

片側に60°V形切欠きを有する帯板の引張りおよび面内曲げ*

野田尚昭**, 西谷弘信***, 深迫 泉****

Tension and In-Plane Bending of a Strip with A 60° V-Shaped Single Edge Notch

by Nao-aki NODA, Hironobu NISITANI, and Izumi FUKASAKO

This paper deals with the stress concentration analysis of a semi-circular or a 60° V-shaped single edge notch in an infinite strip under remote tension and in-plane bending. The stress field induced by a point force in a semi-infinite plate is used to solve these problems. The results show that the Neuber formula gives an underestimated stress concentration factor when the notch is sharp and shallow. In addition, the stress concentration factors of 60° V-shaped notches are also represented by diagrams.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Stress Concentration, Strip, Tension, In-Plane Bending, V-Shaped Notch, Single Edge Notch

1. 緒 言

片側に切欠きを有する帯板の応力集中問題(図1)は, 金属材料の疲労試験などにおいて重要である。しかしながら, 本問題に関しては, 個々の切欠形状に対して応力集中係数を求めた実験結果などが少数報告されている程度で, 切欠形状寸法を系統的に変えて解析を行った研究はまだ報告されていないようである。このため, 現在でもいわゆるノイバーの三角則⁽¹⁾による応力集中の評価が広く行われている。そこで本報では, 片側に60°V形切欠きを有する帯板が引張りあるいは面内曲げを受ける場合の応力集中係数を, 体積力法⁽²⁾⁻⁽⁴⁾を用いて計算した。

2. 解析方法

2.1 解析に用いる基本解 著者らは前報⁽⁵⁾⁽⁶⁾で半無限板問題のグリーン関数を基本解として, 両縁に切欠きを有する帯板の応力集中問題を解析する方法を提案した。この方法は基本解が閉じた形で与えられる

ので, 切欠形状寸法を変えて系統的な解析を行うのに便利である。そこで, 本論文でもこの方法を用いる。

図2は本解法を説明した図である。帯板縁となるべき境界が応力集中部に及ぼす影響を考慮して, 切欠きが浅いときは図2(a)の半無限板のグリーン関数を基本解として用いる。また, 切欠きが深いときには図2(b)に示す半無限板のグリーン関数を基本解とする。結局, 本解法は図2に破線で示した切欠きおよび帯板

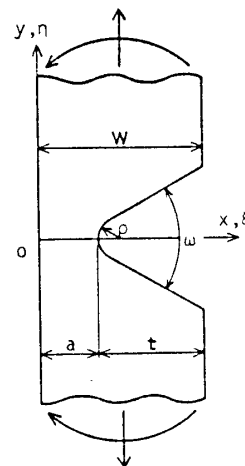


図1 片側に切欠きを有する帯板の引張りと面内曲げ

* 昭和60年12月4日 第935回講演会において講演, 原稿受付 昭和60年5月2日。

** 正員, 九州工業大学(〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*** 正員, 九州大学工学部(〒812 福岡市東区箱崎6-10-1)。

**** 准員, 日立製作所(株)(〒244 横浜市戸塚区吉田町292)。

縁となるべき仮想境界上に、連続して作用させるべき基本解の強さ、つまり体積力の密度を決定する問題に還元される。なお、数値計算の具体的手順の詳細などは、これまでの報告^{(2)~(4)}とほぼ同様であるので、本論文では片側切欠きの問題を解析する際に特に工夫した点についてのみ述べることにする。

2.2 応力集中係数の定義 片側切欠きを有する帯板に無限遠で引張力 P を作用させる場合、材料力学的な力のつりあいから最小断面部には図3(a)に示すように合力 P と曲げモーメント $M_p = Pt/2$ が生じると考えることができる。つまり、この問題における公称応力 σ_{na} としては、合力 P と曲げモーメント M_p による効果を考えねばならない。結局、応力集中係数 K_{ta} は式(1)で定義される。

$$\left. \begin{aligned} K_{ta} &= \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{na}} \\ \sigma_{na} &= \frac{P}{a} + \frac{6M_p}{a^2} \\ &= \frac{P}{a} \left(1 + \frac{3t}{a} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

また、片側切欠きを有する帯板に遠方で曲げモーメント M を作用させる場合、最小断面部には曲げモーメント M が生じ、合力は零となる〔図3(b)〕。つまり、この問題における応力集中係数は式(2)で定義される。

$$K_{tb} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, \sigma_n = \frac{6M}{a^2} \dots\dots\dots (2)$$

