

特異積分方程式法による混合モード負荷を受ける半だ円表面き裂の 応力拡大係数の分布の解析*

野田尚昭*¹, 木原利彰*², 別府大輔*³

Analysis of Variations of Stress Intensity Factors of a Semi-Elliptical Surface Crack Subjected to Mixed Mode Loading

Nao-aki NODA*¹, Toshiaki KIHARA and Daisuke BEPPU

*¹ Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

It is known that the stress singularity at a corner point where the front of 3D cracks intersect free surface is depend on Poisson's ratio and different from the one of ordinary crack. In this paper, a singular integral equation method is applied to calculate the stress intensity factor along crack front of a 3-D semi-elliptical surface crack in a semi-infinite body under mixed mode loading. The body force method is used to formulate the problem as a system of singular integral equations with singularities of the form r^{-3} using the stress field induced by a force doublet in a semi-infinite body as fundamental solution. In the numerical calculation, unknown body force densities are approximated by using fundamental density functions and polynomials. The results show that the present method yields smooth variations of mixed modes stress intensity factors along the crack front accurately. Distributions of stress intensity factors are indicated in tables and figures with varying the elliptical shape and Poisson's ratio.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Semi-Elliptical Surface Crack, Singular Integral Equation, Numerical Analysis, Fundamental Density

1. 緒言

実際の機械構造物では表面の欠陥や疲労によって生じたき裂が破壊の起点となる事が多いため、それらの正確な応力拡大係数を知ることは安全性、信頼性の確保のためにも重要である。中でも、表面に垂直な半だ円表面き裂のモデル(図1)は、実用上の多くの三次元表面き裂を近似する事ができるため、多くの研究がなされてきた^{(1)~(6)}。通常のき裂先端で生じる $r^{-0.5}$ の特異性は、3次元き裂前縁と自由表面の交差点であるCorner Point近傍で保たれないことが知られており $r^{-\lambda_s}$ ($\lambda_s \neq 0.5$), $r^{-\lambda_a}$ ($\lambda_a \neq 0.5$)と表わされ、そのことが表面き裂の正確な解析を困難にしている。その特異性指数はポアソン比が $0 \leq \nu \leq 0.5$ で変化するとき対称変形に対して $0.5 \geq \lambda_s \geq 0.332$ 逆対称変形に対して $0.5 \leq \lambda_a \leq 0.646$ で変化することがBenhem⁽⁷⁾, Bazant-Estencsoro⁽⁸⁾によって指摘されているほか多くの研究^{(9)~(21)}がなされている。また、村上らは、有限要素解析によってCorner Point近傍において $r^{-0.5}$ の特異性が生じる領域が無限小になることを指摘している⁽³⁾。最近、混合モード荷重下での疲労き裂進展の下限界を求める研究が行われ、その値がモー

ドI荷重下の下限界値とは異なることが議論されており^{(22)~(24)}、混合モード負荷における表面き裂の正確な応力拡大係数を求めることが要求されている。

著者らは、先に、体積法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式で近似する方法^{(1)~(6)}によって、その正確な半だ円表面き裂のモードI荷重における分布を求めた(図2)。そこで本研究では、図1の問題を体積法の特異積分方程式で表現し、未知関数を基本密度関数と多項式で近似する方法を応用し、図1のように、混合モード負荷を受ける半無限体の自由表面に直角に生じたき裂の解析を行う。そして、Corner Point近傍のK値を正確に求めるとともに、ポアソン比やき裂の形状比のおよぼす影響について検討する。この種の問題の解析結果は村上ら⁽³⁾、東郷・大塚ら⁽⁴⁾、He-Hutchinson⁽⁵⁾によっても有限要素法を用いて行われている。しかし本研究の解析方法によれば、未知関数が連続関数として近似されるので、良好な解の収束性と境界条件の満足度が得られるほか、き裂先端のなめらかな応力拡大係数の分布を得ることが可能である。

2. 体積法の特異積分方程式の数値解析

本論文では、 zx 平面($y=0$)を自由表面とする半無限体がモードIIIのせん断力を受ける場合を考える(図1で $\sigma_z^0 = 0$, $\tau_{zx}^0 = 1$)。このとき体積法の考え方によ

* 原稿受付 2000年12月27日。

*¹ 正員,九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

*² 学生員,九州工業大学大学院。

*³ 九州工業大学工学部。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

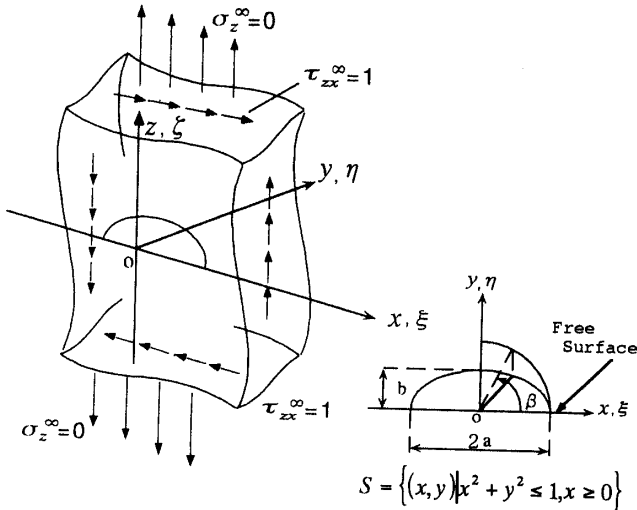


Fig. 1 Problem of analysis (a, b =radius of semi-elliptical crack, β =parametric angle from free surface, ν =Poisson's ratio).

