

付加円孔による応力集中緩和の最適化*

野田尚昭*¹, 松尾忠利*², 藤田淳也*³Optimization of the Position and Size of Auxiliary Hole
to Minimize Stress Concentration

Nao-Aki NODA, Tadatoshi MATSUO and Junya FUJITA

In this paper the optimum position and size of an auxiliary hole are considered in order to minimize the stress concentration due to notches and holes in plates under tension. To solve these problems, the body force method is applied. Then, the problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy-type singularities, where the densities of body forces distributed in the x - and y -directions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the auxiliary hole and the notch, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are used; then the body force densities are approximated by a linear combination of the fundamental density functions and polynomials. To obtain the optimum conditions, the direct search method proposed by Hooke-Jeeves is employed. The results show that the position and size of the auxiliary hole are determined efficiently with high accuracy.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Notch, Optimum Design, Auxiliary Hole

1. 結 言

切欠部の応力集中を緩和するのに、その近傍に別の切欠きを設けることが有効であることは、広く知られている。しかしこの方法では、与えられた切欠部に、どのような形状の切欠きをいくつ、どのように配置するかは一般に未知で、従来、経験的にその形状および位置が決められているにすぎない。最近、数値解析法の発展に伴って、多くの研究者によって、機械構造物や機械要素の切欠きや段部の最適形状を求める解析が試みられている⁽¹⁾。例えば、柴原らは、一軸引張りを受ける無限弾性体内に1円孔がある場合、その軸方向両側に直径が等しい2円孔を付加切欠きとして設ける場合の最適形状を求めている⁽²⁾。しかし、一般にこのような最適形状を求める問題では、切欠きの形状、位置等の変化に対して最大応力の生じる位置も微妙に変化するもので、最適条件を求めることは非常に難しく、精度の高い計算例はあまり見当たらない。

著者らはこれまでに、体積法を用いた応力集中問題の解析において、特異積分方程式を厳密に解析する方法を提案した^{(3)~(5)}。この解析法を用いれば、未知関数が連続関数で近似されるために、境界上の任意の点の応力が少ない計算時間で正確に求められるという利点がある。そこで本研究では、この方法を応用して、切欠きまたは円孔を有する弾性体において付加円孔の大きさおよび位置を、応力集中係数が最小となるように決定する形状最適化問題の解析を行う(図1~3)。解析結果を過去の解析結果や階段関数を用いた体積法の解析結果と比較することによって、本解析法がこの種の問題の解析にたいへん有効であることを示す。

2. 付加円孔による応力集中緩和の問題の解析法

本解析方法を図1に示すように、遠方で一様な引張応力 σ^{∞} が作用している半無限板の半円切欠き($x = a_2 \cos \theta_2, y = b_2 \sin \theta_2$)の応力集中を、大きさの等しい2個の付加円孔 [$x = \pm(d + a_1 \cos \theta_1), y = l + b_1 \sin \theta_1 (a_1 = b_1)$]によって緩和する問題を例にとりて説明する。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積法の考え方により、問題の対称性から、半無限板中の2点($\pm\xi, \eta$)に集中力が働くときの任意の点(x, y)の応

* 平成5年10月4日 第71期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成5年7月23日。

*¹ 正員,九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 准員,九州工業大学大学院。

*³ 准員,日本精工(株) (〒251 藤沢市鶴沼神明1-5-50)。

力場の解を用いて解くことができる⁽⁶⁾⁽⁷⁾。このとき問題は、穴および切欠きとなるべき仮想境界上に分布させた x, y 方向の、境界に沿った長さ当たりの体積力密度 $\rho_x^*(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k)$ を未知関数とする特異積分方程式(1)で表現される [ϕ_k は着力点(ξ, η)を表す角度で注目点 θ_k と区別して用いる ($k=1, 2$)].

$$\begin{aligned}
 & (-1/2)(\rho_x^*(\theta_i) \cos \theta_{io} + \rho_y^*(\theta_i) \sin \theta_{io}) \\
 & + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} K_{nn}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^*(\phi_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} K_{nn}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^*(\phi_k) ds \\
 & = -\sigma^\infty \cos^2 \theta_{io} \\
 & (-1/2)(\rho_x^*(\theta_i) \sin \theta_{io} + \rho_y^*(\theta_i) \cos \theta_{io}) \\
 & + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} K_{ni}^{Fx}(\phi_k, \theta_i) \rho_x^*(\phi_k) ds \\
 & + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} K_{ni}^{Fy}(\phi_k, \theta_i) \rho_y^*(\phi_k) ds \\
 & = \sigma^\infty \sin \theta_{io} \cos \theta_{io} \\
 & \text{付加円孔について } (i=1) \quad 0 \leq \theta_1 \leq 2\pi \\
 & \text{半だ円切欠きについて } (i=2) \quad 0 \leq \theta_2 \leq \pi/2 \\
 & \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