しかしながら、実際の数値計算においては、切欠きおよび帯板縁の境界条件を完全に満足させる体積力の密度は閉じた形では求めることはできない。つまり、境界上でいくらか応力が残るので最小断面に生じる合力とモーメントは上述のものとは異なることになる。片側切欠きの問題では、両側切欠きの問題のような対称性がないので、例えば引張りの場合には、最小断面

における曲げモーメントを正しく評価することが、精度よい結果を得るために必要となる。このため、本論文では次のような計算方法を用いる。

2.3 片側に切欠きを有する帯板問題の解法 まず、無限遠での境界条件として一様引張りを与えたときの最小断面部に生じる合力 P_1 、曲げモーメント M_1 、最大応力 $\sigma_{\max 1}$ を数値計算により求める。次に、無限遠での境界条件として面内曲げを与えたときの最小断面部に生じる合力 P_2 、モーメント M_2 、最大応力 $\sigma_{\max 2}$ を同様に求める。この両者を用いれば、最小断面において合力のみ生じ、モーメントが生じない場合〔図3(c)〕の応力集中係数 K_{tc} は式(3)により求まる。

$$K_{tc} = \frac{\sigma_{\max 1} - \alpha_1 \sigma_{\max 2}}{P_1 - \alpha_1 P_2} a \dots\dots\dots (3)$$

ここで、 $\alpha_1 = M_1/M_2$ である。また、最小断面にモーメントのみ生じ、合力が零となる場合〔図3(b)〕の応力集中係数 K_{tb} は式(4)により求まる。

$$K_{tb} = \frac{\sigma_{\max 2} - \alpha_2 \sigma_{\max 1}}{6(M_2 - \alpha_2 M_1)} a^2 \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $\alpha_2 = P_2/P_1$ である。式(3)、(4)を用いれば、無限遠での一様引張り〔図3(a)〕における応力集中係数 K_{ta} は、最小断面に合力 P 、曲げモーメント $M_p = Pt/2$ が生じる場合の組合せとして、式(5)により求めることができる。

$$K_{ta} = \frac{K_{tc} + \alpha_3 K_{tb}}{1 + \alpha_3} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $\alpha_3 = 3t/a$ である。

3. 計算結果および考察

3.1 ノイバーの三角則による応力集中係数 片側切欠きを有する帯板の応力集中の評価について、ノイバーは式(6)のような近似式を提案している。そこ

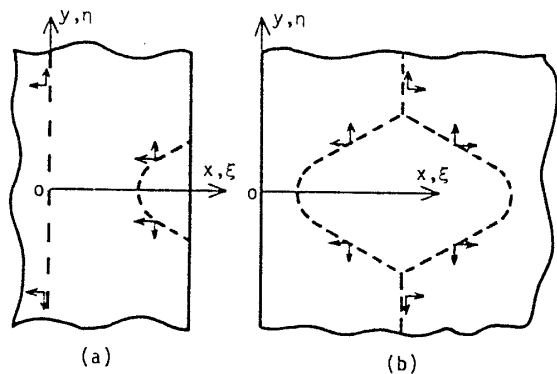


図2 片側切欠きを有する帯板問題の解法

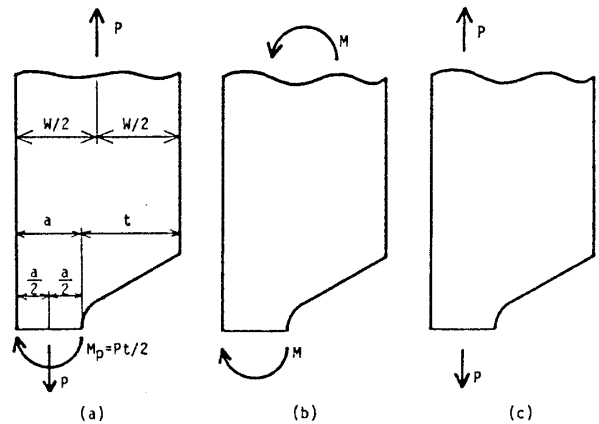


図3 最小断面部に作用する合力と曲げモーメント

で本論文ではこれらの式の誤差を検討した。

$$K_{ts} = \frac{(K_{ts} - 1)(K_{td} - 1)}{\sqrt{(K_{ts} - 1)^2 + (K_{td} - 1)^2}} + 1 \dots\dots\dots (6)$$

$$K_{ts} = 1 + 2\sqrt{\frac{t}{\rho}} \dots\dots\dots (7)$$

(1) 最小断面の中心線上の引張り (最小断面で曲げモーメントが生じない場合)

$$K_{td} = \frac{\beta_1 - 2c}{1 - \frac{c}{\sqrt{a/\rho + 1}}} \dots\dots\dots (8)$$

