

任意個の回転だ円体状介在物を持つ無限体の引張り*

松尾忠利*¹, 野田尚昭*², 原田昭治*²

Tension of an Infinite Body Containing a Row of Ellipsoidal Inclusions

Tadatoshi MATSUO, Nao Aki NODA and Shoji HARADA

This paper deals with a row of equally spaced equal ellipsoidal inclusions in an infinite body subjected to tension. Based on the concepts of the body force method, the problems are formulated as a system of singular integral equations with Cauchy type or logarithmic type singularities, where the densities of body forces distributed in the y and z directions of infinite bodies having the same elastic constants of the matrix and inclusions are unknown functions. In order to satisfy the boundary conditions along the inclusions, eight kinds of fundamental density functions proposed in our previous paper are used. In the analysis, the number, shape and distance of inclusions are varied systematically; then, the magnitude and position of the maximum stress are examined. For any fixed shape and size of inclusions, the maximum stress is shown to be linear with the reciprocal of the squared number of inclusions.

Key Words: Elasticity, Body Force Method, Numerical Analysis, Singular Integral Equation, Stress Concentration, Ellipsoidal Inclusion, Interaction Effect

1. 緒 言

鑄造材料の欠陥として空かや介在物が考えられるが、鑄造材料の信頼性評価のためには、欠陥による応力集中や、欠陥周囲の応力分布を把握する必要がある。また、介在物が複数個存在する場合には、その干渉効果により介在物が単独に存在する場合と異なる値の応力集中を生じる。このとき、最大応力の発生位置と大きさは介在物の形状比と位置および母材と介在物の弾性比により微妙に変化する。そのため厳密な解析には母材と介在物の境界上のなめらかな応力分布を求める必要がある。

欠陥が複数個存在する問題としてはこれまで、2個^{(1)~(5)}、3個⁽⁶⁾の球かおよび回転だ円体状空か列⁽²⁾を有する無限体の問題などが解析されているが、回転だ円体状介在物が複数個存在する問題はこれまで研究が見当たらない。前報において、著者らは体積力法の特異積分方程式を精度良く解析する方法を用いて、2個

の回転だ円体状介在物を有する無限体の応力集中問題を解析した⁽⁷⁾。そこで、本報では前報の解法を拡張して、任意個の回転だ円体状介在物を有する無限体の応力集中問題を解析する。介在物の個数、介在物の形状比と距離および母材と介在物の弾性比を変化させて応力集中の干渉効果を系統的に調べる。さらに、介在物の個数と最大応力との漸近特性より個数が無限大の場合の応力集中係数を求め、前報で報告した、無限板中のだ円形介在物列の応力集中の干渉問題⁽⁸⁾と干渉効果を比較する。

2. 一列回転だ円体状介在物の干渉問題の解析法

本解析方法を図1に示すような、遠方で一様な z 方向の引張応力 σ_z^0 が作用している無限体中の大きさの等しい N 個(N は偶数)の一列回転だ円体状介在物の干渉問題を例にとって説明する。介在物の個数が奇数個の場合も同様に解析できる。この問題は、重ね合わせの原理に基づく体積力法の考え方により、無限体中の2点 $[\rho = a \cos \alpha_k, \zeta = \pm\{d + 2d(k-1) + b \sin \alpha_k\}]$ に集中力の輪が作用するときの任意の点 $(r = a \cos \phi_i, z = d + 2d(i-1) + b \sin \phi_i)$ の応力場の解 $(K_{nn}^{Fr}, K_{nn}^{Fz}, K_{nr}^{Fr}, K_{nr}^{Fz})$ と変位場の解 $(K_{ur}^{Fr}, K_{ur}^{Fz}, K_{uz}^{Fr},$

* 1995年8月24日 M&M'95 材料力学部門講演会において講演、原稿受付 1995年9月11日。

^{*1} 正員、福島工業高等専門学校 (〒970 いわき市平土荒川字長尾30)。

^{*2} 正員、九州工業大学工学部 (〒804 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

K_{ij}^{Fz} を用いて解くことができる⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾[ここで、着力点の円筒座標を (ρ, ϕ, ζ) として注目点の円筒座標 (r, θ, z) と区別して用いる]。このとき問題は、母材 (E_M, ν_M) および介在物 (E_I, ν_I) と同じ弾性定数をもつ無限体 (無限体 M と無限体 I) 中の仮想境界上に分布させた r, z 方向の体積力密度 $\rho_{rM}^*(a_k), \rho_{zM}^*(a_k)$ および $\rho_{rI}^*(a_k), \rho_{zI}^*(a_k)$ を未知関数とする特異積分方程式 (1), (2) で表現される。

$$\begin{aligned}
 & -(1/2)\{\rho_{rM}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} + \rho_{zM}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0}\} + (1/2)\{\rho_{rI}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0} + \rho_{zI}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0}\} \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(a_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nnM}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zM}^*(a_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(a_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zI}^*(a_k) ds = -\sigma_z^\infty \sin^2 \psi_{i0} \\
 & -(1/2)\{-\rho_{rM}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} + \rho_{zM}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0}\} + (1/2)\{-\rho_{rI}^*(\psi_i) \sin \psi_{i0} + \rho_{zI}^*(\psi_i) \cos \psi_{i0}\} \\
 & + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niM}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(a_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niM}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zM}^*(a_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(a_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{niI}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zI}^*(a_k) ds = -\sigma_z^\infty \sin \psi_{i0} \cos \psi_{i0} \\
 & (i=1 \sim N/2) \dots\dots\dots (1) \\
 & \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(a_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urM}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zM}^*(a_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(a_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{urI}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zI}^*(a_k) ds = \nu_M \sigma_z^\infty r / E_M \\
 & \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rM}^*(a_k) ds + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzM}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zM}^*(a_k) ds - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{FR}(a_k, \psi_i) \rho_{rI}^*(a_k) ds \\
 & - \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{uzI}^{Fz}(a_k, \psi_i) \rho_{zI}^*(a_k) ds = -\sigma_z^\infty z / E_M \\
 & (i=1 \sim N/2) \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$-d\rho_k = a \sin a_k da_k, \quad d\zeta_k = b \cos a_k da_k, \quad ds = \sqrt{a^2 \sin^2 a_k + b^2 \cos^2 a_k} da_k \dots\dots\dots (3)$$