ここで、

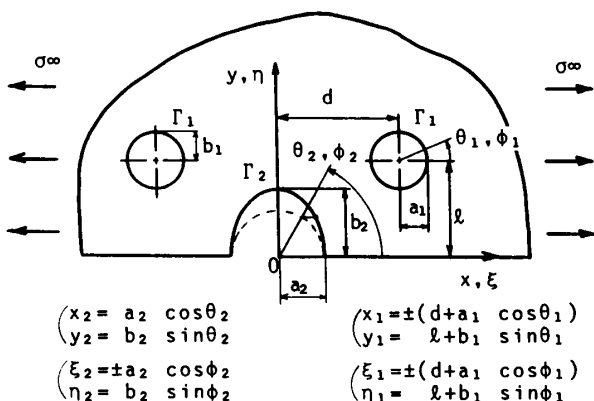


図1 半だ円切欠きによる応力集中を付加円孔 ($a_1=b_1$) によって緩和する問題

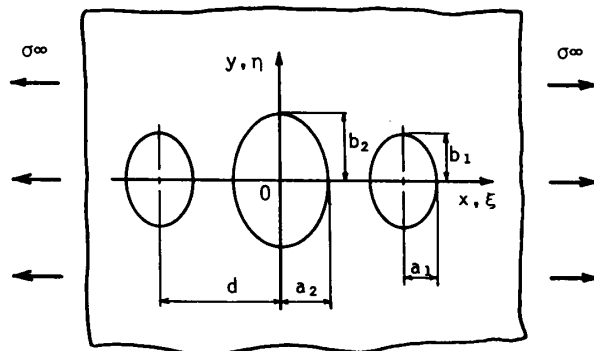


図2 だ円孔による応力集中を付加だ円孔によって緩和する問題

$$\begin{aligned}
 -d\xi &= a_k \sin \phi_k d\phi_k, \quad d\eta = b_k \cos \phi_k d\phi_k \\
 ds &= \sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k} d\phi_k \\
 \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

である。また、 θ_{io} は点(x, y)におけるだ円の外向き法線と x 軸のなす角度である。 $\sum_{k=1}^2$ は円孔および半だ円切欠きとなるべき仮想境界 (Γ_1 および Γ_2) について体積力密度を積分することを意味する。

式(1)は自由表面となすべき仮想境界上における、境界条件 $\sigma_n=0, \tau_{nt}=0$ に相当している。式(1)の第1項は、体積力を \ominus 境界⁽⁷⁾に作用させたときの仮想境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nn}^{Fx}(\phi_k, \theta_i)$ を例にとると、これは孔のない無限板中の k 番めの仮想境界上の y 軸に対称な2点に x 方向の集中力が y 軸に対称に作用するとき i 番めの境界上の点に生じる法線方向の応力 σ_n を意味する。式(1)の第2, 第3項は、 $i=k$ のとき $1/\sin\{(\theta_i-\phi_i)/2\}$ の特異性を有する⁽⁶⁾。そのため、 $\theta_i=\phi_i$ の場合には、積分のコーシーの主値を取るものとする。

従来の体積力法による解析では $\rho_x^*(\phi_k), \rho_y^*(\phi_k)$ を次式のように表現する。

$$\begin{aligned}
 \rho_x^*(\phi_k) &= \rho_x(\phi_k) n_x(\phi_k) \\
 \rho_y^*(\phi_k) &= \rho_y(\phi_k) n_y(\phi_k) \\
 \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

ここで、 $n_x(\phi_k), n_y(\phi_k)$ は、仮想境界上の点(x, y)における単位外向き放線ベクトルの座標成分 ($\cos \theta_{ko}, \sin \theta_{ko}$) であり次式で表される。

$$\begin{aligned}
 n_x(\phi_k) &= \frac{b_k \cos \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} \\
 n_y(\phi_k) &= \frac{a_k \sin \phi_k}{\sqrt{a_k^2 \sin^2 \phi_k + b_k^2 \cos^2 \phi_k}} \\
 \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

従来の体積力法では式(3)の $\rho_x(\phi_k), \rho_y(\phi_k)$ を階段関数で近似して、積分方程式を離散化し解析している

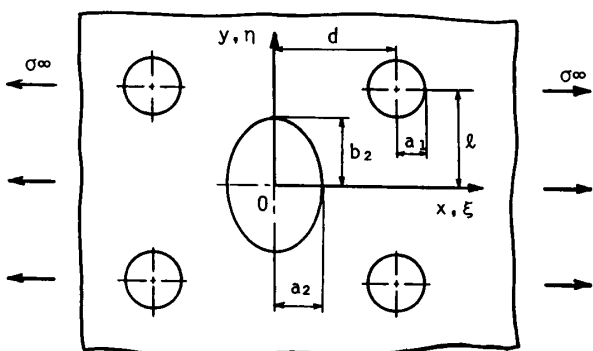


図3 だ円孔による応力集中を付加円孔によって緩和する問題

が、本研究では以下に示す解法を用いる。

前報⁽⁴⁾において、 x 方向の体積力について4種類の基本密度関数 $w_{x1}(\phi_k), \dots, w_{x4}(\phi_k)$ および y 方向について4種類の体積力の基本密度関数 $w_{y1}(\phi_k), \dots, w_{y4}(\phi_k)$ を定義した。未知関数 $\rho_x^*(\phi_1), \rho_y^*(\phi_1)$ はこれらの基本密度関数と $0 \leq \phi_1 \leq \pi/2$ で定義され、 $\phi_1=0$ と $\pi/2$ に対称な関数 $\rho_{x1}(\phi_1), \rho_{x2}(\phi_1), \dots, \rho_{y4}(\phi_1)$ の組合せによって式(5)のように表現する。一方、問題の対称性を考慮して、 $\rho_x(\phi_2), \rho_y(\phi_2)$ には式(3)の表現を用いる。