(2) 面内曲げ

$$K_{td} = \frac{2(a/\rho + 1) - \beta_1\sqrt{a/\rho + 1}}{\beta_2\left(\frac{a}{\rho} + 1\right) - 3\beta_1} \dots\dots\dots (9)$$

式(8), (9)において β_1, β_2, c は次式で与えられる。

$$\beta_1 = \frac{2(a/\rho + 1)\sqrt{a/\rho}}{(a/\rho + 1)\tan^{-1}\sqrt{a/\rho} + \sqrt{a/\rho}}$$

$$\beta_2 = \frac{4(a/\rho)^{3/2}}{3\{\sqrt{a/\rho} + (a/\rho - 1)\tan^{-1}\sqrt{a/\rho}\}}$$

$$c = \frac{\beta_1 - \sqrt{a/\rho + 1}}{\frac{4}{3\beta_2}\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} - 1}$$

(3) 無限遠における一様引張り

$$K_{td} = \frac{K'_{td} + \alpha_3 K''_{td}}{1 + \alpha_3} \dots\dots\dots (10)$$

ここで, $\alpha_3 = 3t/a$, K'_{td} と K''_{td} はそれぞれ式(8), (9)で与えられる K_{td} を意味する。

3.2 片側に半円切欠きを有する帯板の応力集中係数

片側に半円切欠きを有する帯板の引張りにおける応力集中係数を表1に, 面内曲げにおける応力集中係数を表2に示す。ここで比較のために示したノイバーの三角則による値は, 浅い切欠きの解として $K_{ts} = 3.065$ を用いて求めたものである。

3.3 片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の応力集中係数

表3は片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の引張りにおける応力集中係数を, 切欠き半径 ρ と切欠き深さ t を系統的に変えて計算した結果をまとめたものである。また, 表4は面内曲げにおける応力集中係数を同様にまとめたものである。これらの表より, 切欠きが鋭く浅い場合には, ノイバーの三角則は危険側の値を与えることがわかる。それらの危険側の誤差の最大値は本論文で計算した範囲で, 引張りの場合 12%, 面内曲げの場合 4%程度である。また, 面内曲げでは, ノイバーの三角則は, 最大 12%程度の過大

表 1 片側に半円切欠きを有する帯板の引張り

ρ/W	Present analysis		Neuber
	Present analysis	Neuber	
0.02	2.840	2.76	
0.03	2.742	2.62	
0.05	2.566	2.39	
0.1	2.223	2.02	
0.2	1.786	1.68	
0.3	1.524	1.51	
0.4	1.356	1.39	
0.5	1.244	1.30	
0.6	1.167	1.22	
0.7	1.109	1.15	
0.8	1.065	1.10	
0.9	1.029	1.05	

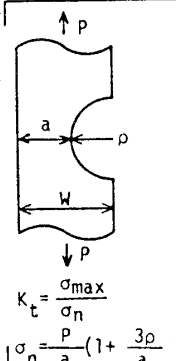


表 2 片側に半円切欠きを有する帯板の面内曲げ

ρ/W	Present analysis		Neuber
	Present analysis	Neuber	
0.02	2.865	2.90	
0.03	2.776	2.82	
0.05	2.613	2.66	
0.1	2.281	2.34	
0.2	1.825	1.91	
0.3	1.539	1.65	
0.4	1.359	1.48	
0.5	1.243	1.35	
0.6	1.166	1.25	
0.7	1.109	1.17	
0.8	1.065	1.10	
0.9	1.029	1.05	