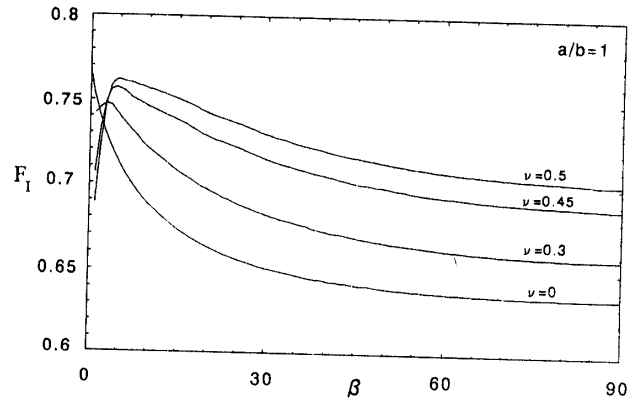


Fig. 2 Variation of F_I along crack front when $\sigma_z^\infty = 1, \tau_{zx}^\infty = 0, a/b = 1$ in Fig. 1.

れば、問題はき裂の存在しない半無限体中においてき裂となるべき仮想境界上に分布された yz 方向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$, xz 向のせん断の標準型体積力対の密度 $f_{zx}(\xi, \eta)$ を未知関数とする以下の特異積分方程式で表現される。ここで (ξ, η, ζ) は着力点の (x, y, z) 座標である。また ν はポアソン比であり、 \iint_S は発散積分の有限部分を表わす。左辺の $K_{xz}^{I*}(\xi, \eta, x, y)$ 等は自由表面の境界条件を満足させる関数である。その具体的表現等は、紙面の都合により省略する。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_{xz}^{I*}(\xi, \eta, x, y) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_{yz}^{I*}(\xi, \eta, x, y) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[\iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(x-\xi)^2}{r_1^5} \right\} f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_{xz}^{I*}(\xi, \eta, x, y) f_{yz}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \iint_S K_{yz}^{I*}(\xi, \eta, x, y) f_{zx}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right] = -1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

$$\left. \begin{aligned} & r_1 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \\ & S = \left\{ (\xi, \eta) \mid \left(\frac{\xi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{b} \right)^2 \leq 1, \eta \geq 0 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot c)$$

前報⁽¹⁾⁽⁶⁾と同様に本論文では体積力対密度 $f_{yz}(\xi, \eta)$, $f_{zx}(\xi, \eta)$ を以下の様に近似する。

$$\left. \begin{aligned} f_{yz}(\xi, \eta) &= F_{yz}(\xi_a, \eta_b) w_{yz}(\xi_a, \eta_b) \\ f_{zx}(\xi, \eta) &= F_{zx}(\xi_a, \eta_b) w_{zx}(\xi_a, \eta_b) \\ w_{yz}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{x0}^\infty}{C(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2}, \tau_{x0}^\infty = 1 \\ w_{zx}(\xi_a, \eta_b) &= \frac{2b(1-\nu)k^2 \tau_{z0}^\infty}{B(k)} \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2}, \tau_{z0}^\infty = 1 \\ B(k) &= (k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k) \\ C(k) &= (k^2 + \nu k'^2)E(k) - \nu k'^2 K(k) \\ k' &= b/a \leq 1, k = \sqrt{1-(b/a)^2}, \xi_a = \xi/a, \eta_b = \eta/b \\ K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda}}, E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \lambda} d\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

例えば式(1·a)は基本密度にかける重み関数 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ を未知関数とする式(3)で表現される。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{b}{4\pi} \left[\frac{k^2}{C(k)} \iint_S \left\{ \frac{2(1-2\nu)}{r_1^3} + \frac{6\nu(y-\eta)^2}{r_1^5} \right\} F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{B(k)} \iint_S \frac{6\nu(x-\xi)(y-\eta)}{r_1^5} F_{zx}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{C(k)} \iint_S K_{xz}^{I*}(\xi, \eta, x, y) F_{yz}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right. \\ & \left. + \frac{k^2}{B(k)} \iint_S K_{yz}^{I*}(\xi, \eta, x, y) F_{zx}(\xi_a, \eta_b) \sqrt{1-\xi_a^2-\eta_b^2} d\xi d\eta \right] = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ここで問題のy軸に関する逆対称性を考慮して F_y , F_x を次式のように近似する.

$$\begin{aligned}
 F_y(\xi_a, \eta_b) &= \beta_0 \xi_a + \beta_1 \xi_a \eta_b + \dots + \beta_{n-1} \xi_a \eta_b^{n-1} + \beta_n \xi_a \eta_b^n \\
 &+ \beta_{n+1} \xi_a^{2 \times 1+1} + \beta_{n+2} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b + \dots + \beta_{2n} \xi_a^{2 \times 1+1} \eta_b^{n-1} \\
 &\vdots \\
 &+ \beta_{i-2} \xi_a^{2 \times (n-1)+1} + \beta_{i-1} \xi_a^{2 \times (n-1)+1} \eta_b \\
 &+ \beta_i \xi_a^{2 \times n+1} \\
 &= \sum_{i=0}^n \beta_i G_i(\xi_a, \eta_b) \\
 F_x(\xi_a, \eta_b) &= \gamma_0 + \gamma_1 \eta_b + \dots + \gamma_{n-1} \eta_b^{n-1} + \gamma_n \eta_b^n \\
 &+ \gamma_{n+1} \xi_a^{2 \times 1} + \gamma_{n+2} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b + \dots + \gamma_{2n} \xi_a^{2 \times 1} \eta_b^{n-1} \\
 &\vdots \\
 &+ \gamma_{i-2} \xi_a^{2 \times (n-1)} + \gamma_{i-1} \xi_a^{2 \times (n-1)} \eta_b \\
 &+ \gamma_i \xi_a^{2 \times n} \\
 &= \sum_{i=0}^n \gamma_i Q_i(\xi_a, \eta_b) \quad l = \sum_{k=0}^n (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\
 G_0(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a, G_1(\xi_a, \eta_b) = \xi_a \eta_b, \dots \\
 \dots, G_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1+1}, \dots, G_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2 \times n+1} \\
 Q_0(\xi_a, \eta_b) &= 1, Q_1(\xi_a, \eta_b) = \eta_b, \dots \\
 \dots, Q_{n+1}(\xi_a, \eta_b) &= \xi_a^{2 \times 1}, \dots, Q_l(\xi_a, \eta_b) = \xi_a^{2 \times n} \\
 &\dots \dots \dots (4)
 \end{aligned}$$

