

## 強化繊維の引抜きにおける繊維端部の特異応力場の強さ\*

野田 尚 昭\*<sup>1</sup>, 白尾 亮 司\*<sup>2</sup>  
李 俊\*<sup>3</sup>, 杉本 淳 典\*<sup>4</sup>

## Intensity of Singular Stress at the End of a Fiber under Pull-out Force

Nao-Aki NODA\*<sup>5</sup>, Ryohji SHIRAO,  
Jun LI and Jun-Suke SUGIMOTO\*<sup>5</sup> Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,  
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this study, singular fields at the ends of fibers are discussed by the use of models of rectangular and cylindrical inclusions in a semi-infinite body under pull-out force. The body force method is used to formulate those problems as a system of singular integral equations where the unknown functions are densities of the body forces distributed in a semi-infinite body having the same elastic constants as those of the matrix and inclusions. Then, generalized stress intensity factors at the corner of rectangular and cylindrical inclusions are systematically calculated with varying the elastic modulus ratio and aspect ratio of inclusions. The effects of elastic modulus ratio and aspect ratio of inclusion upon the stress intensity factors are discussed.

**Key Words:** Elasticity, Composite Material, Fracture Mechanics, Body Force Method, Singular Integral Equation, Generalized Stress Intensity Factor, Hexagonal Array, Cylindrical Inclusion

## 1. 結 言

繊維強化複合材料において強化繊維を用いる目的として、加える荷重を繊維に分担させる、いわゆる荷重転移による効果が挙げられる。すなわち、母材に作用する荷重を強化繊維が分担して負担する事によって、低強度である母材を強化し、比強度、比弾性率の高い複合材料をつくる事が可能となる。しかし、一方で繊維端部に生じる特異応力が原因となって発生したき裂が伝播し破断に至る現象が生じる<sup>(1), (2)</sup>。このため、著者らはさきにもこのような特異応力場の強さを厳密に解析して繊維のアスペクト比と剛性比の影響を議論した<sup>(3)</sup>。

強化繊維を用いるもう1つの目的として、き裂が繊維の影響で屈折する事や、繊維が引抜かれることによる高じん化の機構も重要である。特に、繊維が引抜かれる際の力学的挙動を解明するには、(1) 母材と繊維の界面に生じる剥離の過程と (2) 繊維が引抜ける過程の両者の把握が必要であり、これらが複合材料のじん性を高めることに寄与すると考えられる。このような繊維引抜きの強じん化の挙動を明らかにするため、これまでに、界面の結合力が低下して剥離が生じた後、繊維と母材間に生

じる、すべりや摩擦などの相互作用について多くの研究が行われている<sup>(4) ~ (6)</sup>。しかし、繊維引抜きの初期において剥離の原因となる、繊維と母材の端部および表面に生じる特異応力場を正確に解析した研究は見当たらない。

そこで本研究では、繊維のモデルとして長方形介在物、円柱形介在物が半無限体の表面に存在する場合を考え、介在物に引抜力を与えた場合の介在物端部および表面の特異応力場の強さを解析し考察する。解析においては、境界条件を満足すべき界面を幾つかの基本区間に分割し、各区間での未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式で近似する方法を用いる<sup>(3)</sup>。

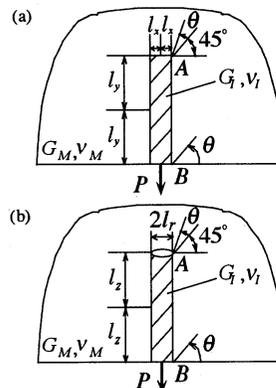


Fig. 1 (a) A rectangular inclusion (b) a cylindrical inclusion in a semi-infinite plate(body) under pull out force

\* 原稿受付 2006年2月20日。

\*<sup>1</sup> 正員、九州工業大学工学部(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。\*<sup>2</sup> 学生員、九州工業大学大学院工学研究科。\*<sup>3</sup> 九州工業大学大学院工学研究科。\*<sup>4</sup> 九州工業大学工学部。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

## 2. 繊維端部の特異応力場と 一般化応力拡大係数

図1(a)は、長方形介在物が表面に存在する場合の問題を示し、図1(b)は円柱形介在物が表面に存在する場合の問題を示す。

長方形介在物および円柱形介在物の端部 A での応力拡大係数<sup>(7)</sup>は以下の式 (1), (2) で定義される。ここで、Dundurs parameter  $\alpha, \beta$  を用いれば、母材と介在物の2つの材料で  $\beta(\alpha - \beta) > 0$  のとき、 $\lambda_1, \lambda_2$  は  $0 < \text{Re}(\lambda_i) < 1$  ( $i=1, 2$ ) の内の実数値の根となり、特異応力場は式 (1) で表される。

$$\sigma_{y,k} = \frac{K_{I,\lambda_1}}{r^{1-\lambda_1}} f_{y,k}^I + \frac{K_{II,\lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{y,k}^{II} \quad (ij=r, \theta, r\theta; k=M, I) \quad \dots \cdot (1)$$

母材 M  $-3\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$  では、

$$\begin{aligned} f_{\theta,M}^I(\theta) &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi(\alpha-\beta)}} \{ [-\lambda_1(\alpha-\beta)\cos(\lambda_1\pi/2) \\ &\quad + (1-\beta)\sin(\lambda_1\pi)] \times \cos\{(\lambda_1+1)\theta\} \\ &\quad + [(\lambda_1+1)(\alpha-\beta)\sin(\lambda_1\pi/2)] \times \cos\{(\lambda_1-1)\theta\} \} \\ f_{\theta,M}^{II}(\theta) &= \frac{\lambda_2}{\sqrt{2\pi(\alpha-\beta)}} \{ [-\lambda_2(\alpha-\beta)\cos(\lambda_2\pi/2) \\ &\quad - (1-\beta)\sin(\lambda_2\pi)] \times \sin\{(\lambda_2+1)\theta\} \\ &\quad + [(\lambda_2+1)(\alpha-\beta)\sin(\lambda_2\pi/2)] \times \sin\{(\lambda_2-1)\theta\} \} \\ f_{r\theta,M}^I(\theta) &= \frac{\lambda_1}{\sqrt{2\pi(\alpha-\beta)}} \{ [-\lambda_1(\alpha-\beta)\cos(\lambda_1\pi/2) \\ &\quad + (1-\beta)\sin(\lambda_1\pi)] \times \sin\{(\lambda_1+1)\theta\} \\ &\quad + [(\lambda_1-1)(\alpha-\beta)\sin(\lambda_1\pi/2)] \times \sin\{(\lambda_1-1)\theta\} \} \\ f_{r\theta,M}^{II}(\theta) &= \frac{-\lambda_2}{\sqrt{2\pi(\alpha-\beta)}} \{ [-\lambda_2(\alpha-\beta)\cos(\lambda_2\pi/2) \\ &\quad - (1-\beta)\sin(\lambda_2\pi)] \times \cos\{(\lambda_2+1)\theta\} \\ &\quad + [(\lambda_2-1)(\alpha-\beta)\sin(\lambda_2\pi/2)] \times \cos\{(\lambda_2-1)\theta\} \} \\ &(\alpha, \beta: \text{Dundurs parameter}) \quad \dots \cdot (2) \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{G_M(\kappa_I+1) - G_I(\kappa_M+1)}{G_M(\kappa_I+1) + G_I(\kappa_M+1)}, \quad \beta = \frac{G_M(\kappa_I-1) - G_I(\kappa_M-1)}{G_M(\kappa_I+1) + G_I(\kappa_M+1)}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} (3-\nu_i)/(1+\nu_i) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu_i & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (i=M, I)$$