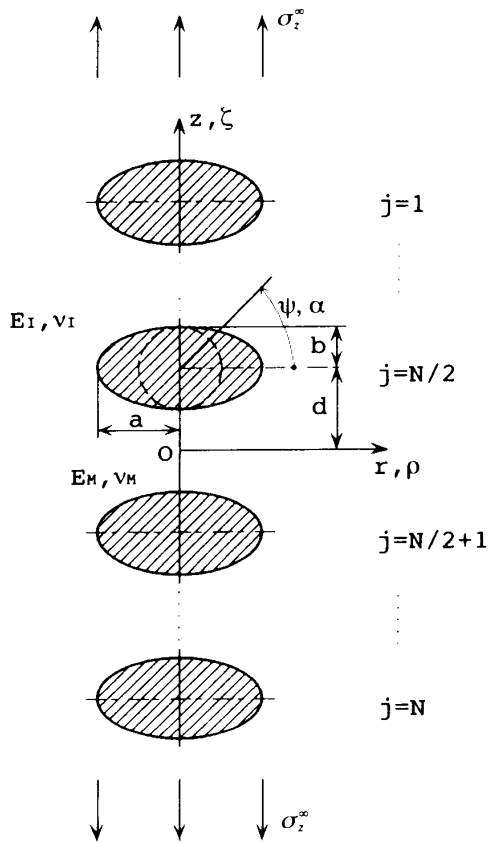


Fig. 1 A row of ellipsoidal inclusions

である。また、 ψ_{i0} は点 (r, z) における介在物の外向き法線と r 軸のなす角度である。 $\sum_{k=1}^{N/2}$ は N 個の回転だ円体状介在物となるべき仮想境界について体積力密度を積分することを意味する。

無限体 M 中の回転だ円体状空かとなるべき境界に生じる応力と変位を $\sigma_{nM}, \tau_{nM}, U_{rM}, U_{zM}$ 、無限体 I 中の回転だ円体状介在物となるべき境界に生じる応力と変位をそれぞれ、 $\sigma_{nI}, \tau_{nI}, U_{rI}, U_{zI}$ とすると、式 (1), (2) は母材と介在物の接合境界上における、境界条件 $\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0, \tau_{nM} - \tau_{nI} = 0, U_{rM} - U_{rI} = 0, U_{zM} - U_{zI} = 0$ に相当している。式 (1) の第 1 項と第 2 項は、体積力を無限小近傍からなる境界上⁽⁹⁾ に作用させたとき境界条件を満たすべき仮想境界上に生じる応力の項である。また、 $K_{nnM}^{FR}(a_k, \psi_i)$ を例にとると、これは無限体 M の仮想境界上の 1 点に r 方向に集中力の輪が作用するとき境界上の点に生じる法線方向の応力 σ_{nM} を意味する。式 (1) はコーシー形⁽¹¹⁾、式 (2) は対数形の特異性を有する項を含んでいる。そのため $\psi_i = \alpha_i$ の場合には、式 (1) は積分のコーシーの主値をとるものとする。

式 (1), (2) の特異積分方程式を精度良く解析するために、前報において、 r 方向の体積力について 4 種類の基本密度関数 $w_{r1}(a_k), \dots, w_{r4}(a_k)$ および z 方向

について4種類の体積力の基本密度関数 $w_{z1}(a_k), \dots, w_{z4}(a_k)$ を定義した⁽⁴⁾。この問題の対称性より、基本密度関数として $w_{r3}(a_k), w_{r4}(a_k), w_{z1}(a_k), w_{z2}(a_k)$ を採用すれば、未知関数は基本密度関数と重み関数の一次結合により次式のように表現される。

$$\begin{aligned} \rho_{r3M}^*(a_k) &= \rho_{r3M}(a_k)w_{r3}(a_k) + \rho_{r4M}(a_k)w_{r4}(a_k) \\ \rho_{z2M}^*(a_k) &= \rho_{z1M}(a_k)w_{z1}(a_k) + \rho_{z2M}(a_k)w_{z2}(a_k) \\ \rho_{r3I}^*(a_k) &= \rho_{r3I}(a_k)w_{r3}(a_k) + \rho_{r4I}(a_k)w_{r4}(a_k) \\ \rho_{z1I}^*(a_k) &= \rho_{z1I}(a_k)w_{z1}(a_k) + \rho_{z2I}(a_k)w_{z2}(a_k) \end{aligned} \quad (k=1 \sim N/2) \dots\dots\dots (4)$$

ここで、基本密度関数 $w_{r1}(a_k), w_{r2}(a_k), \dots, w_{y4}(a_k)$ は次式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} w_{r1}(a_k) &= n_r(a_k) / \cos a_k \\ w_{r2}(a_k) &= n_r(a_k) \tan a_k \\ w_{r3}(a_k) &= n_r(a_k) \\ w_{r4}(a_k) &= n_r(a_k) \sin a_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{z1}(a_k) &= n_z(a_k) / \sin a_k \\ w_{z2}(a_k) &= n_z(a_k) \\ w_{z3}(a_k) &= n_z(a_k) \cot a_k \\ w_{z4}(a_k) &= n_z(a_k) \cos a_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5 \cdot b)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} n_r(a_k) &= \frac{b \cos a_k}{\sqrt{a^2 \sin^2 a_k + b^2 \cos^2 a_k}} \\ n_z(a_k) &= \frac{a \sin a_k}{\sqrt{a^2 \sin^2 a_k + b^2 \cos^2 a_k}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