結局問題は、式(3)、式(4)より重み関数 $F_{yz}(\xi_a, \eta_b)$, $F_{zx}(\xi_a, \eta_b)$ の $\beta_0 \sim \beta_l, \gamma_0 \sim \gamma_l$ の $2 \cdot (l+1)$ 個の係数を未知数とする連立一次方程式を解くことに帰する. 実際の数値計算では $x \geq 0, y \geq 0$ で $(x/a)^2 + (y/b)^2 < 1$ の範囲で、 x, y 方向に等間隔で引いた 50×50 のメッシュの交点上で境界条件を考慮し、残留する応力が最小となるように最小二乗法によって、これらの未知係数を決定する⁽¹⁾.

3. 数値計算結果と検討

2節までの理論に基づいて、計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ n , 形状比 $a/b=1.0, 1.5, 2.0$ ポアソン比 $\nu=0, 0.3, 0.5$ と変化させて計算した.

式(3), (4)から得られる連立方程式中の数値積分には、二重指数関数型積分公式のサブルーチンを用いて計算した. また結果として得られた応力拡大係数 K_{II}, K_{III} をまとめるのに以下の無次元化値 F_{II}, F_{III} を用いた. また比較のため、式(5.b)で表わされるだ円形き裂が遠方で $\tau_z = 1$ を受ける場合の結果 F_{II}, F_{III} ⁽²⁵⁾も一部の図表で示した.

$$\begin{aligned}
 F_{II}(\beta) &= \frac{K_{II}(\beta)}{\tau_z \sqrt{\pi b}} = \left(F_x \frac{k' \cos \beta}{B(k)} + F_y \frac{\sin \beta}{C(k)} \right) \frac{k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{3/4}} \\
 F_{III}(\beta) &= \frac{K_{III}(\beta)}{\tau_z \sqrt{\pi b}} = \left(-F_x \frac{\sin \beta}{B(k)} + F_y \frac{k' \cos \beta}{C(k)} \right) \frac{(1 - \nu)k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{3/4}} \\
 &\dots \dots \dots (5.a) \\
 F_{II}(\beta) &= \left(\frac{k' \cos \beta}{B(k)} \right) \frac{k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{3/4}} \\
 &\dots \dots \dots (5.b) \\
 F_{III}(\beta) &= \left(\frac{\sin \beta}{B(k)} \right) \frac{(1 - \nu)k^2}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{3/4}}
 \end{aligned}$$

図1の問題で、これまで解析の見当たらないポアソン比 $\nu=0.5$ について、式(4)の多項式の次数 n を変化させたときの収束性の例を表1に示す. 表1では有効数字4けた程度収束している. また、境界条件の満足度を図3に示す. 図3で境界条件 $\tau_x = \tau_z = 0$ は、 $n=20$ で 2×10^{-4} 以下で満足される. 表2, 3はき裂の形状比とポアソン比を変化させた場合の結果をだ円形き裂の結果と比較して示す. 図4, 5にポアソン比 $\nu=0, 0.3$ の場合に、き裂前縁に沿った F_{II}, F_{III} の分布をHe-Hutchinson⁽⁵⁾の結果とを比較して示す. 本解析結果にHe-Hutchinsonの結果は β が小さいときを除いて大体よく一致している. ポアソン比 $\nu=0.3$ の場合に、き裂の形状比を変化させた結果をだ円形き裂と比較して図6に示す. また形状比 $a/b=1$ で、き裂のポアソン比を変化させた値を同様に図7に示す. ポアソン比 ν が大きくなるにつれて、特に K_{III} がCorner Pointの特異性の影響を受けるため、だ円と半だ円の結果の違いは大きくなる. すなわち K_{III} は $\nu=0$ の場合を除いてCor-

Table.1 Convergence of dimensionless stress intensity factor $F_{II}(\beta), F_{III}(\beta)$ when $a/b=1.0, \nu=0.5$ in Fig.1.