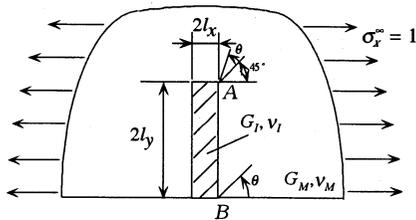


Fig.2 A rectangular inclusion model in a semi-infinite plate under tension

次に、端部 B の応力拡大係数<sup>(8)</sup>は以下の式 (3), (4) で定義される。この場合  $\alpha(\alpha - 2\beta) > 0$  のとき  $\lambda$  が  $0 < \text{Re}(\lambda) < 1$  の範囲の実数値の根となる。

$$\sigma_{y,k} = \frac{K}{r^{1-\lambda}} f_{y,k} \quad (ij=r, \theta, r\theta; k=M, I) \quad \dots \cdot (3)$$

母材 M  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  では、

$$\begin{aligned} f_{\theta,M}(\theta) &= 2\lambda(1+\lambda)\{-2\alpha\lambda(1+\lambda) + \beta(1+2\lambda(1+\lambda)) \\ &\quad - \beta(1+2\lambda)\cos(\pi\lambda)\} \sin\{\theta(-1+\lambda)\} \\ &\quad + 4(1+\lambda)(-1+2\beta\lambda)\sin(\theta)\sin(\pi\lambda)\sin(\theta\lambda) \\ &\quad - 2(-1+\lambda)\{-2\alpha\lambda(1+\lambda) + \beta(1+2\lambda(1+\lambda)) \\ &\quad - \beta(1+2\lambda)\cos(\pi\lambda)\} \sin\{\theta(-1+\lambda)\} \\ f_{r\theta,M}(\theta) &= 4\lambda\{-\lambda(-1+2\beta\lambda)\sin(\theta)\sin(\pi\lambda)\cos(\theta\lambda) \\ &\quad - [(-1+\lambda)(-2\alpha\lambda(1+\lambda) + \beta(1+2\lambda(1+\lambda)) \\ &\quad - \beta(1+2\lambda)\cos(\pi\lambda))\sin(\theta) \\ &\quad + (-1+2\beta\lambda)\cos(\theta)\sin(\pi\lambda)]\sin(\theta\lambda)\} \\ &\quad \dots \cdot (4) \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda$  は幾何条件と材料条件より得られる特性方程式の根<sup>(7), (8)</sup>である。

## 3. 解析方法

### 3.1 体積法の特異積分方程式

図1の問題の解析に際して、角部 B の特異応力場の研究は少ないので、まず、図2のような引張問題を扱った。以下では図2の長方形介在物を有する半無限板の問題を対象として解析方法を説明する。図1の解析法も以下の式で  $\sigma_{nm}^\infty$  等の表現が異なるのみではほぼ同様である。ここで、 $l_x, l_y$  は介在物の寸法、 $\sigma_x^\infty$  は無限遠での引張応力である。また、母材と介在物のそれぞれの横弾性係数とポアソン比を  $G_M, \nu_M$  および  $G_I, \nu_I$  とする。この問題は重ね合わせの原理に基づく体積法の考え方により、半無限板中の一点に集中力が働くときの任意の点の応力場の解と変位場の解  $h_{nn}^{F_{nm}}$  (図1(b)では半無限体中の集中力の輪による解<sup>(9)</sup>とみなす)を用いて解くことができる。このとき問題は、母材と同じ弾性定数をもつ半無限体 M ならびに介在物と同じ弾性定数をもつ半無限体 I に分布させた体積力密度  $F_{nM}, F_{nI}, F_{tM}, F_{tI}$  を未知関数とする特異積分方程式 (5), (6) で表現される。

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}F_{nM}(s) - \frac{1}{2}F_{nI}(s) + \int_L h_{nn}^{F_{nM}}(r,s)F_{nM}(r)dr \\ &+ \int_L h_{nn}^{F_{nI}}(r,s)F_{nI}(r)dr - \int_L h_{nn}^{F_{tM}}(r,s)F_{tM}(r)dr \\ &- \int_L h_{nn}^{F_{tI}}(r,s)F_{tI}(r)dr = -\sigma_{nM}^\infty(s) + \sigma_{nI}^\infty(s) \\ &-\frac{1}{2}F_{tM}(s) - \frac{1}{2}F_{tI}(s) + \int_L h_{nn}^{F_{nM}}(r,s)F_{nM}(r)dr \\ &+ \int_L h_{nn}^{F_{nI}}(r,s)F_{nI}(r)dr - \int_L h_{nn}^{F_{tM}}(r,s)F_{tM}(r)dr \\ &- \int_L h_{nn}^{F_{tI}}(r,s)F_{tI}(r)dr = -\tau_{nM}^\infty(s) + \tau_{nI}^\infty(s) \\ &\quad \dots \cdot (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_L h_u^{F_{nM}}(r,s)F_{nM}(r)dr + \int_L h_v^{F_{nM}}(r,s)F_{nM}(r)dr \\
 & - \int_L h_u^{F_{nd}}(r,s)F_{nd}(r)dr - \int_L h_v^{F_{nd}}(r,s)F_{nd}(r)dr \\
 & = -u_M^\infty + u_I^\infty \\
 & \int_L h_u^{F_{nM}}(r,s)F_{nM}(r)dr + \int_L h_v^{F_{nM}}(r,s)F_{nM}(r)dr \\
 & - \int_L h_u^{F_{nd}}(r,s)F_{nd}(r)dr - \int_L h_v^{F_{nd}}(r,s)F_{nd}(r)dr \\
 & = -v_M^\infty + v_I^\infty \quad \dots \dots (6)
 \end{aligned}$$