$$\begin{aligned} \rho_x^*(\phi_1) &= \rho_{x1}(\phi_1)w_{x1}(\phi_1) + \rho_{x2}(\phi_1)w_{x2}(\phi_1) \\ &\quad + \rho_{x3}(\phi_1)w_{x3}(\phi_1) + \rho_{x4}(\phi_1)w_{x4}(\phi_1) \\ \rho_y^*(\phi_1) &= \rho_{y1}(\phi_1)w_{y1}(\phi_1) + \rho_{y2}(\phi_1)w_{y2}(\phi_1) \\ &\quad + \rho_{y3}(\phi_1)w_{y3}(\phi_1) + \rho_{y4}(\phi_1)w_{y4}(\phi_1) \\ \rho_x^*(\phi_2) &= \rho_{x3}(\phi_2)w_{x3}(\phi_2) \end{aligned}$$

$$\rho_y^*(\phi_2) = \rho_{y2}(\phi_2)w_{y2}(\phi_2) \tag{5}$$

式(5)の基本密度関数 $w_{x1}(\phi_k), w_{x2}(\phi_k), \dots, w_{y4}(\phi_k)$ は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} w_{x1}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) / \cos \phi_k \\ w_{x2}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \tan \phi_k \\ w_{x3}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \\ w_{x4}(\phi_k) &= n_x(\phi_k) \sin \phi_k \\ w_{y1}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) / \sin \phi_k \\ w_{y2}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \\ w_{y3}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cot \phi_k \\ w_{y4}(\phi_k) &= n_y(\phi_k) \cos \phi_k \end{aligned} \right\} \tag{6\cdot a}$$

式(5), (6)の表現を用いると式(1)の特異積分方程式は次式で表現される。

$$\begin{aligned} &(-1/2)[\{\rho_{x1}(\theta_1)/\cos \theta_1 + \rho_{x2}(\theta_1) \tan \theta_1 + \rho_{x3}(\theta_1) + \rho_{x4}(\theta_1) \sin \theta_1\} \cos^2 \theta_{1o} \\ &\quad + \{\rho_{y1}(\theta_1)/\sin \theta_1 + \rho_{y2}(\theta_1) + \rho_{y3}(\theta_1) \cot \theta_1 + \rho_{y4}(\theta_1) \cos \theta_1\} \sin^2 \theta_{1o}] \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi_1, \theta_1) \{\rho_{x1}(\phi_1)/\cos \phi_1 + \rho_{x2}(\phi_1) \tan \phi_1 + \rho_{x3}(\phi_1) + \rho_{x4}(\phi_1) \sin \phi_1\} b_1 \cos \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy}(\phi_1, \theta_1) \{\rho_{y1}(\phi_1)/\sin \phi_1 + \rho_{y2}(\phi_1) + \rho_{y3}(\phi_1) \cot \phi_1 + \rho_{y4}(\phi_1) \cos \phi_1\} a_1 \sin \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} K_{nn}^{Fx}(\phi_2, \theta_1) \rho_{x3}(\phi_2) b_2 \cos \phi_2 d\phi_2 + \int_0^{\pi/2} K_{nn}^{Fy}(\phi_2, \theta_1) \rho_{y2}(\phi_2) a_2 \sin \phi_2 d\phi_2 = -\sigma^\infty \cos^2 \theta_{1o} \\ &(-1/2)[-\{\rho_{x1}(\theta_1)/\cos \theta_1 + \rho_{x2}(\theta_1) \tan \theta_1 + \rho_{x3}(\theta_1) + \rho_{x4}(\theta_1) \sin \theta_1\} \\ &\quad + \{\rho_{y1}(\theta_1)/\sin \theta_1 + \rho_{y2}(\theta_1) + \rho_{y3}(\theta_1) \cot \theta_1 + \rho_{y4}(\theta_1) \cos \theta_1\}] \sin \theta_{1o} \cos \theta_{1o} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nt}^{Fx}(\phi_1, \theta_1) \{\rho_{x1}(\phi_1)/\cos \phi_1 + \rho_{x2}(\phi_1) \tan \phi_1 + \rho_{x3}(\phi_1) + \rho_{x4}(\phi_1) \sin \phi_1\} b_1 \cos \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nt}^{Fy}(\phi_1, \theta_1) \{\rho_{y1}(\phi_1)/\sin \phi_1 + \rho_{y2}(\phi_1) + \rho_{y3}(\phi_1) \cot \phi_1 + \rho_{y4}(\phi_1) \cos \phi_1\} a_1 \sin \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} K_{nt}^{Fx}(\phi_2, \theta_1) \rho_{x3}(\phi_2) b_2 \cos \phi_2 d\phi_2 + \int_0^{\pi/2} K_{nt}^{Fy}(\phi_2, \theta_1) \rho_{y2}(\phi_2) a_2 \sin \phi_2 d\phi_2 \\ &= \sigma^\infty \sin \theta_{1o} \cos \theta_{1o} \quad (0 \leq \theta_1 \leq 2\pi) \\ &(1 \leq M \leq M_1) \tag{7\cdot a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-1/2)[\rho_{x3}(\theta_2) \cos^2 \theta_{2o} + \rho_{y2}(\theta_2) \sin^2 \theta_{2o}] \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi_1, \theta_2) \{\rho_{x1}(\phi_1)/\cos \phi_1 + \rho_{x2}(\phi_1) \tan \phi_1 + \rho_{x3}(\phi_1) + \rho_{x4}(\phi_1) \sin \phi_1\} b_1 \cos \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fy}(\phi_1, \theta_2) \{\rho_{y1}(\phi_1)/\sin \phi_1 + \rho_{y2}(\phi_1) + \rho_{y3}(\phi_1) \cot \phi_1 + \rho_{y4}(\phi_1) \cos \phi_1\} a_1 \sin \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} K_{nn}^{Fx}(\phi_2, \theta_2) \rho_{x3}(\phi_2) b_2 \cos \phi_2 d\phi_2 + \int_0^{\pi/2} K_{nn}^{Fy}(\phi_2, \theta_2) \rho_{y2}(\phi_2) a_2 \sin \phi_2 d\phi_2 = -\sigma^\infty \cos^2 \theta_{2o} \\ &(-1/2)[-\rho_{x3}(\theta_2) + \rho_{y2}(\theta_2)] \sin \theta_{2o} \cos \theta_{2o} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nt}^{Fx}(\phi_1, \theta_2) \{\rho_{x1}(\phi_1)/\cos \phi_1 + \rho_{x2}(\phi_1) \tan \phi_1 + \rho_{x3}(\phi_1) + \rho_{x4}(\phi_1) \sin \phi_1\} b_1 \cos \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{2\pi} K_{nt}^{Fy}(\phi_1, \theta_2) \{\rho_{y1}(\phi_1)/\sin \phi_1 + \rho_{y2}(\phi_1) + \rho_{y3}(\phi_1) \cot \phi_1 + \rho_{y4}(\phi_1) \cos \phi_1\} a_1 \sin \phi_1 d\phi_1 \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} K_{nt}^{Fx}(\phi_2, \theta_2) \rho_{x3}(\phi_2) b_2 \cos \phi_2 d\phi_2 + \int_0^{\pi/2} K_{nt}^{Fy}(\phi_2, \theta_2) \rho_{y2}(\phi_2) a_2 \sin \phi_2 d\phi_2 \\ &= \sigma^\infty \sin \theta_{2o} \cos \theta_{2o} \quad (0 \leq \theta_2 \leq \pi/2) \\ &(M_1 + 1 \leq M \leq M_1 + M_2) \tag{7\cdot b} \end{aligned}$$