さらに、未知関数を連続関数として近似するために重み関数を多項式を用いて次のように表現する。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{r3M}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} a_{nM} t_n(a_k) \\ \rho_{r4M}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} b_{nM} t_n(a_k) \\ \rho_{z1M}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} c_{nM} t_n(a_k) \\ \rho_{z2M}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} d_{nM} t_n(a_k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{r3I}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} a_{nI} t_n(a_k) \\ \rho_{r4I}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} b_{nI} t_n(a_k) \\ \rho_{z1I}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} c_{nI} t_n(a_k) \\ \rho_{z2I}(a_k) &= \sum_{n=1}^{M/2} d_{nI} t_n(a_k) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$t_n(a_k) = \cos \{2(n-1)a_k\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 M は $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$ の範囲の選点数である。以上の離散化の方法により式(1)、(2)の特異積分方程式は式(9)、(10)で示される $4M * N/2$ 元の連立方程式に還元される。

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM} A_{nM} + b_{nM} B_{nM} + c_{nM} C_{nM} + d_{nM} D_{nM} + a_{nI} A_{nI} + b_{nI} B_{nI} + c_{nI} C_{nI} + d_{nI} D_{nI}) = -\sigma_z^\infty \sin^2 \psi_{i0}$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM} E_{nM} + b_{nM} F_{nM} + c_{nM} G_{nM} + d_{nM} H_{nM} + a_{nI} E_{nI} + b_{nI} F_{nI} + c_{nI} G_{nI} + d_{nI} H_{nI}) = -\sigma_z^\infty \sin \psi_{i0} \cos \psi_{i0} \dots\dots\dots (9)$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM} I_{nM} + b_{nM} J_{nM} + c_{nM} K_{nM} + d_{nM} L_{nM} + a_{nI} I_{nI} + b_{nI} J_{nI} + c_{nI} K_{nI} + d_{nI} L_{nI}) = \nu_M \sigma_z^\infty r / E_M$$

$$\sum_{n=1}^{M/2} (a_{nM} M_{nM} + b_{nM} N_{nM} + c_{nM} O_{nM} + d_{nM} P_{nM} + a_{nI} M_{nI} + b_{nI} N_{nI} + c_{nI} O_{nI} + d_{nI} P_{nI}) = -\sigma_z^\infty z / E_M \dots\dots\dots (10)$$

$$A_{nM} = -(1/2)t_n(\psi_i) \cos^2 \psi_{i0} / \cos \psi_i + \sum_{k=1}^{N/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} K_{nM}^{Fr}(a_k, \psi_i) t_n(a_k) b \cos a_k da_k \dots\dots\dots (11)$$

任意の点の応力は係数 $a_{nM}, b_{nM}, c_{nM}, d_{nM}, a_{nI}, b_{nI}, c_{nI}, d_{nI}$ と $A_{nM} \sim P_{nI}$ に相当する影響係数の一次結合で表現される。以上の解析方法により任意個の回転だ円体状介在物の干渉効果を介在物の個数、形状比と弾性比を系統的に変化させて解析する。

3. 解析結果および考察

図1の無限体中の任意個の1列回転だ円体状介在物の干渉問題において、介在物の個数 $N=6$ 、形状比が $a/b=1, b/d=0.6, \sigma_z^\infty=1, E_I/E_M=0.5$ の場合の最大応力が生じる介在物(最も外側の介在物)の境界縁に沿った応力 $\sigma_{nM}, \sigma_{nI}, \tau_{nM}, \tau_{nI}$ の収束状況を表1に示す。本解析結果は、 $M=12$ 程度で有効数字5けた程度まで収束して良好な収束性を示している。さらに境界条件($\sigma_{nM} - \sigma_{nI} = 0, \tau_{nM} - \tau_{nI} = 0, U_{rM} - U_{rI} = 0, U_{zM} - U_{zI} = 0$)の満足度を確かめるために、それらの値を表2に示す。境界上で零であるべき $\sigma_{nM} - \sigma_{nI}$ 等の値は境界全周で $M=12$ 程度でも 10^{-5} 以下であり高い境界条件の満足度が確かめられた。

次に図2、3は介在物の個数 $N=2 \sim 8$ に対し $a/b=1, b/d=0.6, \sigma_z^\infty=1, E_I/E_M=0.5, 2.0$ のときの母材に生じる最大応力の値を示した図である。ここで、図2、3の縦軸は各介在物境界での母材の $\sigma_{j \max}$ を無限体中の一つの回転だ円体状介在物の応力集中係数 σ_0 で無次元化した $S_{j \max} = \sigma_{j \max} / \sigma_0$ をとっている。ここで、 $\sigma_{j \max}$ は j 番目の介在物境界上での母材の主応力の最大値である。図2、3より $E_I/E_M < 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に、 $E_I/E_M > 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に最大応力が生じることがわかる。また、紙面の都合により図示していないが、介在物においても $E_I/E_M < 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に、

Table 1 Stress distribution along the outermost inclusion boundary

($N=6, a/b=1, b/d=0.6, E_I/E_M=0.5$)