式 (5), (6) は介在物界面の境界条件  $\sigma_{nM} = \sigma_{nd}$ ,  $\tau_{nM} = \tau_{nd}$ ,  $u_M = u_I$ ,  $v_M = v_I$  に相当しており,  $\sigma_{nM}^\infty$  等は無限遠の引張りにより生じる応力である。

**3・2 角部 A 近傍の離散化数値解析** ここでは, 介在物角部 A 近傍の数値解析法は以下になる。角部 A 以外の部分の解法もほぼ同様であるが, 以下のような対称と逆対称変形を表す密度分布を用いない点異なる。長方形介在物となるべき境界をいくつかの基本区間に分けた例を図3に示す。長方形介在物の端部 A 近傍では, 一般にモード I とモード II の2種類の变形が生じるので, 仮想境界上に分布させるべき体積力  $F_n$  と  $F_I$  に対して図3の  $\theta = 0$  方向に関する対称形 (モード I) と逆対称形 (モード II) の2種類の分布形式を採用する。図3の端部 A の範囲に分布させる体積力を以下に示すように基本密度関数 ( $r_1^{\lambda_1-1}$ ,  $r_1^{\lambda_2-1}$ : 端部に対して対称および逆対称変形を表現する分布密度) と重み関数  $W_{nM}^I \sim W_{nM}^{II}$  等<sup>(10)</sup> で近似する (式 (7))。

$$\begin{aligned}
 F_{nM}(r_1) &= F_{nM}^I(r_1) + F_{nM}^{II}(r_1) = W_{nM}^I(r_1)r_1^{\lambda_1-1} + W_{nM}^{II}(r_1)r_1^{\lambda_2-1} \\
 F_{nM}^I(r_1) &= F_{nM}^{I'}(r_1) + F_{nM}^{I''}(r_1) = W_{nM}^{I'}(r_1)r_1^{\lambda_1-1} + W_{nM}^{I''}(r_1)r_1^{\lambda_2-1} \\
 F_{nM}^{II}(r_1) &= F_{nM}^{II'}(r_1) + F_{nM}^{II''}(r_1) = W_{nM}^{II'}(r_1)r_1^{\lambda_1-1} + W_{nM}^{II''}(r_1)r_1^{\lambda_2-1} \\
 F_{nd}(r_1) &= F_{nd}^I(r_1) + F_{nd}^{II}(r_1) = W_{nd}^I(r_1)r_1^{\lambda_1-1} + W_{nd}^{II}(r_1)r_1^{\lambda_2-1} \\
 F_{nd}^I(r_1) &= F_{nd}^{I'}(r_1) + F_{nd}^{I''}(r_1) = W_{nd}^{I'}(r_1)r_1^{\lambda_1-1} + W_{nd}^{I''}(r_1)r_1^{\lambda_2-1} \\
 F_{nd}^{II}(r_1) &= F_{nd}^{II'}(r_1) + F_{nd}^{II''}(r_1) = W_{nd}^{II'}(r_1)r_1^{\lambda_1-1} + W_{nd}^{II''}(r_1)r_1^{\lambda_2-1} \\
 & \dots \dots (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{nM}^I(r_1) &= \sum_{n=1}^M a_n r_1^{n-1}, \quad W_{nM}^{II}(r_1) = \sum_{n=1}^M b_n r_1^{n-1} \\
 W_{nM}^{II}(r_1) &= \sum_{n=1}^M c_n r_1^{n-1}, \quad W_{nM}^{II'}(r_1) = \sum_{n=1}^M d_n r_1^{n-1} \\
 W_{nd}^I(r_1) &= \sum_{n=1}^M e_n r_1^{n-1}, \quad W_{nd}^I(r_1) = \sum_{n=1}^M f_n r_1^{n-1} \\
 W_{nd}^{II}(r_1) &= \sum_{n=1}^M g_n r_1^{n-1}, \quad W_{nd}^{II}(r_1) = \sum_{n=1}^M h_n r_1^{n-1} \quad \dots \dots (8)
 \end{aligned}$$

式 (7) に含まれる基本密度関数  $r_1^{\lambda_1-1}$ ,  $r_1^{\lambda_2-1}$  は端部 A 先端近傍について体積力密度の分布を精度良く表現するための関数で, それぞれ対称形 (モード I) と逆対称形 (モード II) の変形を表現する。本解析で用いる式 (7), (8) の表現は, 特異応力場に対応する変形様式以外の変形を含まない。従って, 式 (8) の右辺に示されるように無限板 II にも端部の変位を一致させるように無限遠における応力  $\sigma_n^\infty$  を作用させる。以上のような離散化手法により, 境界上に適当に選んだ点での境界条件から式 (8) の  $a_n \sim h_n$  等の係数を決定すれば, 特異積分方程式 (5), (6) の解が得られる。体積力密度は角部 A で無限大となるため, 数値解析法によって求めることは困難であるが, 式 (7) 中の重み関数は, 角部先端付近でも有限な値となるので, 高精度の解析が可能となる。介在物の端部 A に関して定義された応力拡大係数  $K_{I,\lambda_1}$ ,  $K_{II,\lambda_2}$  は端部 A 先端での重み関数の  $W_n^I(0)$ ,  $W_n^{II}(0)$ ,  $W_I^I(0)$ ,  $W_I^{II}(0)$  から求められる。

**3・3 角部 B 近傍の離散化数値解析** 図2における長方形介在物の端部 B では, 体積力密度  $F_n$  と  $F_I$  を以下のように近似する。

$$\begin{aligned}
 F_{nM}(r_2) &= W_{nM}(r_2)r_2^{\lambda-1}, \quad W_{nM}(r_2) = \sum_{n=1}^M i_n r_2^{n-1} \\
 F_{nM}^I(r_2) &= W_{nM}^I(r_2)r_2^{\lambda-1}, \quad W_{nM}^I(r_2) = \sum_{n=1}^M j_n r_2^{n-1} \\
 F_{nM}^{II}(r_2) &= W_{nM}^{II}(r_2)r_2^{\lambda-1}, \quad W_{nM}^{II}(r_2) = \sum_{n=1}^M k_n r_2^{n-1} \\
 F_{nd}(r_2) &= W_{nd}(r_2)r_2^{\lambda-1}, \quad W_{nd}(r_2) = \sum_{n=1}^M l_n r_2^{n-1} \quad \dots \dots (9)
 \end{aligned}$$