ここで、付加円孔の $0 \leq \phi_1 \leq 2\pi$ の範囲の選点数を M_1 、半円切欠きの $0 \leq \phi_2 \leq \pi/2$ の範囲の選点数を M_2 、総選点数を $M (= M_1 + M_2)$ としている。

本研究では未知関数を連続関数として近似するために次のような表現を用いる。

$$\begin{aligned} \rho_{x1}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} a_{1n} t_n(\phi_1), & \rho_{x2}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} b_{1n} t_n(\phi_1), & \rho_{x3}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} c_{1n} t_n(\phi_1), & \rho_{x4}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} d_{1n} t_n(\phi_1) \\ \rho_{y1}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} e_{1n} t_n(\phi_1), & \rho_{y2}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} f_{1n} t_n(\phi_1), & \rho_{y3}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} g_{1n} t_n(\phi_1), & \rho_{y4}(\phi_1) &= \sum_{n=1}^{M_1/4} h_{1n} t_n(\phi_1) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\rho_{x3}(\phi_2) = \sum_{n=1}^{M_2} c_{2n} u_n(\phi_2), \quad \rho_{y2}(\phi_2) = \sum_{n=1}^{M_2} f_{2n} u_n(\phi_2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$t_n(\phi_1) = \cos \{2(n-1)\phi_1\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$u_n(\phi_2) = (\pi/2 - \phi_2)^{2(n-1)} \quad \dots\dots\dots (11)$$

以上の離散化の方法により、式(6)の積分方程式は係数 $a_{1n}, b_{1n}, \dots, f_{2n}, h_{2n}$ についての $2M$ 元の連立方程式 [式(12)] に環元される。

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{M_1/4} (a_{1n} A_{1n} + b_{1n} B_{1n} + c_{1n} C_{1n} + d_{1n} D_{1n} + e_{1n} E_{1n} + f_{1n} F_{1n} + g_{1n} G_{1n} + h_{1n} H_{1n}) \\ &+ \sum_{n=1}^{M_2} (c_{2n} C_{2n} + f_{2n} F_{2n}) = -\sigma^\infty \cos^2 \theta_{i0} \\ &\sum_{n=1}^{M_1/4} (a_{1n} I_{1n} + b_{1n} J_{1n} + c_{1n} K_{1n} + d_{1n} L_{1n} + e_{1n} M_{1n} + f_{1n} N_{1n} + g_{1n} O_{1n} + h_{1n} P_{1n}) \\ &+ \sum_{n=1}^{M_2} (c_{2n} K_{2n} + f_{2n} N_{2n}) = \sigma^\infty \sin \theta_{i0} \cos \theta_{i0} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{1n} &= (-1/2)t_n(\theta_1) \cos^2 \theta_{i0} / \cos \theta_1 + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi_1, \theta_1) t_n(\phi_1) b_1 d\phi_1 \\ C_{1n} &= (-1/2)t_n(\theta_1) \cos^2 \theta_{i0} + \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi_1, \theta_1) t_n(\phi_1) b_1 \cos \phi d\phi_1, \\ C_{2n} &= \int_0^{\pi/2} K^{Fx}(\phi_2, \theta_1) u_n(\phi_2) b_2 \cos \phi_2 d\phi_2 \quad (0 \leq \theta_1 \leq 2\pi) \\ &(1 \leq M \leq M_1) \quad \dots\dots\dots (13 \cdot a) \end{aligned}$$