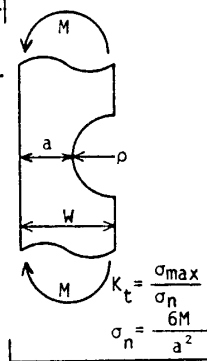


表 3 片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の引張りにおける応力集中係数

t/W	$\rho/W=0.02$		$\rho/W=0.03$		$\rho/W=0.05$		$\rho/W=0.1$		$\rho/W=0.2$		$\rho/W=0.5$		$\rho/W=1.0$	
	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}
0.02	2.840	2.72	2.467	2.38	2.098	2.04	1.738	1.70	1.492	1.45	1.281	1.23	1.179	1.14
0.05	3.653	3.32	3.106	2.84	2.566	2.37	2.034	1.88	1.671	1.55	1.364	1.27	1.219	1.15
0.1	4.218	3.73	3.546	3.16	2.880	2.58	2.223	2.01	1.774	1.62	1.399	1.30	1.228	1.17
0.2	4.486	4.04	3.745	3.39	3.008	2.74	2.280	2.11	1.786	1.68	1.381	1.33	1.206	1.19
0.3	4.397	4.11	3.661	3.44	2.930	2.77	2.210	2.12	1.725	1.69	1.338	1.34	1.178	1.19
0.4	4.175	4.04	3.474	3.38	2.778	2.73	2.096	2.09	1.643	1.66	1.293	1.32	1.152	1.18
0.5	3.881	3.87	3.230	3.24	2.586	2.62	1.961	2.02	1.551	1.62	1.245	1.30	1.127	1.16
0.6	3.527	3.61	2.940	3.03	2.363	2.46	1.809	1.91	1.454	1.54	1.198	1.26	1.103	1.14
0.7	3.112	3.26	2.603	2.75	2.107	2.25	1.640	1.77	1.351	1.45	1.151	1.21	1.078	1.11
0.8	2.610	2.80	2.196	2.38	1.809	1.97	1.452	1.58	1.242	1.33	1.102	1.15	1.052	1.08
0.9	1.967	2.16	1.698	1.87	1.452	1.60	1.242	1.34	1.126	1.19	1.052	1.08	1.027	1.04

な値を与える場合がある。図 4 および図 5 は、それぞれ表 5 および表 6 に示す結果を線図にして示したものである。

3.4 切欠きの形状と応力集中係数の関係 表 5 および表 6 は、片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の

応力集中係数 K_t と、帯板と同一形状の切欠きを有する半無限板の応力集中係数 K_{t0} との比 K_t/K_{t0} を、それぞれ引張りと面内曲げについて示したものである。表より切欠きが浅く鋭い場合には、 K_t/K_{t0} の値は、ほぼ相対切欠き深さ t/W のみによって決まる傾向が

表 4 片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の面内曲げにおける応力集中係数

t/W	ρ/W=0.02		ρ/W=0.03		ρ/W=0.05		ρ/W=0.1		ρ/W=0.2		ρ/W=0.5		ρ/W=1.0	
	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}	K_t	K_{tN}
0.02	2.865	2.85	2.486	2.50	2.113	2.16	1.748	1.81	1.498	1.56	1.284	1.33	1.181	1.22
0.05	3.736	3.64	3.171	3.13	2.612	2.63	2.064	2.12	1.689	1.75	1.373	1.43	1.224	1.27
0.1	4.386	4.22	3.677	3.59	2.974	2.95	2.280	2.32	1.807	1.87	1.413	1.48	1.234	1.29
0.2	4.733	4.58	3.934	3.85	3.140	3.13	2.356	2.41	1.825	1.91	1.393	1.48	1.209	1.28
0.3	4.629	4.56	3.836	3.83	3.048	3.09	2.273	2.37	1.753	1.87	1.344	1.44	1.178	1.25
0.4	4.353	4.39	3.605	3.68	2.862	2.97	2.136	2.27	1.657	1.79	1.294	1.40	1.151	1.22
0.5	3.998	4.13	3.313	3.46	2.636	2.80	1.980	2.15	1.555	1.71	1.244	1.35	1.126	1.19
0.6	3.594	3.79	2.986	3.18	2.388	2.58	1.815	2.00	1.453	1.60	1.197	1.29	1.102	1.16
0.7	3.142	3.37	2.623	2.84	2.116	2.32	1.640	1.82	1.350	1.48	1.150	1.23	1.077	1.12
0.8	2.622	2.85	2.203	2.43	1.811	2.01	1.451	1.61	1.241	1.35	1.102	1.16	1.052	1.08
0.9	1.969	2.18	1.698	1.89	1.451	1.61	1.241	1.35	1.126	1.19	1.052	1.08	1.027	1.04