端部 B における特異応力場の強さを表すパラメータ  $K_{I,\lambda_1}$ ,  $K_{II,\lambda_2}$ ,  $K$  は, 端部 B ( $r_2=0$ ) における重みの値  $W_n^I(0)$ ,  $W_n^{II}(0)$ ,  $W_I^I(0)$ ,  $W_I^{II}(0)$  から直接求まる<sup>(6)</sup>。すなわち, まず図4に示すような, 半無限板中の  $r$  軸上に密度がそれぞれ  $P \times r^{\lambda-1}$  と  $Q \times r^{\lambda-1}$  である  $\theta$  方向と  $r$  方向の体積力の分布による領域1と2におけるそれぞれの応力の分布を求める。その応力分布は, 次のように複素応力関数から計算される (式 (10), (11)) は文献<sup>(6)</sup> に与え

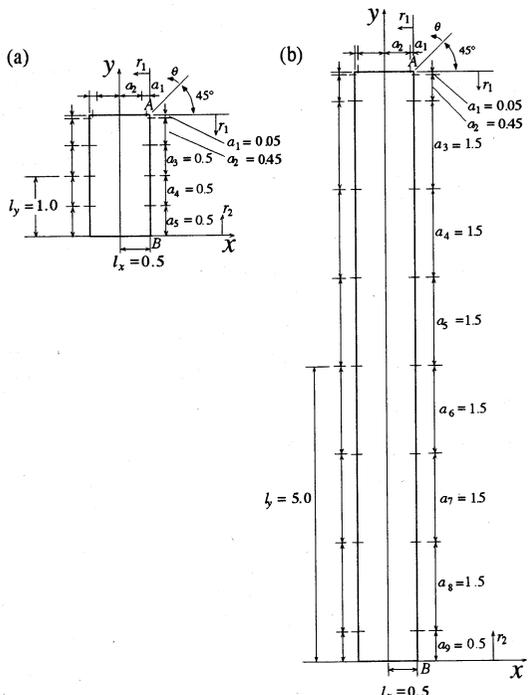


Fig.3 Boundary division (a)  $l_y / l_x = 2$ , (b)  $l_y / l_x = 10$

られているが, ミスプリントを訂正した).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta j} + \sigma_{r j} &= \operatorname{Re}\left[4\phi'_{j(z)}\right] \\ \sigma_{\theta j} - \sigma_{r j} + 2i\tau_{r\theta j} &= 2e^{2i\theta}\left\{z\phi''_{j(z)} + \phi'_{j(z)}\right\} \end{aligned} \right\} (j=1,2) \quad \dots \dots (10)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \phi_{j(z)} &= a_j z^\lambda \\ \phi_{j(z)} &= b_j z^\lambda \\ a_1 &= \frac{X(e^{2i\lambda\pi} + \kappa e^{2i\lambda\gamma}) - \lambda \bar{X}(e^{2i\gamma} - 1)}{e^{2i\lambda\pi} - 1} \\ a_2 &= \frac{X(1 + \kappa e^{2i\lambda\pi}) - \lambda \bar{X}(e^{2i\gamma} - 1)}{e^{2i\lambda\pi} - 1} \\ b_1 &= -\lambda a_1 - \bar{a}_1 \\ b_2 &= -\lambda a_2 - e^{-2i\lambda\pi} a_2 \\ \kappa &= \begin{cases} (3-v)/(1+v) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \\ X &= \frac{(P-iQ)e^{-i(\lambda-1)\gamma}}{\lambda(\kappa+1)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (11)$$

式 (10) 中の  $\theta$  を,  $\theta = \pi/2$  とおいて, 式 (10) を  $\sigma_{\theta j}$  ( $=\sigma_{x j}$ ),  $\tau_{r\theta j}$  ( $=\tau_{xy j}$ ) について解くと, 次のようになる.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x j} &= 2\operatorname{Re}\left[\phi'_{j(z)}\right] - \operatorname{Re}\left[z\phi''_{j(z)} + \phi'_{j(z)}\right] = s_{\sigma j} \times r^{\lambda-1} \\ \tau_{xy j} &= -\operatorname{Im}\left[z\phi''_{j(z)} + \phi'_{j(z)}\right] = s_{\tau j} \times r^{\lambda-1} \\ s_{\sigma j} &= 2\left\{\operatorname{Re}\left[a_j\right]\lambda \cos(\gamma(\lambda-1)) - \operatorname{Im}\left[a_j\right]\lambda \sin(\gamma(\lambda-1))\right\} \\ &+ \left\{-\operatorname{Re}\left[a_j\right]\lambda(\lambda-1) \cos(\gamma(\lambda-3)) + \operatorname{Im}\left[a_j\right]\lambda(\lambda-1) \sin(\gamma(\lambda-3))\right\} \\ &+ \left\{\operatorname{Re}\left[b_j\right]\lambda \cos(\gamma(\lambda-1)) - \operatorname{Im}\left[b_j\right]\lambda \sin(\gamma(\lambda-1))\right\} \\ s_{\tau j} &= \left\{\operatorname{Re}\left[a_j\right]\lambda(\lambda-1) \sin(\gamma(\lambda-3)) + \operatorname{Im}\left[a_j\right]\lambda(\lambda-1) \cos(\gamma(\lambda-3))\right\} \\ &- \left\{\operatorname{Re}\left[b_j\right]\lambda \sin(\gamma(\lambda-1)) + \operatorname{Im}\left[b_j\right]\lambda \cos(\gamma(\lambda-1))\right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (12)$$

特異応力場の強さ (式 (3) の  $K$ ) を求めるには, 式 (3) と式 (12) を比べて,  $K = \sigma_{x j} r^{1-\lambda} / f_{\theta\theta} = s_{\sigma j} / f_{\theta\theta}$  または,  $K = \tau_{xy j} r^{1-\lambda} / f_{r\theta} = s_{\tau j} / f_{r\theta}$  となることから, 式 (11) 中

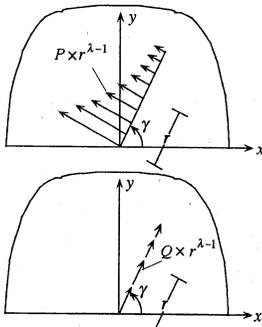


Fig.4 Distribution of the body forces which are proportional to  $r^{\lambda-1}$

の  $P, Q, \nu, \gamma$  に,  $P=W_{nm}(0), Q=W_{lm}(0), \nu=\nu_M$  (または,  $P=W_{nl}(0), Q=W_{ll}(0), \nu=\nu_l$ ),  $\gamma = \pi/2$  を代入すると,  $K$  の値が求められる.