表 1 境界に沿った密度の収束性

θ	M1	ρ_{x1}	ρ_{x2}	ρ_{x3}	ρ_{x4}	ρ_{y1}	ρ_{y2}	ρ_{y3}	ρ_{y4}
0°	12	0.0476	-0.3919	2.5574	-0.0663	-0.1403	-0.7867	-0.3675	-0.0490
	16	0.0465	-0.3886	2.5559	-0.0950	-0.1499	-0.7770	-0.3666	-0.0462
	20	0.0466	-0.3890	2.5561	-0.0911	-0.1488	-0.7780	-0.3666	-0.0465
	24	0.0466	-0.3889	2.5561	-0.0912	-0.1489	-0.7779	-0.3666	-0.0465
20°	12	0.0310	-0.3846	2.5990	-0.1138	-0.1520	-0.8122	-0.3678	-0.0399
	16	0.0315	-0.3835	2.6005	-0.1267	-0.1468	-0.8134	-0.3685	-0.0382
	20	0.0314	-0.3834	2.6005	-0.1262	-0.1479	-0.8129	-0.3683	-0.0383
	24	0.0314	-0.3834	2.6005	-0.1261	-0.1478	-0.8130	-0.3383	-0.0383
40°	12	-0.0020	-0.3734	2.7426	-0.2413	-0.1081	-0.9278	-0.3798	-0.0125
	16	-0.0014	-0.3741	2.7411	-0.2323	-0.1039	-0.9308	-0.3803	-0.0132
	20	-0.0014	-0.3740	2.7415	-0.2331	-0.1030	-0.9313	-0.3803	-0.0131
	24	-0.0014	-0.3739	2.7415	-0.2332	-0.1031	-0.9313	-0.3803	-0.0131
60°	12	-0.0237	-0.3733	2.9730	-0.3990	0.0700	-1.1481	-0.4131	0.0270
	16	-0.0247	-0.3732	2.9722	-0.3998	0.0591	-1.1420	-0.4120	0.0263
	20	-0.0247	-0.3731	2.9718	-0.3987	0.0584	-1.1416	-0.4118	0.0262
	24	-0.0247	-0.3732	2.9717	-0.3986	0.0585	-1.1417	-0.4118	0.0262
80°	12	-0.0287	-0.3805	3.1618	-0.5092	0.2598	-1.3429	-0.4462	0.0574
	16	-0.0283	-0.3805	3.1788	-0.5385	0.2661	-1.3465	-0.4471	0.0601
	20	-0.0283	-0.3804	3.1811	-0.5424	0.2664	-1.3467	-0.4470	0.0603
	24	-0.0283	-0.3804	3.1813	-0.5428	0.2664	-1.3467	-0.4470	0.0603
90°	12	-0.0289	-0.3819	3.1901	-0.5248	0.2904	-1.3727	-0.4514	0.0618
	16	-0.0279	-0.3820	3.2113	-0.5594	0.3021	-1.3796	-0.4529	0.0653
	20	-0.0278	-0.3819	3.2145	-0.5648	0.3035	-1.3804	-0.4529	0.0657
	24	-0.0278	-0.3819	3.2149	-0.5649	0.3036	-1.3805	-0.4529	0.0657

$$\begin{aligned}
 A_{1n} &= \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi_1, \theta_2) t_n(\phi_1) b_1 d\phi_1, \\
 C_{1n} &= \int_0^{2\pi} K_{nn}^{Fx}(\phi_1, \theta_2) t_n(\phi_1) b_1 \cos \phi_1 d\phi_1 \\
 C_{2n} &= (-1/2) u_n(\theta_2) \cos^2 \theta_{20} + \int_0^{\pi/2} K_{nn}^{Fz}(\phi_2, \theta_2) u_n(\phi_2) b_2 \cos \phi_2 d\phi_2 \quad (0 \leq \theta_2 \leq \pi/2) \\
 & \quad (M_1+1 \leq M \leq M_1+M_2) \dots\dots\dots (13 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$B_{1n}, D_{1n}, \dots, P_{1n}, F_{2n}, J_{2n}, N_{2n}$ 等も同様に表される。
 任意の点の応力は係数 $a_{1n}, b_{1n}, \dots, f_{2n}, h_{2n}$ と $A_{1n} \sim P_{1n}$ に相当する影響係数の一次結合で表される。

以上の解析方法により図1, 2, 3に示す問題について、応力集中係数が最小となるような最適形状(a_1, d, l)を決定する。最適形状の探索には、Hooke と Jeeves の直接探索法を用いた⁽²⁾⁽⁸⁾。探索では探索移動とパターン移動が行われ、次々と基点⁽⁸⁾を決めていき、そして基点が決まらなくなったとき、探索を停止し最適形状を得た。

3. 解析結果および考察

3.1 半円切欠きによる応力集中を付加円孔によって緩和する場合の解析例 図1の問題で半無限板の半円切欠き ($b_2/a_2=1$) による応力集中を付加円孔 (a_1

$=b_1$) によって緩和する場合を例にとる。選点数 M_1 を変化させたときの付加円孔縁の未知関数 $\rho_{x1}, \rho_{x2}, \dots, \rho_{y4}$ の収束状況を表1に示す(最適形状の場合)。本解析結果は、 $M_1=20$ 程度で有効数字4けた程度まで収束して、良好な収束性を示している。また、図4は表1の解析結果を図にまとめたものである。 $\rho_{x1}, \rho_{x2}, \dots, \rho_{y4}$ を分布させて解析した本解析では、選点数 $M_1=16$ と $M_1=20$ の結果が有効数字4けた程度まで一致しており、連続関数である真の密度分布をよく近似している。参考のため、未知関数 ρ_x, ρ_y をそのまま階段関数で離散化した従来の体積法を用いた場合の解析結果も分割数が $M_1=12, 24$ の場合について示している⁽⁹⁾。この場合には、特に $\theta=0^\circ, \pm 90^\circ, 180^\circ$ 近くで体積力の真の密度を表現できないために、分割数を増加しても密度が収束しないことがわかる⁽³⁾⁻⁽⁵⁾。さらに、境界に沿った応力 $\sigma_t, \sigma_n, \tau_{nt}$ の収束状況を表2に示す。本解析結果は、 $M_1=20, M_2=12$ 程度で σ_t の値が有効数字5けた程度まで収束して良好な収束性を示している。また、境界上で零であるべき σ_n, τ_{nt} の値は、円孔縁および半円切欠き縁全周において $M_1=20, M_2=12$ 程度でも 10^{-5} 以下であり、高い境界条件の満足度が確かめられた。