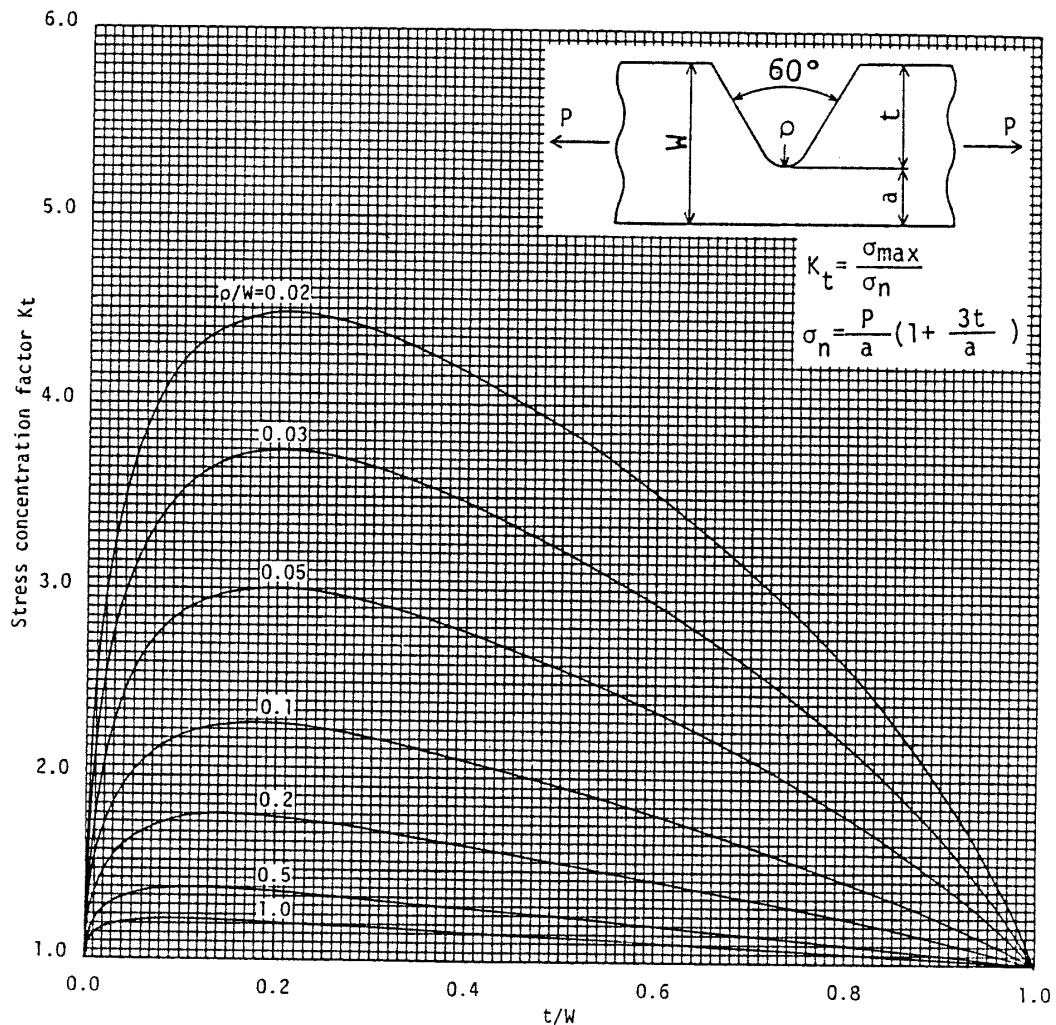


図 4 片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の引張りにおける応力集中係数

表 5 片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の引張りにおける応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0}
 (K_{t0} は帯板と同一形状の 60°V 形切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数)

ρ/W t/W	0.02	0.03	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.02	0.927	0.928	0.927	0.927	0.929	0.932	0.936
0.05	0.836	0.835	0.837	0.839	0.842	0.849	0.857
0.1	0.718	0.719	0.721	0.725	0.732	0.747	0.765
0.2	0.560	0.561	0.564	0.571	0.583	0.610	0.644
0.3	0.455	0.457	0.460	0.469	0.484	0.521	0.565
0.4	0.378	0.380	0.384	0.393	0.411	0.457	0.509
0.5	0.316	0.318	0.323	0.334	0.355	0.406	0.465
0.6	0.264	0.266	0.271	0.284	0.308	0.367	0.429
0.7	0.216	0.219	0.225	0.240	0.268	0.332	0.398
0.8	0.170	0.174	0.182	0.200	0.233	0.302	0.371
0.9	0.121	0.127	0.138	0.163	0.201	0.275	0.348

表 6 片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の面内曲げにおける応力集中係数の相対値 K_t/K_{t0}
 (K_{t0} は帯板と同一形状の 60°V 形切欠きを有する半無限板の引張りにおける応力集中係数)

ρ/W t/W	0.02	0.03	0.05	0.1	0.2	0.5	1.0
0.02	0.935	0.935	0.933	0.933	0.933	0.934	0.937
0.05	0.855	0.853	0.852	0.851	0.851	0.855	0.861
0.1	0.747	0.745	0.744	0.744	0.745	0.754	0.768
0.2	0.591	0.589	0.589	0.590	0.590	0.615	0.645
0.3	0.479	0.479	0.479	0.482	0.491	0.523	0.565
0.4	0.394	0.394	0.395	0.401	0.415	0.457	0.508
0.5	0.326	0.326	0.329	0.337	0.356	0.406	0.465
0.6	0.269	0.270	0.274	0.285	0.308	0.367	0.429
0.7	0.219	0.221	0.226	0.240	0.268	0.331	0.398
0.8	0.171	0.174	0.182	0.200	0.233	0.302	0.371
0.9	0.122	0.127	0.138	0.162	0.201	0.275	0.348