$\psi(\text{deg.})$	M	σ_{tM}	σ_{tI}	σ_{nM}	σ_{nI}	τ_{ntM}	τ_{ntI}
-90.	4	-0.2223	0.0185	0.6221	0.6063	0.0000	0.0000
	8	-0.2141	0.0271	0.6265	0.6261	0.0000	0.0000
	12	-0.2140	0.0273	0.6266	0.6266	0.0000	0.0000
	16	-0.2140	0.0273	0.6266	0.6266	0.0000	0.0000
-80.	4	-0.1820	0.0326	0.6087	0.5974	-0.0961	-0.0928
	8	-0.1759	0.0430	0.6121	0.6120	-0.0983	-0.0982
	12	-0.1758	0.0432	0.6121	0.6121	-0.0983	-0.0983
	16	-0.1758	0.0432	0.6121	0.6121	-0.0983	-0.0983
-40.	4	0.6393	0.3909	0.2929	0.2950	-0.3116	-0.3199
	8	0.6383	0.3815	0.2925	0.2925	-0.3123	-0.3121
	12	0.6383	0.3819	0.2925	0.2925	-0.3123	-0.3123
	16	0.6383	0.3818	0.2925	0.2925	-0.3123	-0.3123
-20.	4	1.1159	0.5928	0.1003	0.1005	-0.2102	-0.2091
	8	1.1171	0.5804	0.1013	0.1012	-0.2115	-0.2116
	12	1.1171	0.5802	0.1013	0.1013	-0.2115	-0.2115
	16	1.1171	0.5802	0.1013	0.1013	-0.2115	-0.2115
0.	4	1.3206	0.6646	0.0213	0.0241	-0.0042	-0.0003
	8	1.3193	0.6643	0.0216	0.0217	-0.0053	-0.0052
	12	1.3192	0.6642	0.0216	0.0216	-0.0053	-0.0053
	16	1.3192	0.6642	0.0216	0.0216	-0.0053	-0.0053
0.9	4	1.3210	0.6643	0.0214	0.0242	0.0054	0.0092
	8	1.3195	0.6644	0.0216	0.0217	0.0043	0.0044
	12	1.3195	0.6644	0.0216	0.0216	0.0043	0.0043
	16	1.3195	0.6644	0.0216	0.0216	0.0043	0.0043
20.	4	1.1486	0.5880	0.0950	0.0955	0.2036	0.2039
	8	1.1468	0.5936	0.0947	0.0947	0.2039	0.2038
	12	1.1468	0.5937	0.0947	0.0947	0.2039	0.2039
	16	1.1468	0.5937	0.0947	0.0947	0.2039	0.2039
40.	4	0.6839	0.4007	0.2862	0.2838	0.3165	0.3157
	8	0.6848	0.4038	0.2862	0.2863	0.3172	0.3172
	12	0.6848	0.4037	0.2862	0.2862	0.3172	0.3172
	16	0.6848	0.4037	0.2862	0.2862	0.3172	0.3172
80.	4	-0.1920	0.0451	0.6509	0.6523	0.1113	0.1113
	8	-0.1931	0.0425	0.6488	0.6488	0.1109	0.1109
	12	-0.1931	0.0425	0.6487	0.6487	0.1109	0.1109
	16	-0.1931	0.0425	0.6487	0.6487	0.1109	0.1109
90.	4	-0.2390	0.0257	0.6708	0.6726	0.0000	0.0000
	8	-0.2406	0.0220	0.6684	0.6685	0.0000	0.0000
	12	-0.2407	0.0229	0.6684	0.6684	0.0000	0.0000
	16	-0.2408	0.0229	0.6684	0.6684	0.0000	0.0000

Table 2 Compliance of boundary condition

($N=6, a/b=1, b/d=0.6, E_I/E_M=0.5$)

$\psi(\text{deg.})$	M	$\sigma_{tM}-\sigma_{tI}$	$\tau_{ntM}-\tau_{ntI}$	$U_{tM}-U_{tI}$	$U_{nM}-U_{nI}$
-90.	4	1.6×10^{-2}	0.000	-2.3×10^{-5}	-7.4×10^{-3}
	8	3.6×10^{-4}	0.000	-2.9×10^{-7}	-9.0×10^{-5}
	12	7.7×10^{-6}	0.000	1.5×10^{-8}	1.4×10^{-5}
	16	8.7×10^{-7}	0.000	7.3×10^{-9}	7.1×10^{-6}
-80.	4	1.1×10^{-2}	-3.2×10^{-3}	-3.4×10^{-4}	-5.5×10^{-3}
	8	6.0×10^{-5}	-1.7×10^{-5}	-1.1×10^{-6}	-1.6×10^{-5}
	12	-2.8×10^{-6}	8.0×10^{-7}	3.3×10^{-8}	4.9×10^{-7}
	16	-7.5×10^{-8}	1.8×10^{-8}	4.6×10^{-10}	8.0×10^{-9}
-40.	4	-2.1×10^{-3}	8.4×10^{-3}	1.2×10^{-3}	4.4×10^{-3}
	8	4.3×10^{-5}	-1.7×10^{-4}	-1.4×10^{-5}	-4.7×10^{-5}
	12	-5.0×10^{-7}	1.9×10^{-6}	1.0×10^{-7}	3.4×10^{-7}
	16	2.0×10^{-10}	-1.3×10^{-8}	-3.3×10^{-10}	-1.2×10^{-9}
-20.	4	-2.4×10^{-4}	-1.1×10^{-3}	-2.0×10^{-4}	-6.2×10^{-4}
	8	3.5×10^{-5}	1.6×10^{-4}	1.6×10^{-5}	4.5×10^{-5}
	12	3.0×10^{-7}	1.5×10^{-6}	9.7×10^{-8}	2.6×10^{-7}
	16	-9.7×10^{-9}	-3.1×10^{-8}	-1.4×10^{-9}	-3.9×10^{-9}
0.	4	-2.8×10^{-3}	-3.9×10^{-3}	-9.8×10^{-4}	-2.8×10^{-3}
	8	-7.7×10^{-5}	-1.1×10^{-4}	-1.5×10^{-5}	-3.8×10^{-5}
	12	-1.3×10^{-6}	-2.0×10^{-6}	-1.7×10^{-7}	-4.2×10^{-7}
	16	-4.5×10^{-9}	-2.9×10^{-8}	-1.8×10^{-9}	-4.3×10^{-9}
0.9	4	-2.8×10^{-3}	-3.8×10^{-3}	-9.7×10^{-4}	-2.8×10^{-3}
	8	-7.8×10^{-5}	-1.1×10^{-4}	-1.4×10^{-5}	-3.7×10^{-5}
	12	-1.3×10^{-6}	-1.9×10^{-6}	-1.6×10^{-7}	-4.1×10^{-7}
	16	-2.8×10^{-9}	-2.8×10^{-8}	-1.7×10^{-9}	-4.1×10^{-9}
20.	4	-5.1×10^{-4}	-3.5×10^{-4}	-1.3×10^{-4}	-3.9×10^{-4}
	8	7.9×10^{-5}	5.5×10^{-5}	1.1×10^{-5}	2.9×10^{-5}
	12	7.5×10^{-7}	5.4×10^{-7}	6.5×10^{-8}	1.8×10^{-7}
	16	-1.9×10^{-8}	-1.6×10^{-8}	-9.6×10^{-10}	-2.6×10^{-9}
40.	4	2.4×10^{-3}	8.0×10^{-4}	5.0×10^{-4}	1.8×10^{-3}
	8	-5.8×10^{-5}	-1.9×10^{-5}	-6.2×10^{-6}	-2.1×10^{-5}
	12	6.9×10^{-7}	2.4×10^{-7}	4.6×10^{-8}	1.5×10^{-7}
	16	-5.3×10^{-9}	7.6×10^{-10}	-1.5×10^{-10}	-5.5×10^{-10}
80.	4	-1.4×10^{-3}	-3.4×10^{-5}	-7.9×10^{-5}	-1.3×10^{-3}
	8	-9.6×10^{-6}	-2.6×10^{-7}	-2.8×10^{-7}	-4.1×10^{-6}
	12	5.2×10^{-7}	1.9×10^{-8}	9.0×10^{-9}	1.3×10^{-7}
	16	1.5×10^{-8}	2.1×10^{-9}	2.9×10^{-11}	3.5×10^{-9}
90.	4	-1.8×10^{-3}	0.000	-5.1×10^{-6}	-1.7×10^{-3}
	8	-5.4×10^{-5}	0.000	-6.5×10^{-8}	-2.5×10^{-5}
	12	2.7×10^{-6}	0.000	2.3×10^{-8}	-3.6×10^{-5}
	16	1.6×10^{-6}	0.000	1.1×10^{-8}	-1.6×10^{-5}