最適形状を決定するに当たり、探索の最終段階において形状比 $a_1/\rho, d/\rho, l/\rho$ を0.01 ρ の大きさのステップで変化させたときの計算例を表3に示す。ここで、中央の半円切欠きの最大応力を $\sigma_{tA}(\theta_2=90^\circ)$ 、付加円孔縁に生じる自由縁に近い点Bの最大応力 $\sigma_{tB}(\theta_1 \cong 267^\circ)$ 、自由縁に遠い点Cの最大応力 $\sigma_{tC}(\theta_1 \cong 84^\circ)$ としている。表3より、付加円孔の形状、位置の変化に対して最大応力の値やその発生位置はA, B, Cのいずれかに生じ、その角度も微妙に変化する。しかし、本解析

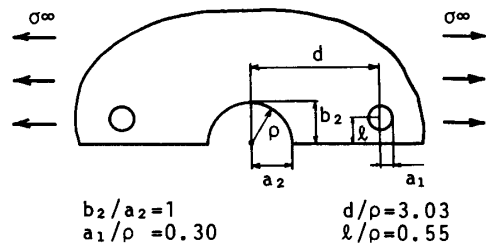
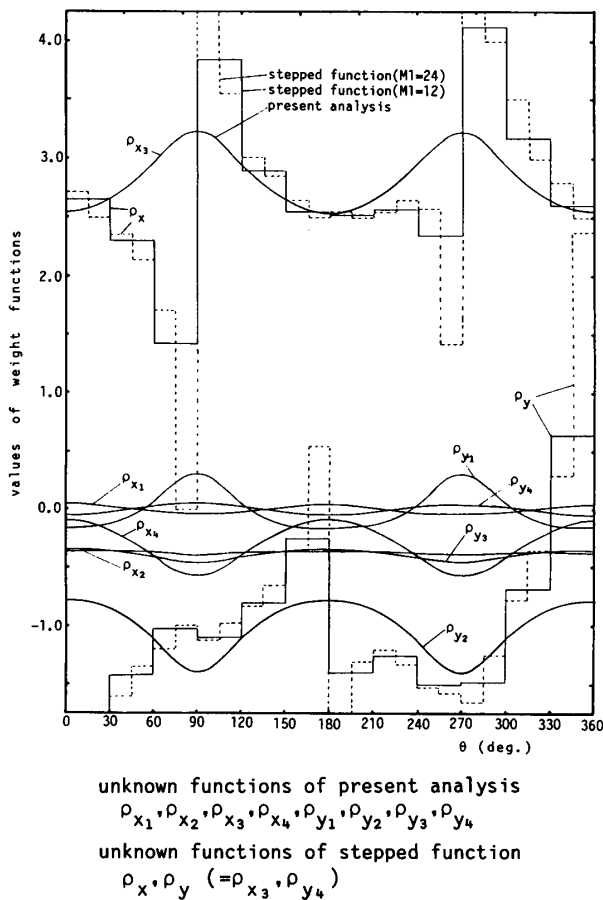