	β (deg)		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25
	n														
F_{II}	17	0.82908	0.78004	0.76479	0.76304	0.76396	0.76304	0.75949	0.75424	0.74861	0.74360	0.72937	0.71054	0.68923	
	18	0.83087	0.78181	0.76790	0.76687	0.76745	0.76550	0.76079	0.75470	0.74872	0.74378	0.72965	0.70992	0.68915	
	19	0.83246	0.78532	0.77369	0.77357	0.77359	0.77021	0.76391	0.75654	0.74978	0.74449	0.72946	0.70972	0.68915	
	20	0.83279	0.78589	0.77484	0.77454	0.77369	0.76926	0.76222	0.75458	0.74826	0.74359	0.72957	0.71089	0.69028	
F_{III}	17	0.48543	0.39476	0.34524	0.32111	0.31066	0.30610	0.30303	0.29955	0.29536	0.29098	0.28326	0.28982	0.30072	
	18	0.47437	0.38785	0.34184	0.32025	0.31126	0.30723	0.30406	0.30017	0.29559	0.29099	0.28397	0.28956	0.30108	
	19	0.47410	0.38388	0.33724	0.31643	0.30861	0.30562	0.30317	0.29976	0.29548	0.29111	0.28426	0.28974	0.30179	
	20	0.47484	0.38412	0.33779	0.31753	0.31009	0.30712	0.30437	0.30047	0.29569	0.29096	0.28453	0.28944	0.30087	
	β (deg)		30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
	n														
F_{II}	17	0.66114	0.62816	0.58951	0.54592	0.49804	0.44558	0.38901	0.32925	0.26702	0.20212	0.13589	0.06785	0.00000	
	18	0.66095	0.62827	0.58938	0.54617	0.49770	0.44550	0.38914	0.32926	0.26693	0.20209	0.13593	0.06774	0.00000	
	19	0.66092	0.62827	0.58936	0.54632	0.49783	0.44551	0.38924	0.32953	0.26679	0.20222	0.13573	0.06808	0.00000	
	20	0.66099	0.62830	0.58939	0.54638	0.49772	0.44556	0.38910	0.32945	0.26679	0.20230	0.13567	0.06826	0.00000	
F_{III}	17	0.31806	0.33562	0.35456	0.37304	0.39136	0.40798	0.42319	0.43664	0.44773	0.45697	0.46332	0.46688	0.46811	
	18	0.31812	0.33567	0.35449	0.37291	0.39097	0.40759	0.42325	0.43650	0.44780	0.45686	0.46314	0.46633	0.46866	
	19	0.31809	0.33580	0.35439	0.37331	0.39112	0.40761	0.42320	0.43644	0.44775	0.45672	0.46283	0.46495	0.46487	
	20	0.31786	0.33584	0.35440	0.37348	0.39111	0.40769	0.42314	0.43656	0.44769	0.45676	0.46298	0.46551	0.46615	

ner Point 近傍で複雑な挙動を示し、滑らかに $K_{III} \rightarrow 0 (\beta \rightarrow 0)$ とはならない。しかし、村上ら⁽³⁾も指摘するように自由表面の $\beta=0$ で最終的には $K_{III}=0$ となると考えられる。なお、本研究で求めているものは通

常の応力拡大係数 ($r^{-0.5}$ に対する係数) の分布であり、コーナーポイントに生じる $r^{-\lambda_1}$ の係数に対する一般的な応力拡大係数は求めている。 λ_1 の数値に関しても過去の研究結果にやや違いがある^{(8),(13)} ので今後の研

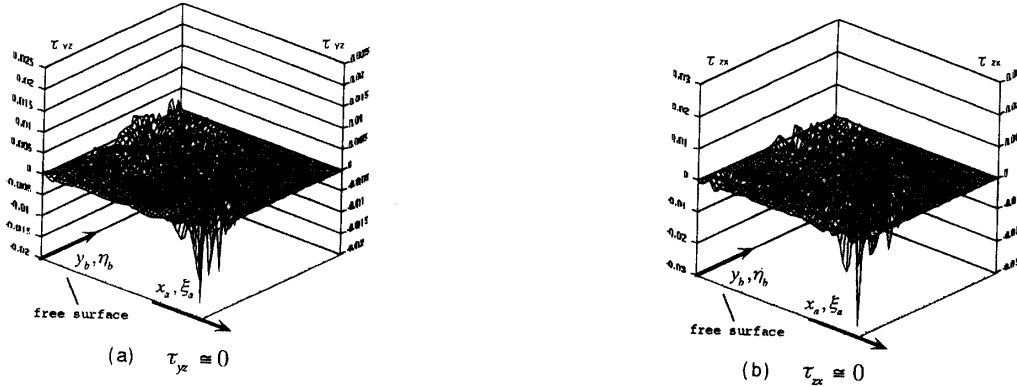


Fig.3 Compliance of boundary condition $\tau_{xz}=0, \tau_{yz}=0$ when $a/b=1.0, n=20, \nu=0.5$ in Fig.1.

Table.2 Dimensionless stress intensity factor $F_{II}(\beta), F_{III}(\beta)$ when $\nu=0.3$ in Fig.1. [():Elliptical Crack.]

