂長さ1の半無限板中の斜め縁き裂を考える。仮想き裂面上に分布させた標準型集中力対密度  $f_1(r), f_2(r)$  を未知関数とすれば、この問題の境界積分方程式は次の形で表される。ここで、 $p(s), q(s)$  は仮想き裂面上で打消すべき表面力であり、r, s はき裂方向を座標軸とする変数である。

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{f_1(r)}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{11}(r, s) f_1(r) dr \\ & + \int_0^1 k_{12}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} p(s) \\ & \int_0^1 \frac{f_2(r)}{(r-s)^2} dr + \int_0^1 k_{21}(r, s) f_1(r) dr \\ & + \int_0^1 k_{22}(r, s) f_2(r) dr = -\pi \frac{x+1}{2} q(s) \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

式(4)の解法として、未知関数  $f_1(r)$ ,  $f_2(r)$  を基本密度関数  $w_1(r)$ ,  $w_2(r)$  と Chebyshev 多項式の積で近似する。ここで  $N$  は選点数である。

$$\begin{aligned} w_1(r) &= \frac{(x+1)^2}{2(x-1)} \sqrt{1-r^2}, w_2(r) = \frac{x+1}{2} \sqrt{1-r^2} \\ f_1(r) &= F_{11}(r) w_1(r), F_{11}(r) \cong \sum_{n=0}^{N-1} a_n U_n(r) \\ f_2(r) &= F_{11}(r) w_2(r), F_{11}(r) \cong \sum_{n=0}^{N-1} b_n U_n(r) \end{aligned} \dots\dots\dots (5)$$

このような離散化の方法により、積分方程式は  $2N$  元の連立方程式となり、これを解くことにより係数  $a_n$ ,  $b_n$  が決定される。各点  $P_k$  におけるひずみは、次の式で計算される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(P_k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ a_n \int_0^1 \varepsilon_{ij}^1(P_k, r) U_n(r) w_1(r) dr \right. \\ & \left. + b_n \int_0^1 \varepsilon_{ij}^2(P_k, r) U_n(r) w_2(r) dr \right\} \\ & + \varepsilon_{ij}(P_k, \infty) \sigma^\infty \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここで、 $\varepsilon_{ij}^1(P_k, r)$ ,  $\varepsilon_{ij}^2(P_k, r)$  は仮想き裂面上の点  $r$  に単位大きさの標準型集中力対(引張型およびせん断型)が作用しているときの点  $P_k$  におけるひずみであ

り、 $\varepsilon_{ij}(P_k, \infty)$  は外部荷重  $\sigma^\infty=1$  が作用するときの点  $P_k$  のひずみである。

式(6)に表されるひずみ場の計算には、 $\sqrt{1-r^2}$  を含む2次無理関数の積分を行う必要がある。積分計算は従来までは数値積分によって行っていたが、本研究では、計算時間短縮のため、この積分を閉じた形で求めた。式(4)や式(6)中の被積分関数は、Chebyshev 多項式を含む関数の分子を展開し、それを部分分数に分解すれば、最終的に次の三つの形の積分に帰着される。これらは、いずれも置換積分によって閉じた形で求めることが可能である<sup>(9)(10)</sup>。また、これらの式の展開や部分分数の分解は、数式処理ソフトウェア Reduce3.3 を用いることにより比較的容易に行うことができた。

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^1 \frac{r^n \sqrt{1-r^2}}{s-r} dr \\ & \int_0^1 \frac{r^n}{\sqrt{1-r^2}} dr \\ & \int_0^1 \frac{pr+q}{(ar^2+\beta r+\gamma)^m \sqrt{1-r^2}} dr, [\beta^2-4a\gamma < 0] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

表1に、積分を閉じた形で求めた本解析法によって計算した  $(x, y)=(1, 1)$  および  $(10, 10)$  のの応力を示す。これらは、半無限板中の縁き裂  $y_A=0.0$ ,  $x_B=0.966$ ,  $y_B=0.259$  (図1)が存在するときの結果である。表より、き裂近傍での応力も選点数  $N=10$  程度以下で精度良く求まることがわかる。1回の順解析に要する時間は、数値積分を用いる方法に比べ、同じ選点数では約1/20に短縮することができた。

また、表1からわかるようにき裂より遠いところでは、より少ない選点数でも計算結果は収束しているため、き裂からの距離に応じて選点数が決まるようにプログラムを作成した。つまり、測定点がき裂に近い場合は選点数を増し、き裂から遠い場合は選点数を減らすようにした。このことにより、さらに計算時間が短縮された。