図4 未知関数の収束性の比較

表 2 境界に沿った応力の収束性

θ	M1				M2			
		σ_t	σ_n	τ_{nt}		σ_t	σ_n	τ_{nt}
0°	12	-0.9800	-9.0×10^{-4}	-2.8×10^{-3}	4	0.0000	7.1×10^{-2}	3.1×10^{-4}
	16	-0.9778	7.3×10^{-5}	3.4×10^{-4}	8	0.0000	1.4×10^{-2}	-6.6×10^{-5}
	20	-0.9777	-5.0×10^{-6}	-3.6×10^{-5}	12	0.0000	8.2×10^{-4}	-1.8×10^{-5}
	24	-0.9777	3.0×10^{-7}	3.6×10^{-6}	16	0.0000	-1.7×10^{-4}	-2.0×10^{-5}
20°	12	-0.2741	7.8×10^{-4}	1.0×10^{-3}	4	0.0692	-3.7×10^{-4}	-5.8×10^{-4}
	16	-0.2699	-1.5×10^{-4}	-2.3×10^{-4}	8	0.0716	0.0	0.0
	20	-0.2696	1.4×10^{-5}	2.6×10^{-5}	12	0.0735	-7.0×10^{-8}	-1.4×10^{-7}
	24	-0.2696	-6.6×10^{-7}	-1.4×10^{-6}	16	0.0738	8.8×10^{-9}	1.4×10^{-8}
40°	12	0.9332	9.5×10^{-4}	6.3×10^{-4}	4	0.8744	2.0×10^{-4}	2.2×10^{-4}
	16	0.9310	1.6×10^{-4}	1.3×10^{-4}	8	0.8799	0.0	0.0
	20	0.9312	-1.6×10^{-5}	-1.4×10^{-5}	12	0.8810	2.3×10^{-9}	2.2×10^{-9}
	24	0.9312	-9.8×10^{-7}	-9.6×10^{-6}	16	0.8812	5.5×10^{-11}	4.6×10^{-11}
60°	12	2.1091	-2.1×10^{-3}	-5.8×10^{-4}	4	2.0071	-2.0×10^{-4}	-1.1×10^{-4}
	16	2.1108	-1.2×10^{-4}	-4.2×10^{-5}	8	2.0123	0.0	0.0
	20	2.1108	1.2×10^{-5}	4.9×10^{-6}	12	2.0132	-3.7×10^{-10}	-1.9×10^{-10}
	24	2.1108	2.3×10^{-5}	1.1×10^{-6}	16	2.0133	-1.9×10^{-11}	1.7×10^{-11}
80°	12	2.7149	-1.1×10^{-3}	-2.2×10^{-5}	4	2.8079	4.6×10^{-3}	7.6×10^{-5}
	16	2.7115	4.3×10^{-5}	9.4×10^{-7}	8	2.8126	0.0	0.0
	20	2.7112	-4.5×10^{-6}	-2.5×10^{-7}	12	2.8134	3.7×10^{-10}	5.9×10^{-11}
	24	2.7111	-1.3×10^{-6}	-1.1×10^{-7}	16	2.8135	6.1×10^{-13}	-2.5×10^{-13}
90°	12	2.6878	2.1×10^{-3}	-3.6×10^{-4}	4	2.9208	7.7×10^{-4}	6.3×10^{-7}
	16	2.6826	2.5×10^{-4}	-3.3×10^{-5}	8	2.9249	1.6×10^{-7}	1.8×10^{-10}
	20	2.6820	2.6×10^{-5}	-2.8×10^{-6}	12	2.9257	-1.5×10^{-7}	9.5×10^{-10}
	24	2.6819	2.5×10^{-6}	-2.2×10^{-7}	16	2.9258	-1.8×10^{-11}	1.1×10^{-11}
267.2°	12	2.9224	-7.3×10^{-3}	-4.2×10^{-5}				
	16	2.9234	-8.0×10^{-4}	-1.9×10^{-5}				
	20	2.9235	-7.8×10^{-5}	-3.1×10^{-6}				
	24	2.9236	-7.3×10^{-6}	-3.6×10^{-7}				

($M_2=8$ のとき $\theta=20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ で境界条件を満足させているので $\sigma_n=0, \tau_{nt}=0$ となる.)

表 3 最適形状の決定***

a_1/ρ	d/ρ	l/ρ	σ_{tA}	σ_{tB}	θ_1	σ_{tC}	θ_1
0.30	3.03	0.55	2.9258	2.9235	267.2°	2.7275	83.9°
0.29	3.03	0.55	2.9361	2.8657	267.2°	2.7122	83.7°
0.31	3.03	0.55	2.9150	2.9853	267.3°	2.7431	83.8°
0.30	3.02	0.55	2.9260	2.9188	267.2°	2.7266	83.8°
0.30	3.04	0.55	2.9261	2.9278	267.2°	2.7286	83.8°
0.30	3.03	0.54	2.9249	2.9521	267.3°	2.7263	83.7°
0.30	3.03	0.56	2.9266	2.8970	267.1°	2.7291	83.7°

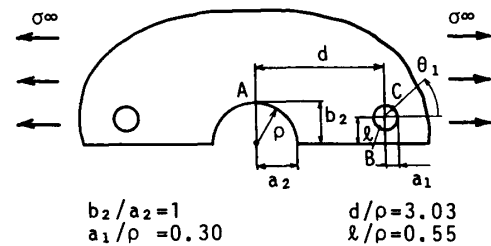
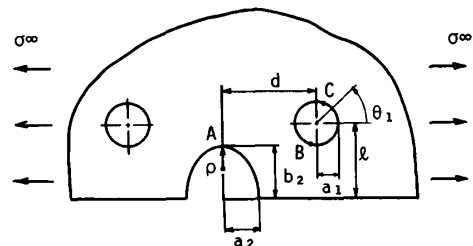


表 4 半円切欠きによる応力集中を付加円孔によって緩和する問題の最適形状

$$\sigma_{t0} = \sigma_{tA} |_{d \rightarrow \infty} \cdot \rho = (a_2)^2 / b_2$$

b_2/ρ	a_1/ρ	d/ρ	l/ρ	σ_{tA}	σ_{tB}	θ_1	σ_{tC}	θ_1	σ_{t0}
1	0.30	3.03	0.55	2.926	2.924	267.2°	2.728	84.0°	3.065
1.5	0.70	3.60	1.30	3.076	2.890	263.4°	3.066	84.0°	3.545
2	1.25	3.77	2.80	3.405	3.312	258.0°	3.405	87.6°	3.951
4	2.30	5.40	4.45	3.494	3.054	253.0°	3.502	86.1°	5.220



*** 表 3~6 では、最適形状 $a_1/\rho, d/\rho, l/\rho$ 等を ± 0.01 の精度で求めている。このとき、最大応力は点 A, B, C のいずれかに生じる。

表 5 だ円孔による応力集中を付加だ円孔によって緩和する問題の最適形状

$$\sigma_{t0} = \sigma_{tA} |_{d \rightarrow \infty}$$

b_2/a_2	b_1/a_1	b_1/a_2	d/a_2	σ_{tA}	σ_{tB}	θ_1	σ_{t0}
1	1	0.82	2.02	2.417	2.411	81.7°	3.000
		(0.85)	(2.17)	(2.462)	(2.462)		
2	1	2.25	3.83	2.596	2.596	84.0°	5.000
2	2	1.72	3.05	3.800	3.799	86.0°	5.000