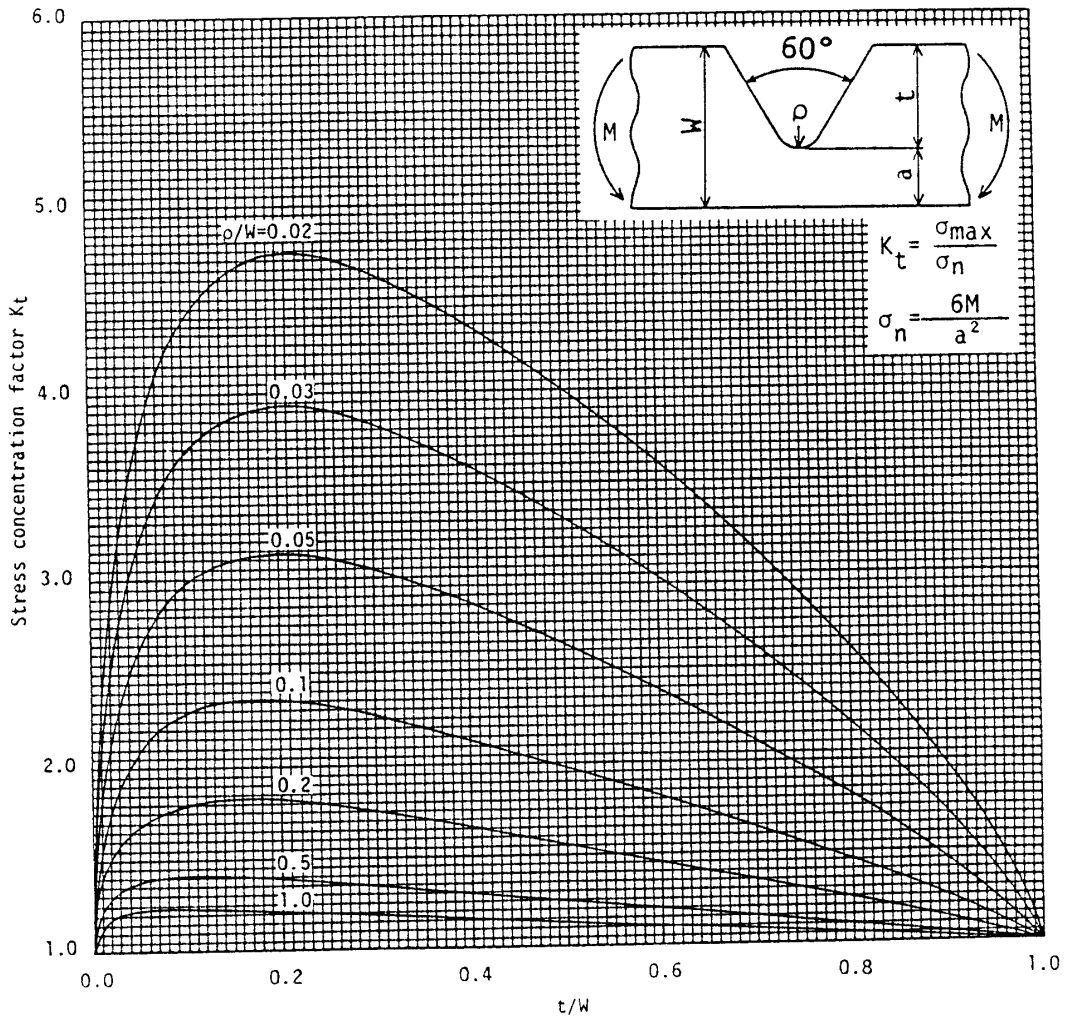
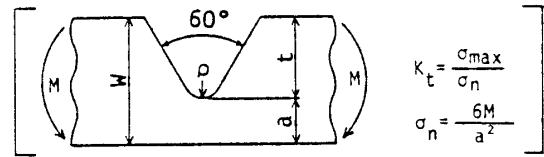
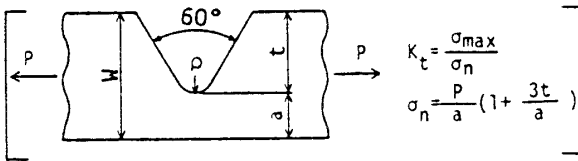