4. 解析結果および考察

以下では図1, 図2の角部Aの界面の特異応力の強さを表現するため, 次式の  $F_{\sigma, I}, F_{\sigma, II}$  を用いる. また, 角部Bに関して次式で定義される  $F_{\sigma}$  を用いる.

図1, 図2の角部Aに関して,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta M}\Big|_{\theta=\pm 135^\circ} = \sigma_{\theta}\Big|_{\theta=\pm 135^\circ} &= \frac{K_{I, \lambda}}{r^{1-\lambda_1}} f_{\theta}^I\Big|_{\theta=\pm 135^\circ} \mp \frac{K_{II, \lambda_2}}{r^{1-\lambda_2}} f_{\theta}^{II}\Big|_{\theta=\pm 135^\circ} \\ &= \frac{\sigma_{\sigma, I}}{(r/l_x)^{1-\lambda_1}} \mp \frac{\sigma_{\sigma, II}}{(r/l_x)^{1-\lambda_2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

図1, 図2の角部Bでは,

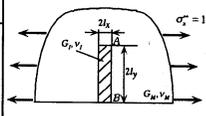
$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta M}\Big|_{\theta=90^\circ} = \sigma_{\theta}\Big|_{\theta=90^\circ} &= \frac{K}{r^{1-\lambda}} f_{\theta} = \frac{\sigma_{\sigma}}{(r/l_x)^{1-\lambda}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (14)$$

ここで,  $\sigma = P/(2l_x)$  (図1(a)),  $\sigma = P/(l_x^2)$  (図1(b)),  $\sigma = \sigma_x$  (図2) である.

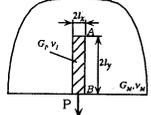
4-1 解の収束性 図2に示すような長方形介在物の端部の問題において, 介在物と母材の寸法や剛性比  $G_I/G_M$  を変えて介在物端部A, Bの応力拡大係数  $F_{\sigma, I}(A), F_{\sigma, II}(A), F_{\sigma}(B)$  の解析を行った. 表1は,  $F_{\sigma, I}(A), F_{\sigma, II}(A), F_{\sigma}(B)$  の値の収束の例を示す. 計算に用いた境界の基本区間の例を図3に示す. 表1の結果は良好な収束性を示している. 本研究では表1以外のすべての場合についても同様の検討を行った. その結果, 境界を図3に示すような基本区間に分割し前節の解析法を適用することによって, 各基本区間の選点数  $M=4\sim 6$  での  $F_{\sigma, I}(A), F_{\sigma, II}(A), F_{\sigma}(B)$  の値が有効数字3桁程度ま

Table 1 Convergence of  $F_{\sigma, I}(A), F_{\sigma, II}(A)$  and  $F_{\sigma}(B)$  in (i) Fig.2, (ii) Fig.1(a), (iii) Fig.1(b) ( $l_y/l_x=2, G_I/G_M=10, M$ : Collocation number)

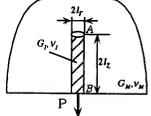
(i)	M	$F_{\sigma, I}(A)$	$F_{\sigma, II}(A)$	$F_{\sigma}(B)$
	4	0.158	0.613	0.226
	5	0.157	0.612	0.217
	6	0.157	0.617	0.216

(ii)	M	$F_{\sigma, I}(A)$	$F_{\sigma, II}(A)$	$F_{\sigma}(B)$
	4	0.0283	0.0362	0.199
	5	0.0284	0.0363	0.191
	6	0.0284	0.0364	0.191

(iii)	M	$F_{\sigma, I}(A)$	$F_{\sigma, II}(A)$	$F_{\sigma}(B)$
	4	0.499	0.923	1.460
	5	0.489	0.937	1.473
	6	0.482	0.948	1.473



で収束しており、良好な結果が得られていることが確認された。

**4・2 板状接合試験片接合端部の特異応力場の強さ** 図1の角部Bのような接合端部に生じる特異応力場を正確に求めた研究は少ない。そこで本研究ではまず、図5に示すような、2種類の材料1と材料2(横

弾性係数とポアソン比を $G_1, \nu_1$ および $G_2, \nu_2$ とする)が接合された板状接合試験片の引張りを、第3節の方法で解析した。そして、端部Oの特異応力場の強さを、種々の材料組み合わせについて求めた。表2と図6に $l_x / l_y = 2$ とDundursの複合パラメータ $\beta = -0.2, -0.1, 0, \dots, 0.4$ を固定し、 $\alpha$ を変化させて、角点Oにおける $F_\sigma$ の値を示す。陳らの結果(文献(8)からの読取値)は誤差3%以内で本解析結果と一致する。

Table 2  $F_\sigma$  at the corner O for bonded strip in Fig.5

$\alpha \backslash \beta$	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4
0.05	0.862 (0.87)	0.924 (0.93)	--	--	Present Analysis ( ) : Ref[8]		
0.1	0.767 (0.79)	0.890 (0.89)	0.955 (0.96)	--			
0.15	0.698 (0.71)	--	--	--	--	--	--
0.2	--	0.797 (0.81)	0.889 (0.90)	--	--	--	--
0.3	--	0.697 (0.71)	0.796 (0.81)	0.913 (0.93)	--	--	--
0.4	--	0.615 (0.62)	0.718 (0.72)	0.822 (0.83)	--	--	--
0.5	--	--	0.635 (0.64)	0.722 (0.73)	0.842 (0.87)	--	--
0.6	--	--	0.559 (0.56)	0.638 (0.64)	0.724 (0.74)	--	--
0.7	--	--	0.486 (0.49)	0.558 (0.56)	0.626 (0.64)	0.800 (0.81)	--
0.75	--	--	--	--	0.712 (0.73)	--	--
0.8	--	--	0.450 (0.45)	0.487 (0.49)	0.538 (0.55)	0.636 (0.65)	--
0.85	--	--	--	--	0.582 (0.60)	0.835 (0.83)	--
0.9	--	--	0.381 (0.39)	0.412 (0.42)	0.456 (0.46)	0.534 (0.55)	0.726 (0.72)
0.95	--	--	--	--	--	0.643 (0.64)	--
1.0	--	--	0.332 (0.33)	0.357 (0.35)	0.395 (0.40)	0.446 (0.44)	0.540 (0.54)

Table 3 Singular index  $\lambda_1, \lambda_2$  at the corner A and singular index  $\lambda$  at the corner B (see Fig.2)

	corner A		corner B
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda$
$G_I / G_M = 2$	0.9109102	0.9788427	0.9630015
$G_I / G_M = 10$	0.7981112	0.7856547	0.8015335
$G_I / G_M = 60$	0.7659920	0.6383511	0.7289061
$G_I / G_M = 100$	0.7632349	0.6218440	0.7219664
$G_I / G_M \rightarrow \infty$	0.7590420	0.5951564	0.7111729