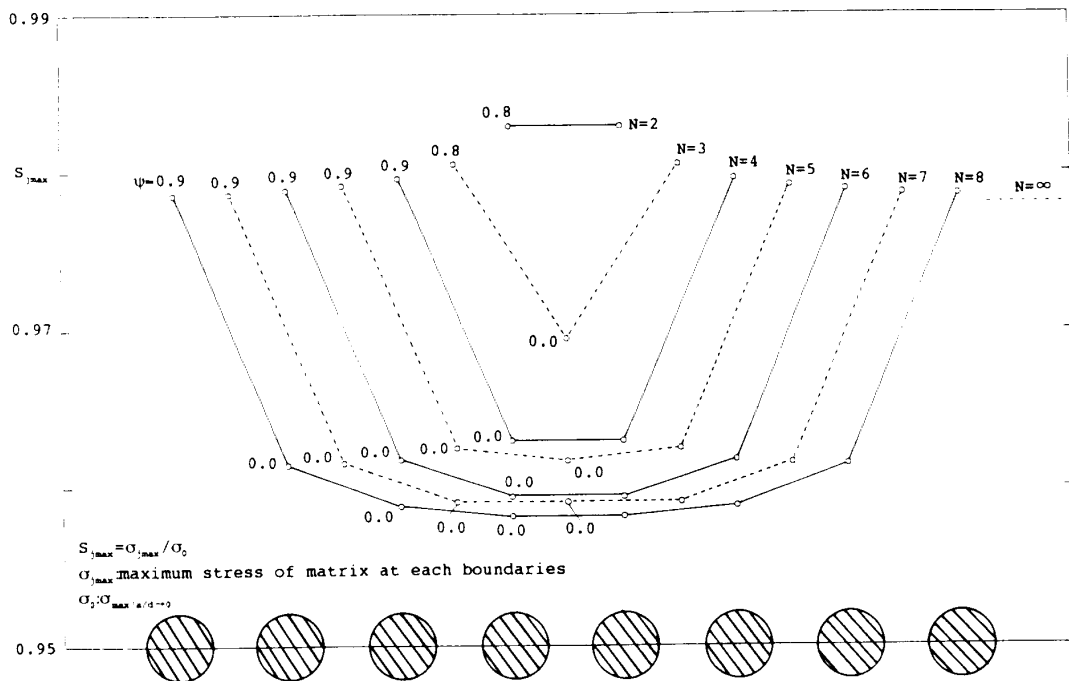


Fig. 2 Variation of S_{jmax} of infinite body containing a row of ellipsoidal inclusions ($a/b=1, b/d=0.6, E_I/E_M=0.5$)