	β (deg)	a/b															
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25		
F_{II}	1.00	∞ (0.749)	0.765 (0.749)	0.744 (0.749)	0.733 (0.748)	0.726 (0.747)	0.720 (0.745)	0.715 (0.742)	0.709 (0.743)	0.704 (0.742)	0.700 (0.740)	0.696 (0.738)	0.6814 (0.7234)	0.6635 (0.7038)	0.6411 (0.6788)		
	1.50	∞ (0.767)	0.779 (0.766)	0.740 (0.766)	0.723 (0.765)	0.716 (0.763)	0.714 (0.762)	0.711 (0.760)	0.704 (0.757)	0.703 (0.755)	0.697 (0.751)	0.691 (0.748)	0.6648 (0.7257)	0.6342 (0.6961)	0.6000 (0.6606)		
	2.00	∞ (0.750)	0.779 (0.750)	0.732 (0.749)	0.707 (0.748)	0.696 (0.746)	0.689 (0.743)	0.685 (0.740)	0.679 (0.737)	0.673 (0.733)	0.666 (0.728)	0.659 (0.723)	0.6217 (0.6924)	0.5817 (0.6541)	0.5397 (0.6109)		
F_{III}	1.00	0.000 (0.000)	0.284 (0.009)	0.238 (0.018)	0.216 (0.027)	0.208 (0.037)	0.206 (0.046)	0.206 (0.055)	0.206 (0.064)	0.206 (0.073)	0.207 (0.082)	0.208 (0.091)	0.202 (0.105)	0.209 (0.119)	0.2804 (0.1793)		
	1.50	0.000 (0.000)	0.307 (0.014)	0.257 (0.028)	0.232 (0.042)	0.223 (0.056)	0.229 (0.070)	0.235 (0.084)	0.242 (0.098)	0.248 (0.111)	0.254 (0.125)	0.261 (0.138)	0.254 (0.152)	0.2381 (0.166)	0.2825 (0.2216)		
	2.00	0.000 (0.000)	0.311 (0.018)	0.267 (0.037)	0.242 (0.055)	0.233 (0.073)	0.234 (0.091)	0.241 (0.109)	0.251 (0.127)	0.262 (0.144)	0.273 (0.162)	0.284 (0.179)	0.284 (0.193)	0.2660 (0.2042)	0.2397 (0.1793)		
F_{II}	β (deg)	a/b	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90		
			1.00	0.6139 (0.6486)	0.5819 (0.6135)	0.5453 (0.5737)	0.5042 (0.5296)	0.4591 (0.4814)	0.4103 (0.4296)	0.3580 (0.3745)	0.3029 (0.3165)	0.2453 (0.2562)	0.1858 (0.1938)	0.1247 (0.1301)	0.0626 (0.0653)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
			1.50	0.5620 (0.6202)	0.5211 (0.5761)	0.4779 (0.5291)	0.4333 (0.4801)	0.3871 (0.4294)	0.3400 (0.3776)	0.2925 (0.3249)	0.2443 (0.2715)	0.1957 (0.2177)	0.1470 (0.1635)	0.0980 (0.1091)	0.0492 (0.0546)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
F_{III}	β (deg)	a/b	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90		
			1.00	0.3108 (0.2621)	0.3415 (0.3007)	0.3716 (0.3370)	0.4005 (0.3707)	0.4273 (0.4016)	0.4519 (0.4296)	0.4739 (0.4540)	0.4930 (0.4752)	0.5088 (0.4927)	0.5214 (0.5064)	0.5305 (0.5163)	0.5355 (0.5223)	0.5370 (0.5243)	0.5370 (0.5243)
			1.50	0.4255 (0.3750)	0.4655 (0.4235)	0.5022 (0.4612)	0.5355 (0.5040)	0.5648 (0.5373)	0.5905 (0.5662)	0.6127 (0.5908)	0.6312 (0.6113)	0.6464 (0.6280)	0.6580 (0.6408)	0.6663 (0.6499)	0.6714 (0.6553)	0.6730 (0.6571)	0.6730 (0.6571)

Table.3 Dimensionless stress intensity factor $F_{II}(\beta), F_{III}(\beta)$ when $a/b=1.0$ in Fig.1. [():Elliptical Crack.]

	β (deg)	ν															
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25		
F_{II}	0.0	0.646 (0.637)	0.646 (0.637)	0.646 (0.636)	0.646 (0.635)	0.645 (0.634)	0.644 (0.633)	0.643 (0.632)	0.642 (0.630)	0.641 (0.629)	0.640 (0.627)	0.638 (0.627)	0.6261 (0.6149)	0.6096 (0.5982)	0.5882 (0.5770)		
	0.30	∞ (0.749)	0.765 (0.749)	0.744 (0.748)	0.733 (0.747)	0.726 (0.746)	0.720 (0.745)	0.715 (0.742)	0.709 (0.743)	0.704 (0.742)	0.700 (0.740)	0.696 (0.738)	0.6814 (0.7234)	0.6635 (0.7038)	0.6411 (0.6788)		
	0.50	∞ (0.849)	0.833 (0.849)	0.785 (0.848)	0.775 (0.848)	0.775 (0.847)	0.774 (0.846)	0.770 (0.844)	0.762 (0.842)	0.755 (0.841)	0.748 (0.838)	0.744 (0.836)	0.7296 (0.8199)	0.7100 (0.7976)	0.6891 (0.7693)		
F_{III}	0.0	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0111)	0.009 (0.022)	0.019 (0.033)	0.029 (0.044)	0.040 (0.055)	0.051 (0.067)	0.062 (0.078)	0.073 (0.089)	0.084 (0.100)	0.095 (0.111)	0.109 (0.127)	0.1499 (0.1648)	0.2043 (0.2177)		
	0.30	0.0000 (0.0000)	0.284 (0.009)	0.238 (0.018)	0.216 (0.027)	0.208 (0.037)	0.206 (0.046)	0.206 (0.055)	0.206 (0.064)	0.206 (0.073)	0.207 (0.082)	0.208 (0.091)	0.202 (0.105)	0.209 (0.119)	0.2804 (0.1793)		
	0.50	0.0000 (0.0000)	0.474 (0.007)	0.384 (0.015)	0.337 (0.022)	0.320 (0.030)	0.310 (0.037)	0.304 (0.044)	0.304 (0.052)	0.304 (0.059)	0.300 (0.066)	0.296 (0.074)	0.291 (0.082)	0.284 (0.089)	0.2896 (0.1452)		
F_{II}	β (deg)	ν	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90		
			0.0	0.5623 (0.5513)	0.5320 (0.5215)	0.4977 (0.4877)	0.4594 (0.4502)	0.4177 (0.4092)	0.3727 (0.3652)	0.3249 (0.3183)	0.2746 (0.2690)	0.2222 (0.2177)	0.1682 (0.1648)	0.1128 (0.1105)	0.0566 (0.0555)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
			0.30	0.6139 (0.6486)	0.5819 (0.6135)	0.5453 (0.5737)	0.5042 (0.5296)	0.4591 (0.4814)	0.4103 (0.4296)	0.3580 (0.3745)	0.3029 (0.3165)	0.2453 (0.2562)	0.1858 (0.1938)	0.1247 (0.1301)	0.0626 (0.0653)	0.0000 (0.0000)	0.0000 (0.0000)
F_{III}	β (deg)	ν	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90		
			0.0	0.3083 (0.3183)	0.3568 (0.3652)	0.4024 (0.4052)	0.4448 (0.4502)	0.4836 (0.4877)	0.5185 (0.5215)	0.5493 (0.5513)	0.5758 (0.5770)	0.5977 (0.5982)	0.6149 (0.6149)	0.6273 (0.6289)	0.6348 (0.6348)	0.6373 (0.6342)	0.6373 (0.6342)
			0.30	0.3108 (0.2621)	0.3415 (0.3007)	0.3716 (0.3370)	0.4005 (0.3707)	0.4273 (0.4016)	0.4519 (0.4296)	0.4739 (0.4540)	0.4930 (0.4752)	0.5088 (0.4927)	0.5214 (0.5064)	0.5305 (0.5163)	0.5355 (0.5223)	0.5370 (0.5243)	0.5370 (0.5243)