Table 4 Stress intensity factor  $F_\sigma$  in Fig.2 at the corner A and B

$G_I / G_M$	$F_{\sigma, I}(A)$				$F_{\sigma, II}(A)$				$F_\sigma(B)$			
	2	10	60	100	2	10	60	100	2	10	60	100
2	0.235	0.158	0.120	0.116	0.629	0.613	0.493	0.479	0.803	0.219	0.110	0.102
5	0.230	0.175	0.152	0.150	0.635	0.601	0.473	0.459	0.795	0.203	0.101	0.093
10	0.229	0.182	0.164	0.163	0.636	0.593	0.464	0.450	0.785	0.183	0.088	0.081
30	0.229	0.188	0.173	0.172	0.636	0.588	0.457	0.443	0.759	0.151	0.066	0.060

**4・3 表面に存在する強化繊維の繊維に垂直方向の引張り** 表3に図2の角部Aの場合の $\lambda_1, \lambda_2$ と表面にある端部Bの場合の $\lambda$ の値を示す。表4に長方形介在物が表面にある場合に、その形状比 $l_y / l_x = 2, 5, 10$ の端部AおよびBでの特異応力場の強さの解析結果を $G_I / G_M$ を変化させて示す。図7は、介在物が表面にある場合の境界端部Bでの応力拡大係数 $F_\sigma(B)$ を、板状接合試験片の境界端部Oでの応力拡大係数 $F_\sigma(O)$ で除した値を示す。 $F_\sigma(B) / F_\sigma(O)$ の値は、 $l_y / l_x$ の増加に伴って

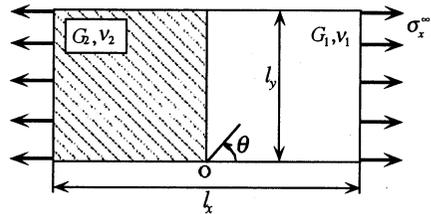


Fig.5 Bonded strip

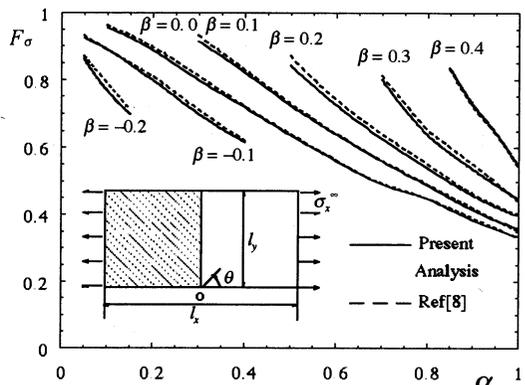


Fig.6  $F_\sigma$  at the corner O for tension  $\sigma_\theta|_{\theta=90^\circ} = \frac{F_\sigma}{(r/l_y)^{1-\lambda}}$

減少するが、 $l_y/l_x \rightarrow \infty$  で一定となる傾向が認められる。 $G_I/G_M$  が大きいほど、 $F_\sigma(B)/F_\sigma(O)$  の値は小さくなっており、介在物の形状比による影響に比べ、剛性比による影響の方が大きい。

4.4 表面に存在する強化繊維の引抜き 一般

に炭素繊維強化材料で  $G_I/G_M=61 \sim 118$  程度、ガラス繊維強化材料では  $G_I/G_M=24 \sim 84$  程度であることを考慮して<sup>(3)</sup>、ここでは  $G_I/G_M=10, 60, 100$  の場合を解析した。表5、図8では長方形介在物端部Bの  $F_\sigma(B)$  の結果を、引抜力の位置を変化させて図示したものである。

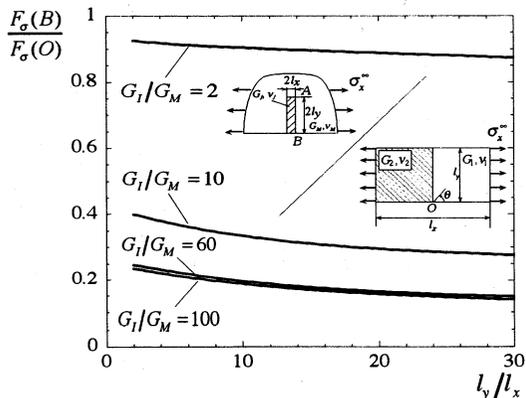


Fig.7 Ratio of  $F_\sigma$  at B to  $F_\sigma$  at O ( plane strain,  $v_M = v_I = 0.3$ )

Table 5  $F_\sigma(B)$  for a rectangular inclusion when  $l_y/l_x=10$  under double pull-out forces (plane strain)

$G_I/G_M$	$F_\sigma(B)$		
	10	60	100
0	0.202	0.176	0.173
1/4	0.217	0.190	0.187
1/3	0.230	0.203	0.200
1/2	0.273	0.246	0.243
2/3	0.356	0.338	0.335

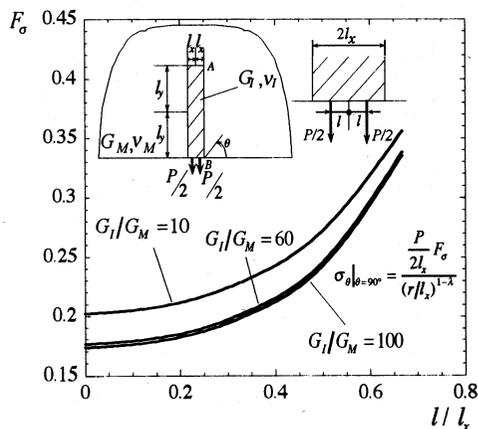
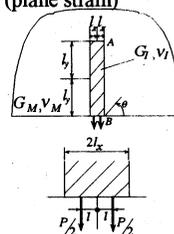
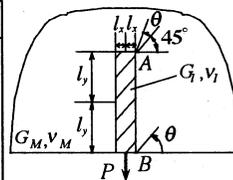


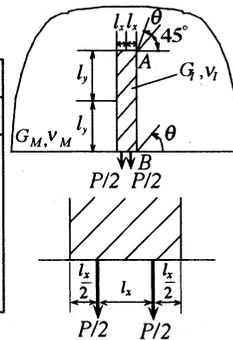
Fig.8 Stress intensity factor  $F_\sigma(B)$  for a rectangular inclusion under double pull out forces when  $l_y/l_x=10$  (plane strain)