2.3 ひずみ場が荷重の線形関数となることの利用

同時に仮定すべきパラメータの数を減らせば、問題を解くのに要する時間が短縮される。そのため、本研究では荷重の値が線形方程式から求まることを考慮して、未知数  $\bar{y}_A$ ,  $\bar{x}_B$ ,  $\bar{y}_B$ ,  $\bar{\sigma}^\infty$  の四次元状態空間ではなく、き裂位置  $\bar{y}_A$ ,  $\bar{x}_B$ ,  $\bar{y}_B$  に関する三次元の状態空間だけにこの配探索法を適用する。外部荷重  $\bar{\sigma}^\infty$  については、ひずみ場が荷重の線形関数として表現できることを利用することによって直接求める。すなわち、図3に示すように、最初にき裂位置  $y_A$ ,  $x_B$ ,  $y_B$  だけを

表1 点  $(x, y)$  における応力の収束性 ( $y_A=0.0$ ,  $x_B=0.966$ ,  $y_B=0.259$  の縁き裂が存在する場合)

x = 1.0 , y = 1.0			
N	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
1	-0.0234	1.1092	0.2269
2	-0.0308	1.1144	0.2318
3	-0.0367	1.1615	0.2366
4	-0.0400	1.1682	0.2398
5	-0.0414	1.1701	0.2413
6	-0.0418	1.1705	0.2418
7	-0.0419	1.1704	0.2419
8	-0.0419	1.1704	0.2419
9	-0.0419	1.1704	0.2419
10	-0.0419	1.1705	0.2418

x = 10.0 , y = 10.0			
N	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
1	-0.0042	1.0048	-0.0002
2	-0.0046	1.0052	-0.0002
3	-0.0048	1.0055	-0.0002
4	-0.0048	1.0054	-0.0002

仮定し、各仮定されたき裂位置  $y_A, x_B, y_B$  に対して、 $R(y_A, x_B, y_B, \sigma^\infty)$  が最小となる荷重条件  $\sigma^\infty$  を求める。各点  $P_k$  のひずみは式(6)に式(4)を代入すれば、外部荷重の線形関数として次式のように表される。

$$\epsilon_{ij}(P_k) = E_{ij} \times \sigma^\infty \dots\dots\dots (8)$$

したがって、四次元状態空間中の  $y_A, x_B, y_B = \text{一定}$  となる子空間中に、 $R$  が最小となる  $\sigma^\infty$  の値は次の条件式

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma^\infty} = 0 \dots\dots\dots (9)$$

から直ちに求めることができる。

$$\sigma^\infty = \frac{\bar{\epsilon}_{ij}(P_k) \times E_{ij}}{E_{ij} \times E_{ij}} \dots\dots\dots (10)$$

$\sigma^\infty$  の値が求めれば、 $y_A, x_B, y_B$  を仮定したときの  $R$  の最小値を求めることができる。そして、 $R(y_A, x_B, y_B)$  に基づいてそれを最小にする  $y_A, x_B, y_B$  を捜せば、与えられた逆問題の解が得られる。

**2.4 探索起点の算定** 誤差関数  $R$  の形状は、一般に、図2に示すように、真の“谷底”のほか、局所の“谷底”も存在する。この配探索法は局所的手法であるので、その局所の“谷底”にひかれるおそれがある。その際、新たな検査起点から探索を再開しなければならない。したがって、この配探索法が常に効率的

だという保証がない。このような局所の“谷底”が存在する場合にこの配探索法を効率良く実行させるためには、最も有望そうな検査点から探索をはじめなければならない。そのため、ここでは図5に示すことに基づいて、探索の起点を決定する。すなわち、本研究で取扱う半無限板の縁き裂の問題では、図4に示すように、 $\Gamma$  線上のひずみ分布は主にき裂の先端Bの位置によって支配される。そのことを利用すれば、検査の起点として最も有望そうな  $x_B, y_B$  をさきに選ぶことが可能となる。まず図5に示すことに基づいて、半無限板中に1個の力対を用いて、測定したひずみ分布を近似しようとする際、その集中力対の最適な埋め込み場所  $y_{B1}$  と大きさ  $T_1$  を求める。このとき  $l$  の位置によって算定される探索起点の位置は異なるが、大きい差はない。またここで求めるのはただ探索の起点であるので、便宜上  $l=0.01$  とした。その求めた力対の大きさから  $x_{B1}$  は次のように計算される<sup>(6)(11)</sup>。

$$x_{B1} = \sqrt{\frac{8(x-1)T_1}{\pi(x+1)^2\sigma^\infty}} \dots\dots\dots (11)$$

$$x = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{: 平面応力} \\ 3-4\nu & \text{: 平面ひずみ} \end{cases}$$