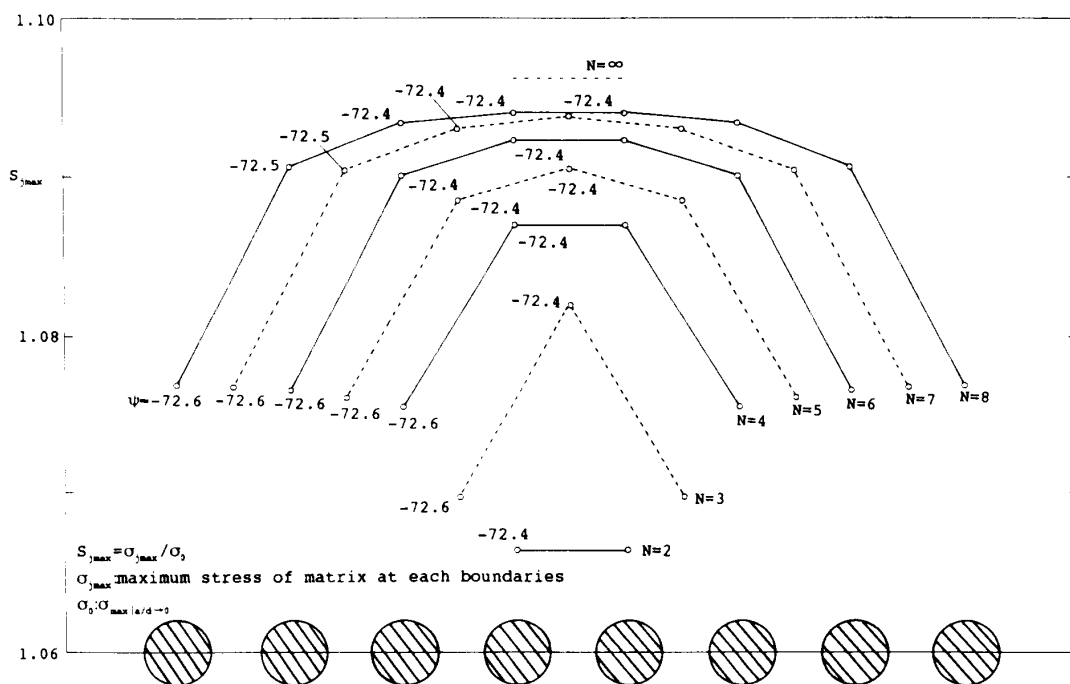


Fig. 3 Variation of S_{jmax} of infinite body containing a row of ellipsoidal inclusions ($a/b=1, b/d=0.6, E_I/E_M=2.0$)

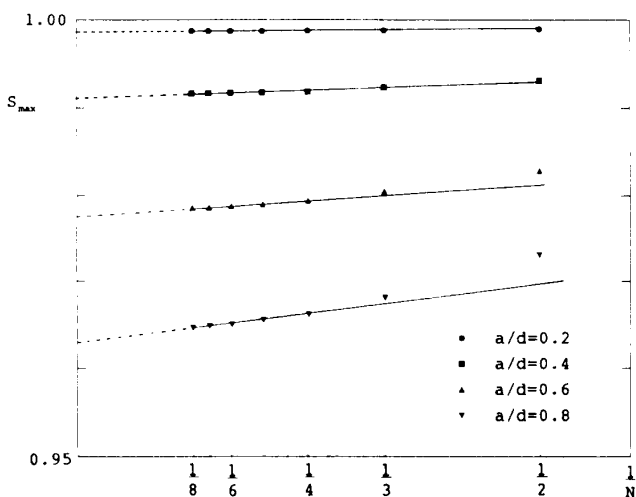


Fig. 4 Relationship between S_{max} and $1/N$ ($a/b=1, E_I/E_M=0.5$)

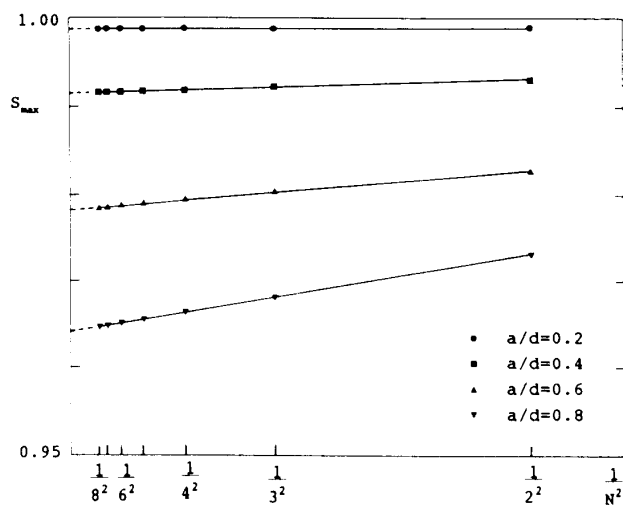


Fig. 5 Relationship between S_{max} and $1/N^2$ ($a/b=1, E_I/E_M=0.5$)

$E_I/E_M > 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に最大応力が生じる。

石田らはだ円孔列を有する板の引張りにおいて、最大応力 (S_{jmax} の最大値 S_{max}) とだ円孔の個数 $1/N$ の間に直線関係が成り立つことを自平衡物体力の拡散特性から説明している⁽¹²⁾。また、前報で著者らは、だ円形介在物列 (二次元) の干渉問題においても、 S_{max} と $1/N$ の間に直線関係が成り立つことを示した⁽⁸⁾。図4は $a/b=1, \sigma_0^\infty=1, E_I/E_M=0.5, a/d=0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ のとき、母材の S_{max} と $1/N$ の関係を示したものである。図4より回転だ円体状介在物列の場合には、 S_{max} と

$1/N$ の間に二次元問題で成立したような直線関係がよく成り立たないことがわかる。一方、図5と図6は S_{max} と $1/N^2$ の関係を示した図であるが、これらの図より、回転だ円体状介在物列の場合には、 S_{max} と $1/N^2$ の間に直線関係がほぼ成り立つことがわかる。また、この漸近特性は介在物の最大応力についても成り立つ。このような性質は三次元問題では自平衡物体力の拡散特性が $1/r^3$ で現れる (二次元問題では $1/r^2$) ことと関係している⁽¹²⁾。

表3は上述の直線関係を利用して、介在物の個数 $N=6, 7, 8$ の解析結果より、外挿によって個数が無限大

Table 3 Extrapolation of the maximum stress at the outermost ($E_i/E_M < 1$) or central ($E_i/E_M > 1$) inclusion when $N \rightarrow \infty$ ($a/b=1$, Matrix)