究課題としたい。図9, 10, 11は自由表面に垂直な半だ円き裂がき裂面に対して斜め方向に一様引張りを受ける問題の応力拡大係数の分布を示す。ここで

は $a/b=1$ の場合を示すが、前報⁽¹⁾のモードI荷重の解析結果と本解析結果を組み合わせると他の形状比の結果も得られる。

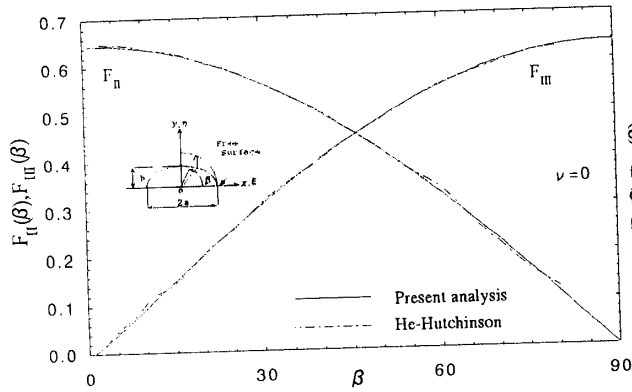


Fig.4 $F_{II}(\beta)$, $F_{III}(\beta)$ when $a/b=1.0$, $\nu=0.0$ in Fig.1.

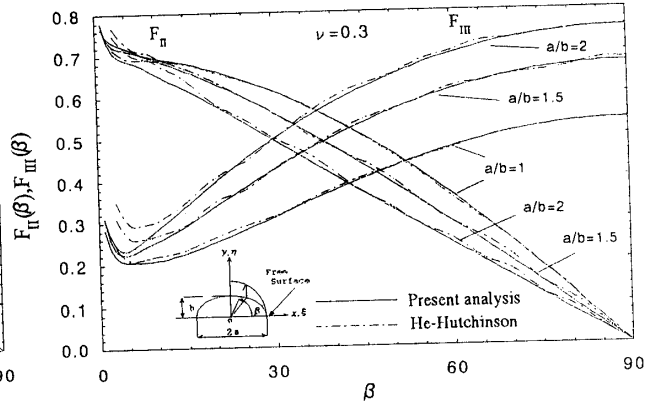


Fig.5 $F_{II}(\beta)$, $F_{III}(\beta)$ when $\nu=0.3$ in Fig.1.

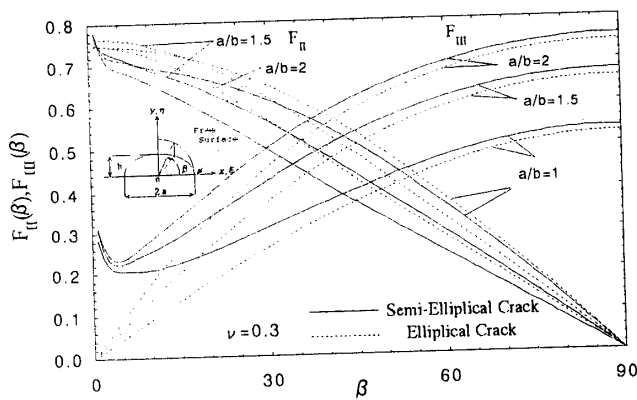


Fig.6 $F_{II}(\beta)$, $F_{III}(\beta)$ when $\nu=0.3$ and $a/b=1, 1.5, 2.0$ in Fig.1.

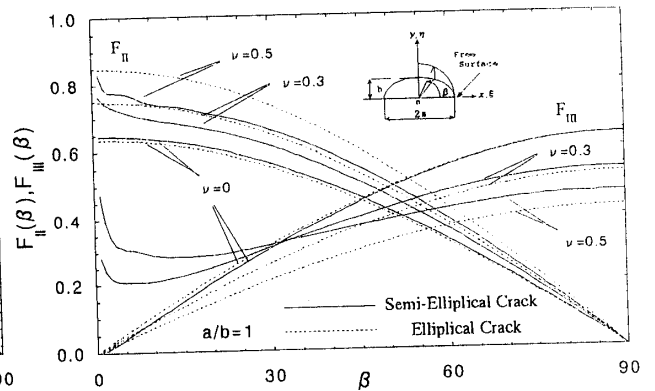


Fig.7 $F_{II}(\beta)$, $F_{III}(\beta)$ when $a/b=1$ and $\nu=0, 0.3, 0.5$ in Fig.1.