そして、それを起点としてこの配探索法をはじめ、 $R$  が最小となる  $y_A, x_B, y_B$  を求める。

3. 解析結果

図1に示した半無限板中の縁き裂の探索問題について解析を行い、得られた結果を以下に示す。各点  $P_k$  より得られるひずみ情報は、実際には適当な方法、例えばひずみゲージなど、によって測定する。しかし、本数値実験においてはこれらのデータをHIEMの順解析によって求めた。また、三次元き裂問題への拡張を考慮し、半無限板の自由縁のみのデータからき裂を同定する解析も行った。解析は、ワークステーションSUN SPARK station 1によって行った。

3.1 測定点がき裂を囲むようにある場合(図1)

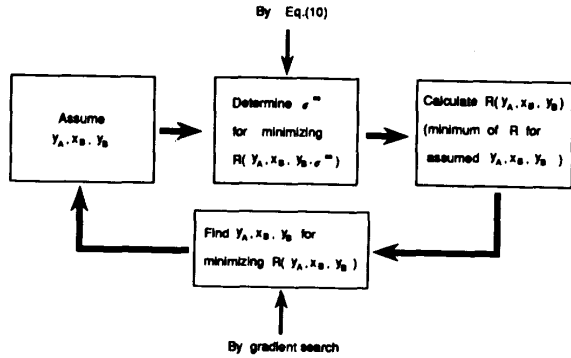


図3 基本的解析手順

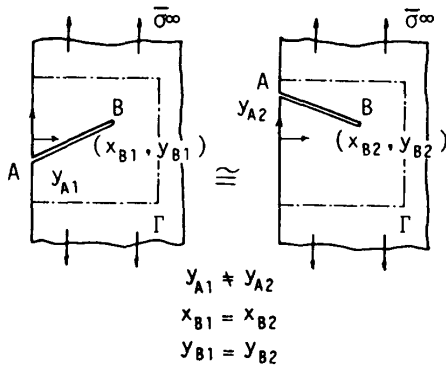


図4 ひずみ場はき裂先端の位置によって支配される

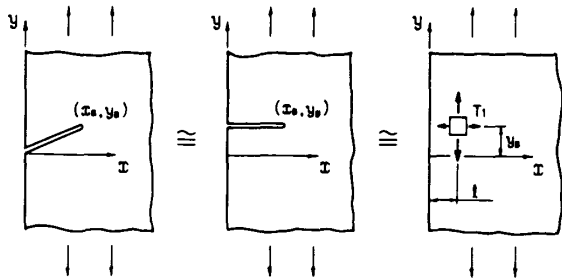


図5 1個の集中力対でひずみ場を近似させることによる探索起点の算定

ひずみの測定点に関しては、まず  $b_x=5, b_y=5, m=12$  (記号は図1)と適当に設定する。図6にいくつかの探索結果を示す。図6において  $x_{B1}, y_{B1}$  は、2・4節で説明した手法によって算定した探索の起点である。同定対象と探索結果との比較からわかるように、本研究で提案した解析方法によって、き裂の先端位置  $x_B$ ,

$y_B$  および外部荷重  $\sigma^\infty$  の値が少ない時間で精度良く同定できる。しかし、き裂の自由縁における位置  $y_A$  は、図4のことを反映して、本解析手法では一般に他のパラメータよりもいくぶん精度が落ちるようである。

また、き裂が短い場合には、その存在によるひずみ変化の情報は、当然長いき裂のそれより少ないので解析精度が落ちる。そこで、き裂の位置・形状は固定して、ひずみ測定点の領域(図1の閉曲線  $\Gamma$  の大きさ)を変化させて行った。図7, 8にその例を示す。図7, 8からわかるように、き裂の長さは  $x_B/b_x \geq 0.002$  の範囲で