(): Shibahara-Taniguchi[2]

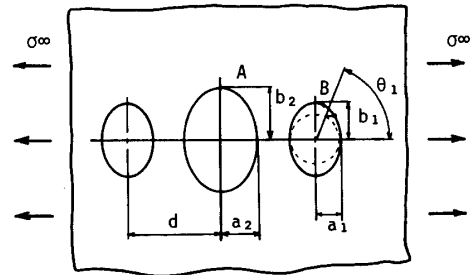
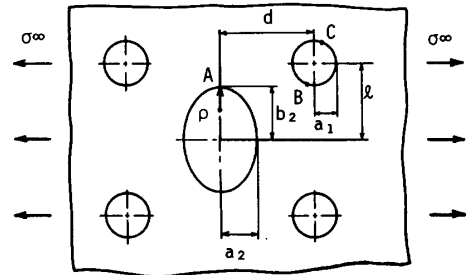


表 6 だ円孔による応力集中を付加円孔によって緩和する問題の最適形状

$$\sigma_{t0} = \sigma_{tA} |_{d \rightarrow \infty, \rho = (a_2)^2 / b_2}$$

b_2/ρ	a_1/ρ	d/ρ	l/ρ	σ_{tA}	σ_{tB}	θ_1	σ_{tC}	θ_1	σ_{t0}
1	0.40	2.95	0.54	2.749	2.001	269.3°	2.747	82.5°	3.000
1.5	0.81	3.95	1.14	2.904	2.526	269.5°	2.906	83.0°	3.449
2	1.28	5.20	1.71	2.988	2.712	269.8°	2.989	84.0°	3.828
4	2.55	5.85	3.48	3.342	3.020	220.0°	3.341	82.1°	5.000



法によればそれらを正確に求めることが可能である。

3・2 半だ円切欠きによる応力集中を付加円孔によって緩和する場合の最適形状 図1の半無限板の半だ円切欠きによる応力集中を付加円孔によって緩和する問題において、中央の半だ円切欠きの形状比を変化させた場合の最適形状を表4に示す。表4では、最適形状での中央の半だ円切欠きの最大応力($\theta_2=90^\circ$)を σ_{tA} 、付加円孔縁に生じる自由縁に近い点Bの最大応力 σ_{tB} 、自由縁に遠い点Cの最大応力 σ_{tC} 、それらの発生位置を θ_1 、中央の半だ円切欠きのみが存在する場合の応力集中係数を σ_{t0} としている。

3・3 だ円孔による応力集中を付加だ円孔によって緩和する場合の最適形状 図2の無限板中のだ円孔による応力集中を付加円孔($b_1/a_1=1$)および付加だ円孔($b_1/a_1=2$)によって緩和する場合の最適形状の解析結果を表5に示す。表5では、最適形状での中央のだ円孔の最大応力($\theta_2=90^\circ$)を σ_{tA} 、付加だ円孔縁に生じる最大応力を σ_{tB} 、その発生位置を θ_1 、中央のだ円孔のみが存在する場合の応力集中係数を σ_{t0} としている。
 $b_1/a_1=1, b_2/a_2=1$ の場合、柴原らの解析⁽²⁾によれば、最適形状は、 $a_1=0.85a_2, d=2.17a_2$ 、最大応力は2.462と決定されていたが、本解析では、 $a_1=0.82a_2, d=2.02a_2$ 、応力集中係数は2.417と決定された。

3・4 だ円孔による応力集中を四つの付加円孔によって緩和する場合の最適形状 図3の無限板中のだ円孔による応力集中を付加円孔($b_1/a_1=1$)によって緩和する場合の最適形状の解析結果を表6に示す。表6では、最適形状での中央のだ円孔の最大応力($\theta_2=90^\circ$)

を付加円孔縁に生じるx軸に近い点Bの最大応力 σ_{tB} 、x軸に遠い点Cの最大応力 σ_{tC} 、それらの発生位置を θ_1 、中央のだ円孔のみが存在する場合の応力集中係数を σ_{t0} としている。

4. 結 言

本研究では、前報までの研究を応用して体積力法の特異積分方程式を厳密に解析し、付加円孔による応力集中緩和の最適形状を求めた。

本論文で解析した問題は以下の3種類である。

- (A) 半だ円切欠きと2円孔の干渉(図1)
- (B) だ円孔と2だ円孔の干渉(図2)
- (C) だ円孔と4円孔の干渉(図3)

いずれも前報で提案した、未知関数を基本密度関数の組合せで表現する解析方法によって、境界上のなめらかな応力分布が得られた。本解析によって得られた最適形状を表に示した(表4~6)。

文 献

- (1) 例えば尾田, 機械の研究, 41-4 (1989), 533.
- (2) 柴原・谷口, 機論, 49-446, A (1983), 1261.
- (3) 野田・松尾, 機論, 58-555, A (1992), 2179.
- (4) 野田・松尾, 機論, 59-559, A (1993), 785.
- (5) 野田・松尾, 機論, 59-564, A (1993), 1964.
- (6) 西谷・陳, 体積力法, (1987), 89, 培風館.
- (7) 西谷, 機誌, 70-580 (1967), 627.
- (8) Jacoby, S. L. S., ほか2名(関根訳), 非線形最適化問題の反復解法, (1976), 73, 培風館.
- (9) 野田・藤田・松尾, 機論, No. 928-1 (1992-3), 19.