Table 6  $F_{\sigma,I}(A)$ ,  $F_{\sigma,II}(A)$ , and  $F_\sigma(B)$  for a rectangular inclusion (a)under a single pull-out force (b)under double pull-out forces (plane strain)

$G_I/G_M$	$F_{\sigma,I}(A)$			$F_{\sigma,II}(A)$			$F_\sigma(B)$		
	10	60	100	10	60	100	10	60	100
2	0.0284	0.0182	0.0171	0.0363	0.0202	0.0189	0.191	0.170	0.168
4	0.0027	0.0018	0.0022	0.0050	0.0007	0.0011	0.202	0.176	0.173
8	0.0015	0.0002	0.0004	0.0024	0.0007	0.0002	0.202	0.176	0.173
10	0.0013	0.0001	0.0002	0.0019	0.0005	0.0001	0.202	0.176	0.173
20	0.0006	0.0001	0.0002	0.0009	0.0002	0.0002	0.204	0.178	0.175
30	0.0003	0.0001	0.0001	0.0005	0.0001	0.0002	0.205	0.178	0.175



$G_I/G_M$	$F_{\sigma,I}(A)$			$F_{\sigma,II}(A)$			$F_\sigma(B)$		
	10	60	100	10	60	100	10	60	100
2	0.0227	0.0120	0.0108	0.0291	0.0139	0.0127	0.263	0.242	0.239
4	0.0029	0.0015	0.0019	0.0050	0.0006	0.0010	0.272	0.246	0.243
8	0.0015	0.0002	0.0004	0.0024	0.0001	0.0002	0.272	0.246	0.243
10	0.0013	0.0001	0.0002	0.0019	0.0001	0.0001	0.273	0.246	0.243
20	0.0006	0.0001	0.0002	0.0010	0.0001	0.0001	0.273	0.246	0.243
30	0.0003	0.0001	0.0002	0.0005	0.0002	0.0002	0.273	0.246	0.243



引抜き力が端部 **B** に近づくにつれて  $F_{\sigma}$  の値が増加する。解析した  $0 \leq l/l_x \leq 2/3$  の範囲で  $F_{\sigma}$  は 1.9 倍程度まで変化する。以下では長方形介在物で  $l=0$  (single force) と  $l=l_x/2$  (double force) の結果を示す。また円柱形介在物では  $l=0$  の結果を示す。表 6 に長方形介在物が引抜き力  $P$  を受ける場合に、形状比  $l_y/l_x=2, 4, 8, 10, 20, 30$  の場合の介在物角部 **A**, **B** での  $F_{\sigma,I}(A)$ ,  $F_{\sigma,II}(A)$ ,  $F_{\sigma}(B)$  の値を示す。図 9(a), (b), (c) は、長方形介在物の  $F_{\sigma,I}(A)$ ,

$F_{\sigma,II}(A)$ ,  $F_{\sigma}(B)$  の結果を図示したものである。角部 **A** では引抜き方法の影響は小さく、角部 **B** では、引張り方法の影響が 3 割～4 割程度認められる。

表 7, 図 10(a), (b), (c) に、円柱形介在物が引抜き力  $P$  を受ける場合の結果を示す。図 9(a), (b) と図 10(a), (b) から、長方形、円柱形介在物の両者で、繊維のアスペクト比の増加とともに、角部 **A** での応力拡大係数  $F_{\sigma,I}$ ,  $F_{\sigma,II}$  の値は減少し 0 に近づく傾向が認められる。一方、図 9(c) と図 10(c) より繊維のアスペクト比の増加とともに角部 **B** での応力拡大係数  $F_{\sigma}$  は、それぞれの  $G_I/G_M$  の値に対して  $l_y/l_x=10$  程度で、ほぼ一定値となることわかる。

5. 結 言

本研究では、繊維引抜きの初期において剥離の原因となる、繊維と母材の端部および表面に生じる特異応力場を、体積力法を用いて正確に解析し考察した。解析では、境界をいくつかの基本区間に分割し、それぞれの基本区間で体積力密度 (未知関数) を基本密度関数と級数の積で近似する離散化手法を用いた。得られる結果を図表にまとめたほか、結論をまとめると以下のようになる。

(1) 繊維が引抜き力を受ける場合、長方形介在物、円柱形

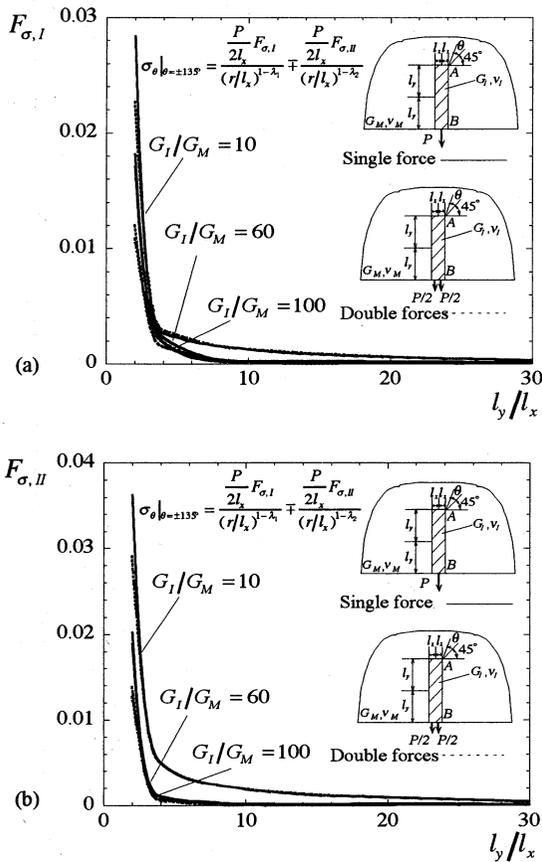
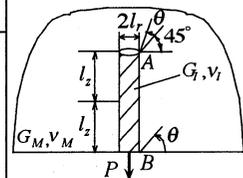


Fig. 9 Stress intensity factors (a)  $F_{\sigma,I}(A)$ , (b)  $F_{\sigma,II}(A)$ , and (c)  $F_{\sigma}(B)$  for a rectangular inclusion under pull out force

Table 7  $F_{\sigma,I}(A)$ ,  $F_{\sigma,II}(A)$ , and  $F_{\sigma}(B)$  for a cylindrical inclusion under pull-out force