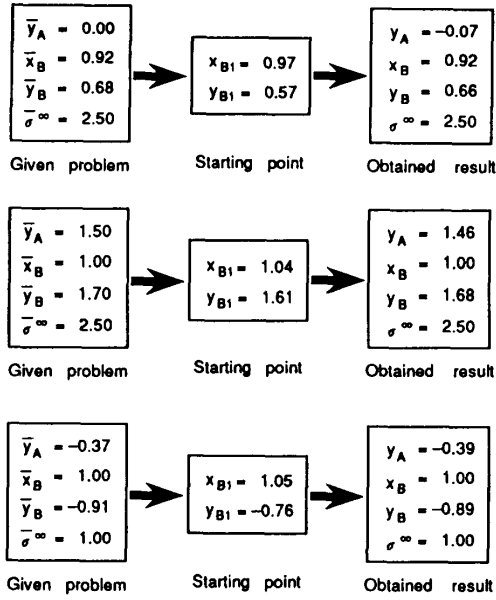
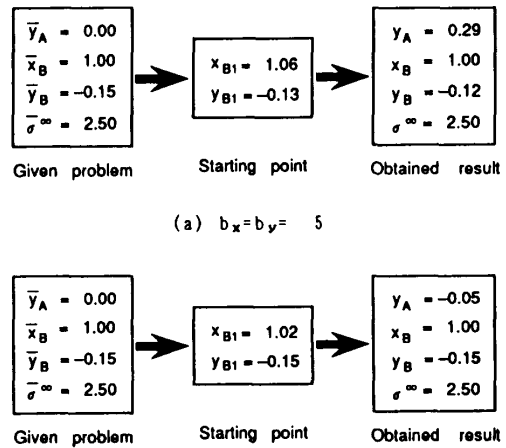
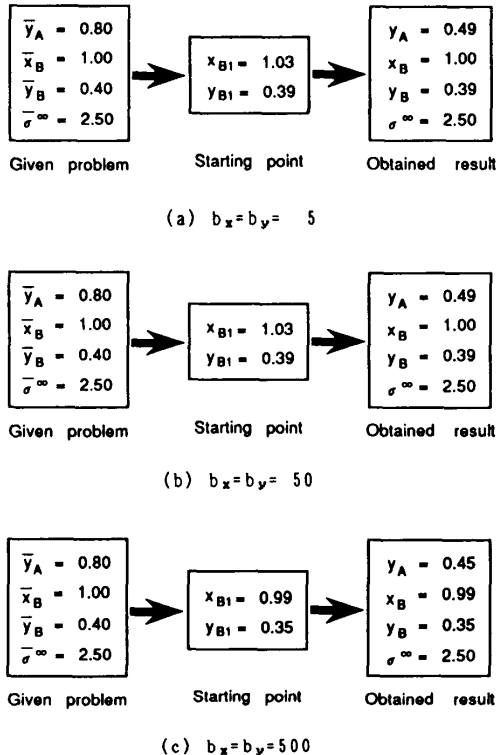


図6 図1の問題の探索結果 ( $b_x=5, b_y=5, m=12$ )



(a)  $b_x=b_y=5$

(b)  $b_x=b_y=50$

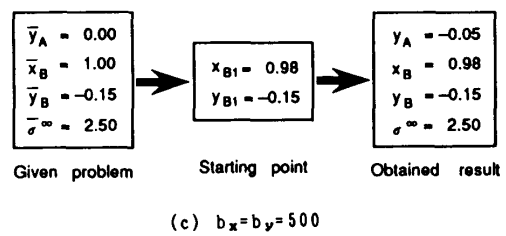


(a)  $b_x=b_y=5$

(b)  $b_x=b_y=50$

(c)  $b_x=b_y=500$

図7 測定点の領域を変化させたときの探索結果の比較 ( $m=12$ )



(c)  $b_x=b_y=500$

図8 測定点の領域を変化させたときの探索結果の比較 ( $m=12$ )

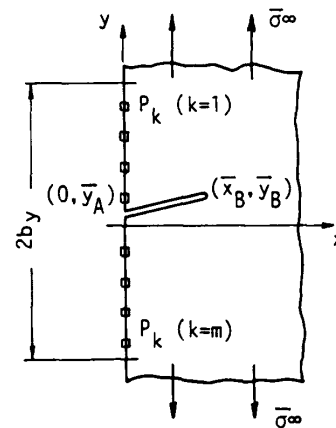
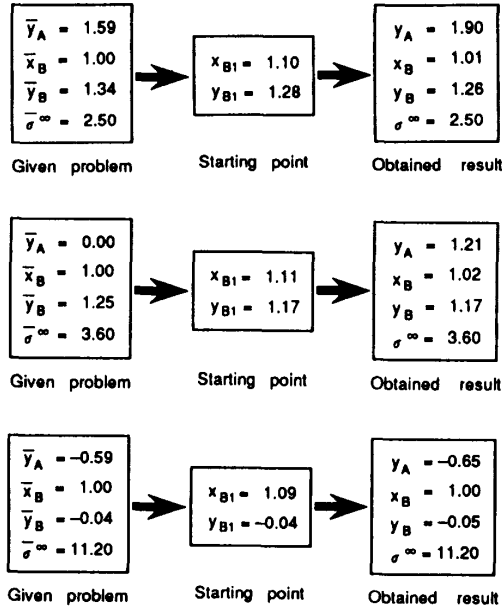
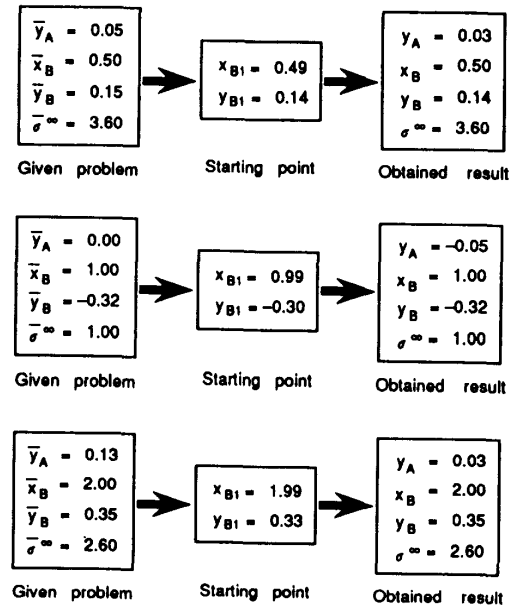