図 5 片側に 60°V 形切欠きを有する帯板の面内曲げにおける応力集中係数

あることがわかる^{*)}。特に面内曲げ(表4)の場合に、この傾向は著しい。この性質を利用すれば、60°V形切欠きを有する半無限板の応力集中係数から、本報で計算していない鋭い60°V形切欠き($\rho/W < 0.02$)を片側に有する帯板の応力集中係数が推定できる⁽⁷⁾。

4. 結 言

本報では片側に切欠きを有する帯板の問題を、半無限板問題のグリーン関数を基本解とする体積力法⁽⁵⁾⁽⁶⁾により考察した。結果をまとめると以下ようになる。

(1) 60°V形切欠きの応力集中係数を系統的に計算した結果、切欠きが浅く鋭い場合には、ノイバーの三角則は危険側の値を与え、本報で計算した範囲で、引張りの場合で最大12%程度、面内曲げの場合で最大4%程度の危険側の誤差を含む場合があることがわかった。一方、安全側を含めた誤差の最大値は、引張り、面内曲げの両者とも12%程度であった。得られた結果より、応力集中係数表と線図(表3, 4および図4, 5)を作成した。

^{*)} ρ を変化させたときの K_t/K_{t0} の変化は、両側切欠きの場合⁽⁵⁾⁽⁶⁾ほど小さくはない。

(2) 帯板と半無限板における、同一形状の60°V形切欠きの応力集中係数の比 K_t/K_{t0} は、切欠きが浅く鋭い場合には、ほぼ切欠き深さ t/W のみによって決まる(表5, 6)。この性質を利用すれば、半無限板の解⁽³⁾を利用して帯板の応力集中係数が評価できる⁽⁷⁾。

本研究の遂行に際して、九州工業大学遠藤達雄教授ならびに原田昭治助教授からは、貴重なご助言とご討論をいただいた。記して謝意を表する。なお、数値計算には、N-1大学間ネットワークにより九州大学大型計算機センターのFACOM M-382を利用した。

文 献

- (1) Neuber, H., *Kerlaspannungslehre*, (第1版), (1937), 128; (第2版), (1958), 9., Springer-Verlag.
- (2) 西谷, 機誌, 70-580 (昭42), 627.
- (3) Nisitani, H., (Sih, G. C. 編), *Mechanics of Fracture*, 5 (1978), 1, Noordhoff Int. Pub.
- (4) Nisitani, H. and Noda, N., *Eng. Fract. Mech.*, 20 (1984), 743.
- (5) 西谷・ほか3名, 機論, 51-467, A (昭60), 1804.
- (6) 野田・ほか3名, 機論, 51-465, A (昭60), 1467.
- (7) 西谷・野田, 機論, 51-461, A (昭60), 54.

討 論

〔質問〕 加藤 章 (中部大学工学部)

応力集中問題に関する一連のご研究に敬意を表す。

切欠きが深い場合、すなわち t/ρ が大きい場合には切欠き部分で分割数を多くしなければ、精度のよい値が得られないと思うが、分割数はどのようにして決められたものか。また、その場合の解の精度はどの程度か。

〔回答〕 分割数は有効数字4けたために誤差が現れないことを目標にして決めた。条件が悪いときには最大200分割まで行った。したがって、表1~4ではほとんどの場合最後のけたまで正しい値になっている。

〔質問〕 長谷川 久夫 (明治大学工学部)

(1) 片側切欠きによる非対称帯板問題のご研究、興味深く拝読させていただいた。表1の結果を見ると対称切欠きのときの K_t よりもかなり小さな値になっている。これは曲げモーメントによる曲げ応力の影響と帯板形状(片側切欠きすなわち対称面が自由表面に相当すること)の影響と考えられるが、どちらの影響のほうがどの程度大きいのか。

(2) 式(1)の σ_{na} の定義の曲げ応力の項は材料力学的なもので弾性論的な理想的なものではないが、これは K_{ta} の値にどのような影響を与えているのか。