$l_y/l_x$	$F_{\sigma,I}(A)$			$F_{\sigma,II}(A)$			$F_{\sigma}(B)$		
	10	60	100	10	60	100	10	60	100
2	0.486	3.109	5.210	0.943	4.601	7.414	1.473	7.736	12.65
4	0.220	1.851	3.191	0.452	2.802	4.634	1.222	5.129	8.084
8	0.070	0.943	1.737	0.151	1.449	2.551	1.154	3.774	5.509
10	0.044	0.723	1.379	0.098	1.115	2.031	1.154	3.558	5.042
20	0.009	0.246	0.554	0.021	0.384	0.823	1.182	3.295	4.325
30	0.003	0.101	0.257	0.008	0.159	0.384	1.183	3.207	4.112



介在物とともに、繊維のアスペクト比の増加とともに角部 **A** での応力拡大係数  $F_{\sigma,I}$ ,  $F_{\sigma,II}$  の値は減少し 0 に近づく傾向が認められる。

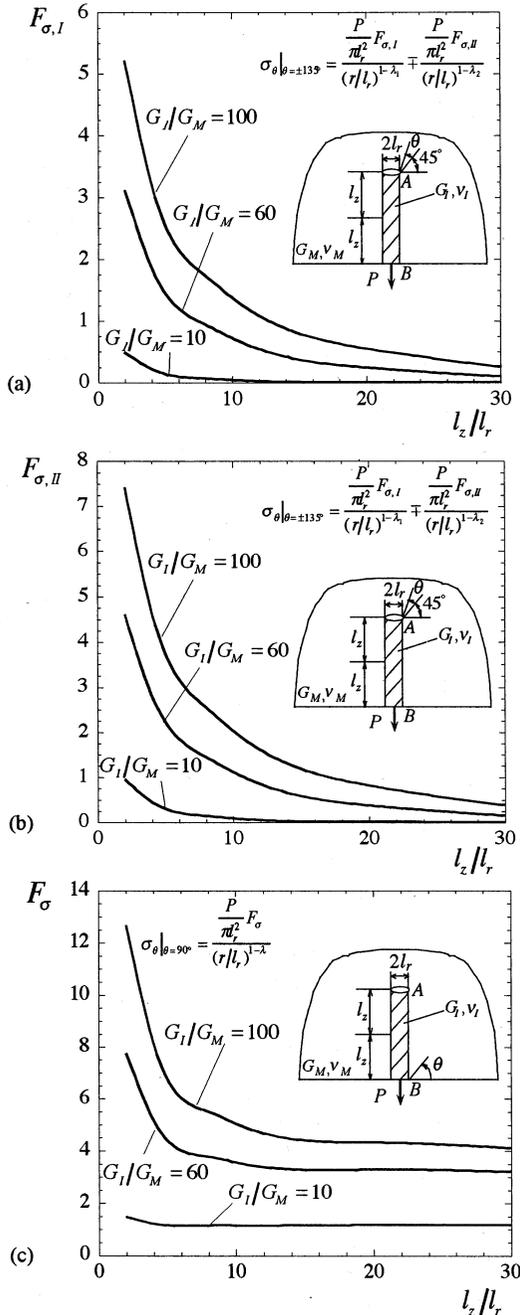


Fig.10 Stress intensity factors (a)  $F_{\sigma,I}(A)$ , (b)  $F_{\sigma,II}(A)$ , and (c)  $F_{\sigma}(B)$  for a cylindrical inclusion under pull out force

(2) 繊維のアスペクト比の増加とともに角部 **B** での応力拡大係数  $F_{\sigma}$  は、それぞれの  $G_I/G_M$  の値に対しては  $l_y/l_x=10$  程度でほぼ一定値となる (図9, 図10)。長方形介在物の引抜きで、引抜力の位置を接合端部に近づけると、調べた範囲 ( $0 \leq l/l_x \leq 2/3$ ) で  $F_{\sigma}$  は 1.9 倍程度まで増加する (図8)。

(3) 繊維が横方向の引張を受ける場合、長方形介在物の端部 **B** と板状接合試験片の境界端部 **O** との応力拡大係数の比  $F_{\sigma}(B)/F_{\sigma}(O)$  は、繊維のアスペクト比  $l_y/l_x$  の増加に伴って減少するが、 $l_y/l_x \rightarrow \infty$  で一定となる傾向が認められる。  $G_I/G_M$  が大きいほど、  $F_{\sigma}(B)/F_{\sigma}(O)$  の値は小さくなっており、剛性比による影響に比べ、介在物の形状比による影響の方が小さい (図7)。また、板状接合試験片の文献<sup>(6)</sup>からの読取値は本解析結果と誤差3%以内で一致する。

## 文 献

- (1) Nisitani, H. et al., Fatigue Process in Short Carbon-Fiber-Reinforced Thermoplastics, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.56, No.525 (1990), pp.1044-1050. (in Japanese).
- (2) Noguchi, H. et al., Torsional Fatigue Process in Short Carbon-Fiber Reinforced Polyamid 6.6 (Comparison with Fatigue Process of Rotating Bending), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.58, No.553 (1992), pp.1555-1560. (in Japanese).
- (3) Noda, N.A. and Takase, Y., Intensity of Singular Stress at the Fiber End in a Hexagonal Array of Fibers, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.42, No.16-17 (2005-8), pp.4890-4908.
- (4) Zhang, X. et al., Effects of Fibre Debonding and Sliding on the Fracture Behaviour of Fibre-Reinforced Composites, *Composites, Series A*, Vol.35 (2004), pp.1313-1323.
- (5) Povirk, G.L. and Needleman, A., Finite Element Simulations of Fiber Pull-Out, *Transactions of the ASME*, Vol.115 (1993), pp.286-291.
- (6) Budiansky, B. et al., Fibre-Matrix Debonding Effects on Racking in Aligned Fibre Ceramics Composites, *International Journal Solids and Structures*, Vol.32 (1995), pp.315-328.
- (7) Chen, D.H. and Nisitani, H., Analysis of Intensity of Singular Stress Field at Fiber End (2nd Report, Results of Calculation), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.58, No.555 (1992-11), pp.143-148. (in Japanese).
- (8) Chen, D.H. and Nisitani, H., Intensity of Singular Stress Field near the Interface Edge Point of a Bonded Strip, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol.59, No.567 (1993-11), pp.210-214. (in Japanese).
- (9) Noda, N.A. and Moriyama, Y., Stress Concentration of an Ellipsoidal Inclusion of Revolution in a Semi-Infinite Body, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.74 (2004-1), pp.29-44.
- (10) Noda, N.A. et al., Singular Integral Equation Method in the Analysis of Interaction between Rectangular Inclusions, *JSME International Journal, Series A*, Vol.41, No.3 (1998-7), pp.303-308.