E_i/E_M	b/d	0.0		0.0		0.2		0.4		0.6		0.8		
		N	ψ (deg.)	σ_0	ψ (deg.)	S_{max}	ψ (deg.)	S_{max}	ψ (deg.)	S_{max}	ψ (deg.)	S_{max}	ψ (deg.)	S_{max}
0.0	6		0.0	2.046	0.0	1.000	0.0	0.9963	0.7	0.9765	2.1	0.9465	3.5	0.9223
	7		0.0	2.046	0.0	1.000	0.0	0.9963	0.7	0.9764	2.1	0.9452	3.5	0.9214
	8		0.0	2.046	0.0	1.000	0.0	0.9963	0.7	0.9764	2.1	0.9460	3.5	0.9211
	$\infty(6-7)$			2.046		1.000		0.9963		0.9762		0.9454		0.9189
	$\infty(7-8)$			2.046		1.000		0.9963		0.9761		0.9453		0.9190
0.5	6		0.0	1.348	0.0	1.000	0.0	0.9985	0.2	0.9917	0.9	0.9789	1.6	0.9651
	7		0.0	1.348	0.0	1.000	0.0	0.9985	0.2	0.9916	0.9	0.9786	1.6	0.9648
	8		0.0	1.348	0.0	1.000	0.0	0.9985	0.2	0.9916	0.9	0.9786	1.6	0.9646
	$\infty(6-7)$			1.348		1.000		0.9984		0.9916		0.9780		0.9640
	$\infty(7-8)$			1.348		1.000		0.9984		0.9915		0.9783		0.9641
2.0	6		± 67.5	1.341	± 67.5	1.000	-67.6	1.0025	-68.1	1.0231	-72.4	1.0923	-90.0	1.3020
	7		± 67.5	1.341	± 67.5	1.000	-67.6	1.0026	-68.1	1.0235	-72.4	1.0938	-90.0	1.3056
	8		± 67.5	1.341	± 67.5	1.000	-67.6	1.0027	-68.1	1.0236	-72.4	1.0940	-90.0	1.3065
	$\infty(6-7)$			1.341		1.000		1.0029		1.0246		1.0979		1.3161
	$\infty(7-8)$			1.341		1.000		1.0030		1.0239		1.0947		1.3094
∞	6		± 68.0	2.042	± 68.0	1.000	-68.0	1.0081	-68.8	1.0743	-74.5	1.3317	-90.0	2.5038
	7		± 68.0	2.042	± 68.0	1.000	-68.0	1.0083	-68.8	1.0756	-74.5	1.3378	-90.0	2.5451
	8		± 68.0	2.042	± 68.0	1.000	-68.0	1.0084	-68.8	1.0760	-74.5	1.3407	-90.0	2.5655
	$\infty(6-7)$			2.042		1.000		1.0089		1.0792		1.3547		2.6595
	$\infty(7-8)$			2.042		1.000		1.0087		1.0773		1.3501		2.6321

Table 4 Maximum stress at the outermost ($E_i/E_M < 1$) or central ($E_i/E_M > 1$) spherical inclusion ($a=b$) when $N \rightarrow \infty$ in Fig. 1 in comparison with a row of circular inclusions⁽⁸⁾
 [$S_{max} = \max(S_j)_{max}$, $S_j)_{max} = \sigma_j)_{max}/\sigma_0$, σ_0 : σ_{max} of single inclusion]

	b/d	Matrix						Inclusion						
		0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	
		E_i/E_M	σ_0	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}	σ_0	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}
3D	0.0	2.046	1.000	0.996	0.976	0.945	0.919							
	0.5	1.348	1.000	0.999	0.992	0.978	0.964	0.679	1.000	0.999	0.994	0.984	0.972	
	2.0	1.341	1.000	1.003	1.024	1.10	1.31	1.315	1.000	1.003	1.025	1.11	1.34	
	∞	2.042	1.000	1.009	1.078	1.35	2.64	1.938	1.000	1.009	1.082	1.39	2.79	
2D [8]	0.0	3.000	1.000	0.961	0.885	0.831	0.806							
	0.5	1.506	1.000	0.990	0.966	0.940	0.921	0.757	1.000	0.991	0.970	0.944	0.920	
	2.0	1.215	1.000	1.018	1.076	1.19	1.41	1.192	1.000	1.018	1.078	1.20	1.44	
	∞	1.549	1.000	1.047	1.221	1.70	3.25	1.475	1.000	1.046	1.228	1.82	3.42	

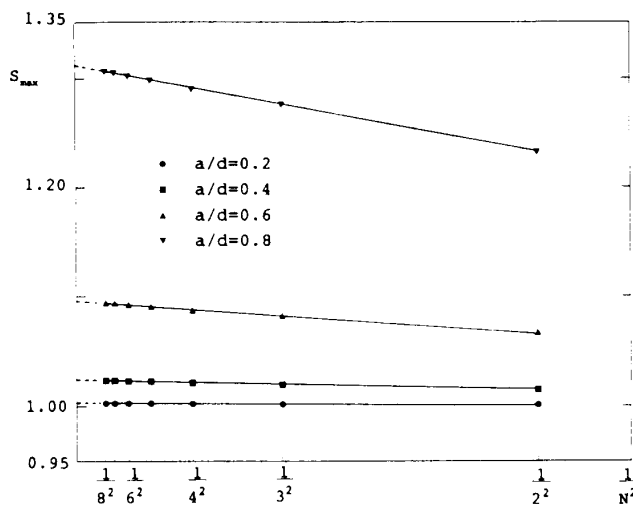


Fig. 6 Relationship between S_{max} and $1/N^2$ ($a/b=1$, $E_i/E_M=2.0$)

のときの最大応力を求めたものである。表3で $\infty(6-7)$ などは個数 $N=6, 7$ からの外挿を意味する。2種類の
 外挿値が有効数字4けた程度一致していることから、個数無限大の結果が正確に求められているものと
 推察される。

表4は $a/b=1$, $\sigma_0=1$ の場合、外挿によって求めた
 個数が無限大のときの S_{max} の数値をまとめたものである(3D)。また、干渉効果を比較するために、円形
 介在物列を有する無限板の引張り問題の解析結果⁽⁸⁾(2D)も示した。表4より干渉効果は常に二次元の場合に
 大きく現れていることがわかる。また多くの場合で5~10%程度二次元の干渉効果が三次元の場合より大
 きくなっている。