図9 自由縁のデータのみによる探索問題

図 10 図 9 の問題の探索結果 ( $b_v=40, m=8$ )図 11 図 9 の問題の探索結果 ( $b_v=20, m=4$ )

あれば、本研究で提案した手法が有効である。

**3・2 測定点が自由縁のみにある場合(図9)** 実際問題として三次元の表面き裂を考えれば、物体表面のひずみ情報だけでき裂の位置・形状の同定が必要となる。そこで、図9のように半無限板の自由縁のデータのみでき裂を同定する解析を行った。この場合、得られるひずみ情報は  $\varepsilon_{uv}(P_k)$  だけであり、情報量が非常に少なくなるので解析が困難であると思われる。図10にその探索結果を示す。ひずみの測定点は  $b_v=40$ ,  $m=8$  (記号は図9) と設定した。図10からわかるように、自由縁のデータだけでも十分精度の良いき裂の同定を行うことができた。また、さらに少ない測定点数 ( $m=4$ ) で解析を行った結果を図11に示す。これより、測定によって得られるひずみ情報が非常に少ない場合 (この例で得られる情報としては  $\varepsilon_{uv}$  の四つのみである) でも十分精度の良い同定ができることがわかる。とくに実用上重要となるき裂の投影長さ ( $x_B$ ) は、常に精度良く求まる。

#### 4. 結 言

本研究では、ひずみ情報に基づくき裂逆問題の解析として、半無限板中の縁き裂の位置・寸法および外部荷重を同定する問題を取扱った。その際、順解析の反復計算が必要であるが、仮定したき裂形状に対して少ない計算時間で高精度のひずみ場を計算できるように HIEM を援用し順解析の効率化をはかった。その結果、同定される未知数の数が四つあり、すべて任意で

あるにもかかわらず、測定点の領域に対するき裂の投影長さの比が  $x_B/b_x \geq 0.002$  の範囲であれば、本解析手法によって精度良くき裂の位置および形状が同定できることがわかった。解析にはワークステーション SUN SPARK station 1 を用い、計算時間は1分以内である。また、三次元のき裂問題を考慮し、半無限板の自由縁のデータのみでき裂を同定する解析も行った。この場合、得られるひずみ情報は  $\varepsilon_{uv}$  のみとなるが、測定点が4点程度の非常に少ない情報量でも十分精度の良い同定が可能であった。

終わりに、有意義なご討論ならびに多大なご支援をいただいた九州工業大学工学部・原田昭治教授に深く謝意を表す。

また本研究は平成2年度科学研究費一般研究(C)および奨励研究(A)の援助を受けた。記して謝意を表す。

#### 文 献

- (1) 矢川・福田, 機械の研究, 35-11(1983), 1237; 35-12(1983), 1324; 36-1(1984), 27.
- (2) 林・ほか3名, 材料, 33-368(1984), 602.
- (3) 阪上, 大阪大学学位論文, (1987).
- (4) 田中・山際, 機論, 54-501, A(1988), 1054.
- (5) 田中・ほか3名, 機論, 55-514, A(1989), 1445.
- (6) 陳・西谷, 機論, 57-534, A(1991), 274.
- (7) 野田・ほか2名, 機論, 55-520, A(1989), 2521.
- (8) 野田・ほか2名, 機論, 56-532, A(1990), 2405.
- (9) 森口・ほか2名, 数学公式 I, (1956), 105, 岩波書店.
- (10) 藤原, 微分積分学 I, (1934), 305, 内田老鶴園.
- (11) 陳・ほか2名, 機論, 57-540, A(1991), 1706.