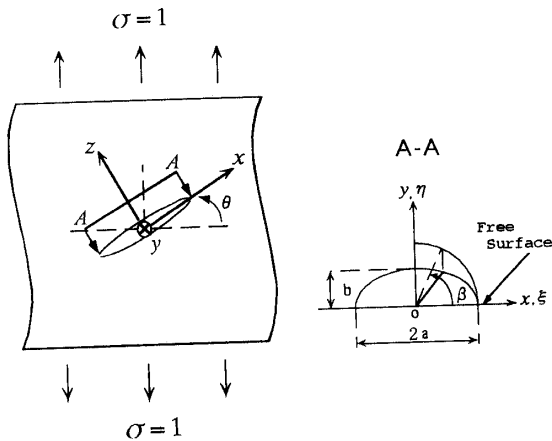


Fig.8 Surface crack aligned obtusely to the remote tensile field.

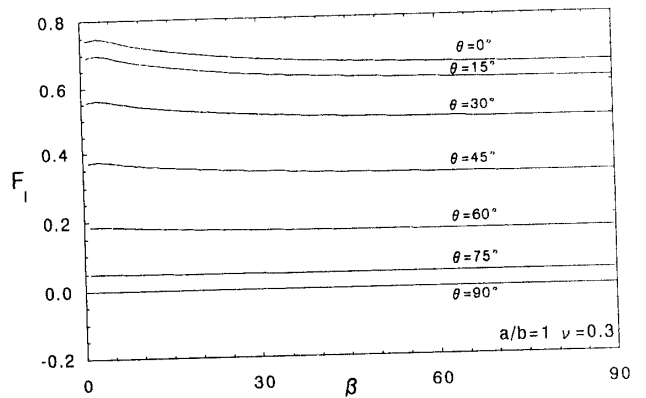


Fig.9 variation of F_I along crack front when $a/b=1.0$, $\nu=0.3$ in Fig.8 ($F_I = K_I / \sigma\sqrt{mb}$).

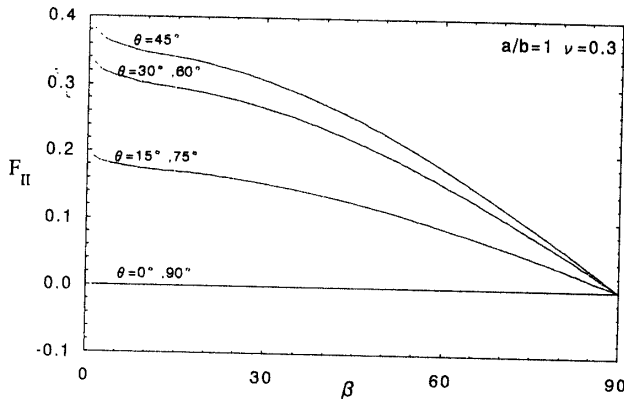


Fig.10 Variation of F_{II} along crack front when $a/b=1.0$, $\nu=0.3$ in Fig.8 ($F_{II} = K_{II} / \sigma \sqrt{r\theta}$).

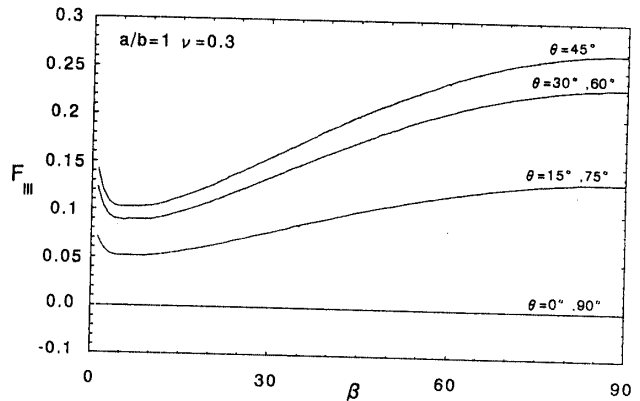


Fig.11 Variation of F_{III} along crack front when $a/b=1.0$, $\nu=0.3$ in Fig.8 ($F_{III} = K_{III} / \sigma \sqrt{r\theta}$).

4. 結 言

本研究では、混合モード負荷における半だ円表面き裂の問題(図1)を、体積力法の特異積分方程式で表現し、未知関数を基本密度関数と多項式で近似する方法^{(1) (6)}を用いて考察した。得られた結果をまとめると以下ようになる。

- (1)未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を適用した結果、良好な収束性(表1)と境界条件の満足度(図3)、ならびに滑らかな応力拡大係数の分布(図6, 7)が得られた。すなわち本解析法は、特異性指数^{(7) (8)}が $\lambda_s=0.332$, $\lambda_a=0.646$ となり通常の $\lambda=0.5$ と大きく異なるポアソン比が $\nu=0.5$ の場合でも多項式の次数 $n=20$ 程度で良好な結果を与える。
- (2)半だ円表面き裂の応力拡大係数分布とだ円形き裂の結果を比較した結果ポアソン比 $\nu=0$ の場合にはよく一致するが ν が大きくなるにつれて両者の違いは大きくなる。(図6, 7)
- (3)ポアソン比 $\nu \neq 0$ のときの半だ円表面き裂の拡大係数は特に K_{III} に関して Corner Point の特異性の影響を強く受ける。したがって、応力拡大係数の分布は Corner Point 近傍で、ポアソン比 $\nu=0$ の場合を除いて複雑な挙動を示し、滑らかに $K_{III} \rightarrow 0 (\beta \rightarrow 0)$ とはならない。He-Hutchinson の有限要素法の結果は β が小さいときを除いて本研究結果によく一致する。(図4, 5)