無限体中の任意個の回転だ円体状介在物の干渉問題

Table 5 Maximum stress at the outermost ($E_I/E_M < 1$) or central ($E_I/E_M > 1$) ellipsoidal inclusion when $N \rightarrow \infty$

a/b	b/d	Matrix						Inclusion					
		0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	E_I/E_M	σ_0	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}	σ_0	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}
1/2	0.0	1.440	1.000	0.999	0.995	0.984	0.970	0.591	1.000	0.999	0.998	0.983	0.906
	0.5	1.181	1.000	0.999	0.998	0.993	0.985	1.000	1.000	1.002	1.018	1.06	1.19
	2.0	1.559	1.000	1.002	1.014	1.05	1.18	1.531	1.000	1.002	1.018	1.06	1.19
	∞	3.416	1.000	1.006	1.041	1.16	1.71	3.280	1.000	1.006	1.039	1.16	1.74
1	0.0	2.046	1.000	0.996	0.976	0.945	0.919	0.679	1.000	0.999	0.994	0.984	0.972
	0.5	1.348	1.000	0.999	0.992	0.978	0.964	0.679	1.000	0.999	0.994	0.984	0.972
	2.0	1.341	1.000	1.003	1.024	1.10	1.31	1.315	1.000	1.003	1.025	1.11	1.34
	∞	2.042	1.000	1.009	1.078	1.35	2.64	1.938	1.000	1.009	1.082	1.39	2.79
2	0.0	3.313	1.000	0.980	0.920	0.874	0.845	0.785	1.000	0.996	0.978	0.951	0.924
	0.5	1.544	1.000	0.995	0.979	0.962	0.949	0.785	1.000	0.996	0.978	0.951	0.924
	2.0	1.186	1.000	1.015	1.063	1.22	1.42	1.159	1.000	1.033	1.107	1.24	1.46
	∞	1.504	1.000	1.030	1.181	1.82	4.12	1.378	1.000	1.032	1.244	1.98	4.49

Table 6 Maximum stress at the central ellipsoidal inclusion when $N \rightarrow \infty$ [(): Nisitani⁽³⁾]

a/b	b/d	0.0	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8
	E_I/E_M	σ_0	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}	S_{max}
1/2	0.0	1.440	1.000	0.998	0.989	0.968	0.937
	0.5	1.181	1.000	0.999	0.996	0.986	0.970
1	0.0	2.046	1.000	0.993	0.952	0.889	0.833
	0.5	1.348	(1.000)	(0.993)	(0.952)	0.957	0.927
2	0.0	3.313	1.000	0.962	0.839	0.741	0.677
	0.5	1.544	1.000	0.991	0.956	0.920	0.892

において、形状比 $a/b=1/2, 1, 2$ のとき、介在物間の距離 b/d と弾性比 E_I/E_M を系統的に変化させたときの最大応力 S_{max} の値を表5に示す。

これまでの結果(表3~5)では、 $E_I/E_M < 1$ で最も外側の介在物に生じる最大応力を示した、また、 $E_I/E_M > 1$ では最も内側の介在物に生じる最大応力を示した。介在物の無限周期配列の結果も重要であるので、最後に、 $E_I/E_M < 1$ の場合の最も内側における介在物の母材境界に生じる最大応力 S_{max} を表6に示す。表中の()の値は西谷による回転だ円体空か列の干渉効果の物理的意味に基づく近似計算による結果⁽³⁾である。表に示した範囲で西谷の計算結果は本解析結果と完全に一致している。

4. 結 言

本研究では体積力法の特異積分方程式を利用して無限体中の任意個の1列回転だ円体状介在物の干渉効果を厳密に解析した。得られた結果を表4~6にまとめたほか以下のような結論が得られた。

(1) 特異積分方程式の数値解析には未知関数である体積力密度を8種類の基本密度関数と多項式の積で

近似する方法により、母材と介在物の境界上の応力と変位に関する高い境界条件の満足度が少ない計算時間で得られた。

(2) 回転だ円体状介在物列の最大応力は、母材と介在物の弾性比が $E_I/E_M < 1$ ならば最も外側の介在物との境界上に、 $E_I/E_M > 1$ ならば最も中央寄りの介在物との境界上に生じる。

(3) 最大応力と回転だ円体状介在物の個数の逆数の二乗はほぼ直線関係にあることが認められ、これらの性質によって個数が無限大における最大応力の極限値を推定して示した。また、だ円形介在物(二次元)の干渉効果は常に、だ円体状介在物(三次元)よりも大きく現れており多くの場合で5~10%大となっている(表4)。

文 献

- (1) 宮本博, 二つ以上の球かを有する弾性体に関する弾性問題(第1報, 理論計算), 機論, 23 131(1957), 431-436.
- (2) 宮本博, 二つ以上の球かを有する弾性体に関する弾性問題(第2報, 光弾性実験), 機論, 23 131(1957), 437-443.
- (3) 西谷弘信, 切欠き干渉効果の近似計算法とその応用, 機誌, 71 589(1968), 209-221.

- (4) 野田尚昭・松尾忠利, 応力集中問題における体積法の特異積分方程式の数値解析法(第3報, 三次元問題への応用), 機論, **59** 564, A(1993), 1964-1970.
- (5) 土田栄一郎・ほか2名, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第1報, 2球かを有する弾性体), 機論, **42** 353 (1976), 46-54.
- (6) 土田栄一郎・ほか3名, 数個の球かを有する弾性体の非軸対称問題(第2報, 3球かを有する弾性体), 機論, **44** 382 (1978), 1876-1883.
- (7) 野田尚昭・ほか3名, 特異積分方程式による回転だ円体状介在物の干渉効果の解析, 機論, **61** 585, A(1995), 965-973.
- (8) 野田尚昭・ほか2名, 任意個の1列だ円形介在物をもつ板の引張り, 機論, **61** 581, A(1995), 106-113.
- (9) 西谷弘信, 電子計算機による二次元応力問題の解法, 機誌, **70**-580(1967), 627-632.
- (10) 野田尚昭, 円周切欠きを有する丸棒のねじり, 引張り, 曲げにおける応力集中問題の解析, 九州大学学位論文, (1984), 15.
- (11) 西谷弘信・陳玳珩, 体積法, (1987), 89, 培風館.
- (12) 石田誠・井川秀信, 任意個の1列だ円孔群, き裂群をもつ板の引張り(ある漸近特性と応力の計算式), 機論, **58** 553, A(1992), 1642-1649.
-