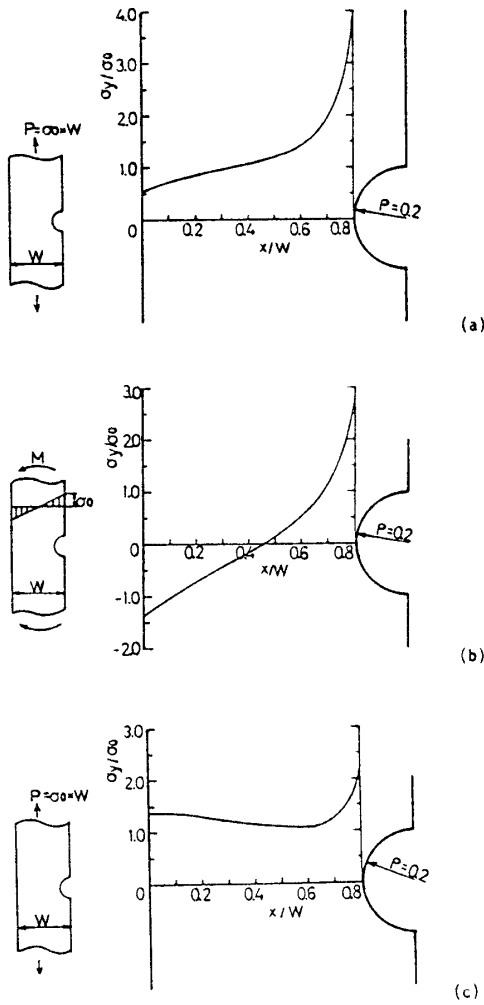
(3) 最小断面上の応力分布はどのようになっているのか。また、式(1)の第1項と第2項の比はどの程度か。

(4) y 方向にはどれくらいの距離まで体積力を分布させたのか。

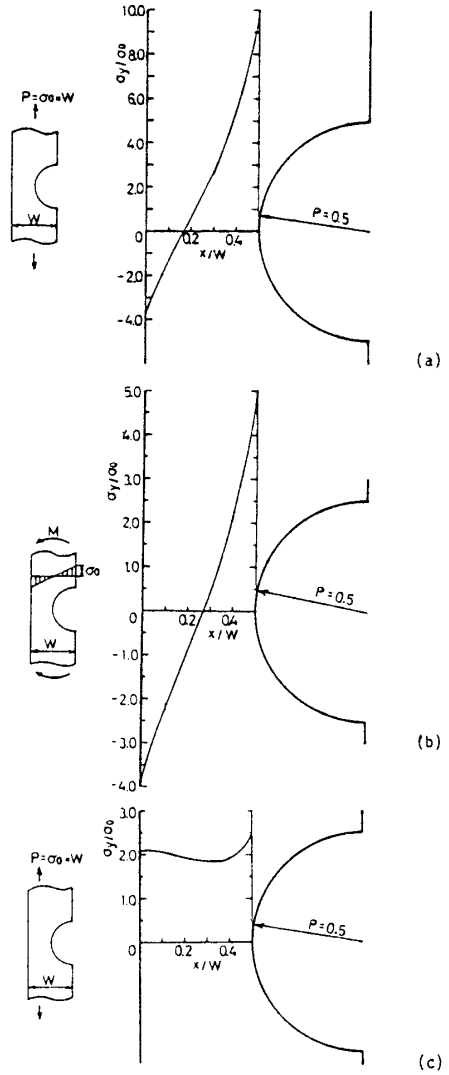
〔回答〕 (1) 公称応力として曲げモーメントの影響を考慮した式(1)を採用しているため、両側切欠きの場合よりも最大応力は大きくなるにもかかわらず、表1の数値は小さめになっている。この理由としては、ご指摘のように曲げモーメントの影響と帯板形状の影響を考慮することができるが、両者は互いに関連しているため、それらの影響を分離して比較することは難しいように思われる。ご質問の後半の部分については、ご指摘のとおり $K_t \rightarrow 3.065$ となるものと考えられる。

(2) 式(1)の σ_{na} の定義は、切欠きが深くなった極限の状態に弾性論的に得られる理想値と一致するように決められたものである。したがって、この定義は切欠きが深くなった場合に応力集中係数 K_{ta} が1に近づくような性質を与えている。

(3) 付図1と付図2は、片側に半円切欠きを有す



付図1 最小断面における応力分布
(半円切欠き $\rho/W = 0.2$ の場合)



付図2 最小断面における応力分布
(半円切欠き $\rho/W = 0.5$ の場合)

る帯板が,

- (a) 無限遠における一様引張り
- (b) 無限遠における純曲げ
- (c) 最小断面の中心線上の引張り

を受ける場合の応力分布を、それぞれ $\rho/W = 0.2$ と 0.5 の場合について示したものである。式(1)の第1項と第2項の比は、理想的には $3t/a$ となるが、実際

の数値計算で直接(a)の場合を解析する際には、それよりもいくらか小さい値が得られる。

- (4) 最低の場合で帯板幅 W の2倍程度まで分布させた。