文 献

- (1)野田尚昭・三好伸介, 特異積分方程式による半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 61-586, A(1995), 1232-1240.
- (2)Raju, I. S. and Newman, Jr. J. C. Stress-Intensity Factors for a Wide Range of Semi-Elliptical Surface Cracks in Finite-Thickness Plates. *Engng. Fracture. Mech.* 11, (1979), 817-829.
- (3)村上敬宜・粟浩志, モードII負荷を受ける3次元き裂の Corner Point Singularity, 機論, 66-652, A(2000), 2211-2217.
- (4)東郷敬一郎・大塚昭夫・結城良治, 混合モード三次元き裂の疲労き裂進展挙動に関する研究(第1報, J積分を応用した混合モード三次元き裂の応力拡大係数の解析), 機論, 52-476, A(1986), 909-918. ; 大塚昭夫・東郷敬一郎・吉田誠, 混合モード三次元き裂の疲労き裂進展挙動に関する

- 研究(第2報, せん断負荷を受ける半だ円表面き裂からの疲労き裂進展挙動), 機論, 54-505, A(1988), 1735-1744.
- (5)He, M. Y. and Hutchinson, J. W. Surface Crack Subject to Mixed Mode Loading, *Engng. Frac. Mech.* 65 (2000), 1-14.
- (6)野田尚昭・小林公浩・柳下誠, 特異積分方程式を用いた傾斜半だ円表面き裂先端の応力拡大係数の分布の解析, 機論, 63-615, A(1997), 2345-2350.
- (7)Benhem, J. P. State of Stress at The Vertex of Crack in a Half-Space. *Int. J. Solid. Struct.* 13, (1977), 479-492.
- (8)Bazant, Z. P. and Estenssoro, L. F. Surface Singularity and Crack Propagation. *Int. J. Solid. Struct.* 15, (1979), 405-426 ; 16, (1979), 479-481, 19, (1983), 661.
- (9)Ghahremani, F. Numerical Variational Method for Extracting 3D Singularities. *Int. J. Solid. Struct.* 27, (1991), 1371-1386.
- (10)Nakamura, T. and Parks, D. M. Three-Dimensional Elastic Stress Field near The Crack Front of a Thin Elastic Plate. *J. Appl. Mech.* 55, (1988), 805-813.
- (11)藤谷義信, Rayleigh-Ritz法による3次元弾性体表面クラック問題の応力特異性の解析, 広島大学研究報告, 28-2, (1980), 129-137.
- (12)高久田和夫, き裂先端近傍における応力の特異性, 機論, 50-454, A (1984), 1193-1200.
- (13)Benhem, J. P. The Quarter-Infinite Crack in a Half Space; Alternative and Additional Solutions. *Int. J. Solid. Struct.* 16, (1980), 119-130.
- (14)Pook, L. P. A Note on Corner Point Singularities. *Int. J. Fract.* 53, (1992), R3-R8.
- (15)Dhondt, G. On Corner Point Singularities Along a Quarter Circular Crack Subject to Shear Loading. *Int. J. Fract.* 89, (1998), L33-L38.
- (16)Barsoum, R. S. Application of the Finite Element Iterative Method to the Eigenvalue Problem of a Crack between Dissimilar Media. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 25, (1988), 541-554.
- (17)Bazant, Z. P. Three-Dimensional Harmonic Functions near Termination or Intersection of Gradient Singularity Line: a General Numerical Method. *Int. J. Engng. Sci.* 12, (1974), 221-243.
- (18)Bazant, Z. P. and Estenssoro, L. F. General Numerical Method for Three-Dimensional Singularities in Cracked or Notched Elastic Solids. *Fracture, Proc. 4th. Int. Conf. (Edited by D. M. R. Taplin)*, 3, (1977), 371-385, University of Waterloo, Ontario, Canada.
- (19)Benhem, J. P. On an Inversion Theorem for Conical Regions in Elasticity Theory. *J. Elasticity.* 9, (1979), 159-169.
- (20)Ghahremani, F. and Shih, C. F. Corner Singularities of Three-Dimensional Planar Interface Crack. *J. Appl. Mech.* 59, (1992), 61-68.
- (21)Nakamura, T. and Parks, D. M. Anti-Symmetrical 3D Stress Field near the Crack Front of a Thin Elastic Plate. *Int. J. Solid. Struct.* 25, (1989), 1411-1426.
- (22)John, R. and Nicholas, A. and Lackey, F. and Porter, W. J. Mixed-Mode Crack Growth in Single Crystal Ni-Based Superalloy. In: Lutjering, G., Nowack, H. editors. *Faigue '96: Proceedings of the Sixth International Fatigue Congress*, (1996), 399-404, Oxford, Pergamon Press.
- (23)John, R. and Deluca, D. and Nicholas, T. and Porter, J. Near-Threshold Crack Growth Behavior of a Single Crystal Ni-Based Superalloy Subject to Mixed Mode Loading. In: Miller, K. J., McDowell, D. L., editor. *Mixed Mode Behavior, ASTM STP 1359*, (1999), 312-328.
- (24)Campbell, J. P. and Thompson, A. W. and Ritchie, R. O. Mixed-Mode Crack Growth Thresholds in Ti-6Al-4V under Turbine-Engine High Cycle Fatigue Loading Conditions. *Proceedings of the 4th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference*, (1999), Monterey, CA.
- (25)Kassir, M. K. and Sih, G. C. Three-Dimensional Stress Distribution Around an Elliptical Crack under Arbitrary Loadings. *J. Appl. Mech.* 33, (1966), 601-611.