

異種接合半無限体中の三次元界面き裂の
応力拡大係数について*野田尚昭*¹, 徐春暉*², 高瀬康*¹Stress Intensity Factor for a Planar Interfacial Crack
in Three Dimensional BimaterialsNao-Aki NODA*³, Chunhui XU and Yasushi TAKASE*³ Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper, stress intensity factor for a three dimensional planar interfacial crack is considered on the idea of the body force method. The formulation leads to a system of singular integral equation, whose unknowns are three types of crack opening displacements. The unknown body force densities are approximated by the products of the fundamental density functions and power series; here, the fundamental density functions are chosen to express singular stress fields due to a two-dimensional interface crack exactly. The calculation shows that the present method gives rapidly converging numerical solutions. It is found that the stress intensity factors K_I and K_{II} are determined by bimaterials constant ϵ alone, independent of elastic modulus ratio and Poisson's ratio.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Interface Crack, Fracture Mechanics, Composite Material, Singular Integral Equation

1. 緒 言

近年、複合材料とみなしうる新しい材料が機能性材料の集合体である電子製品などに広く用いられている。これらの複合材料には多数の界面が存在する。界面を有する部材の破壊は、接合面の不良接着部やはく離を起点として生じた界面き裂の伝ばに支配されることが多い。このため、異種材料接合界面の強度の正確な評価が重要となっている。二次元界面き裂に関しては Salganik の解析⁽¹⁾をはじめとして多くの解析⁽²⁾⁻⁽⁹⁾がなされている。しかし、三次元界面き裂に関しては円形界面き裂⁽¹⁰⁾⁻⁽¹⁵⁾やだ円形界面き裂⁽¹⁶⁾や有限体中のき裂⁽¹⁷⁾などいくつかの解析はなされているものの、その多くは特定の材料の組合せに対する数値計算である場合がほとんどであり、任意の材料の組合せに対して応力拡大係数が閉じた形で与えられているものは円形界面き裂⁽¹⁷⁾と深い環状界面き裂⁽¹⁸⁾に関するもののみである。

著者ら⁽¹⁹⁾は、異種材料接合界面に接する軸対称リング状き裂がねじりと引張りを受ける問題を、体積法の特異積分方程式で表現し解析を行っている。また、体積法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式で近似する方法を用いて⁽¹⁹⁾⁻⁽²²⁾、均質材中の三次元き裂先端の精度の高い滑らかな応力拡大係数の分布を求めたが、接合面界面上に存在する一般的三次元き裂の問題はこれまで取扱っていない。

三次元界面き裂問題を特異積分方程式として表現することは、陳・野田・湯ら⁽²³⁾によって行われているが、一般に界面き裂の問題では変位の振動現象と応力の振動特異性とその厳密な解析を困難にしている。そこで、本研究では、その特異積分方程式を厳密に解析する方法を考察するため、まず長方形き裂問題について応力拡大係数の解析を行う。解析方法としては、体積法の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いる。本解析法は、界面き裂先端近傍で生じる変位の振動現象を厳密に評価した解析が可能であり、応力拡大係数が連立方程式の解から直接決定されるという特徴をもっている。

* 原稿受付 2006年8月21日。

*¹ 正員、九州工業大学工学部 (〒804-0850 北九州市戸畑区仙水町1-1)。*² China Agricultural University (Beijing 100083 P. R. China) [現：九州工業大学工学部]。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

2. 異種材料接合界面三次元き裂の特異積分方程式

図1(a)に示すような異種接合界面上に存在する三次元き裂問題については、陳・野田・湯⁽²³⁾によって体積法の特異積分方程式が示されている。これらの特異積分方程式は、変位食違い $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$ を未知関数としている。ここで、 $(x, y, z), (\xi, \eta, \zeta)$ はそれぞれ注目点および着力点の座標である。以下で p_x, p_y, p_z は遠方での応力 $\tau_{yz}^\infty, \tau_{zx}^\infty, \sigma_z^\infty$ であり、 μ_1, μ_2 は上下材料の横弾性係数、 ν_1, ν_2 はポアソン比である。

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial \Delta u_x(x, y)}{\partial x} + \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \\ & \times \int_s \frac{1}{r^3} \Delta u_x(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \\ & \times \int_s \frac{(x - \xi)^2}{r^5} \Delta u_x(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) \\ & + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \int_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \\ & \times \Delta u_y(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) = -p_x(x, y), x, y \in S \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial \Delta u_z(x, y)}{\partial y} + \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \\ & \times \int_s \frac{1}{r^3} \Delta u_y(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \\ & \times \int_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \Delta u_x(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) \\ & + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \int_s \frac{(y - \eta)^2}{r^5} \\ & \times \Delta u_y(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) = -p_y(x, y), x, y \in S \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1 \cdot b)$$

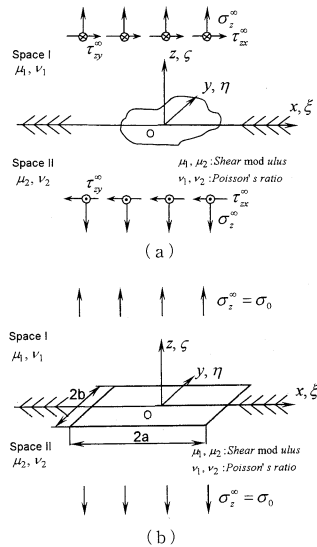


Fig.1 Problem configuration

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) \left[\frac{\partial \Delta u_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_y(x, y)}{\partial y} \right] \\ & + \mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\pi} \int_s \frac{1}{r^3} \Delta u_z(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) \\ & = -p_z(x, y), x, y \in S \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1 \cdot c)$$

$$\begin{aligned} & (x, y) \in S (S = \{(x, y) | |x| \leq a, |y| \leq b\}) \\ & \Lambda = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \Lambda_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}, \Lambda_2 = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1}, \\ & \kappa_1 = 3 - 4\nu_1, \kappa_2 = 3 - 4\nu_2, r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1 \cdot d)$$

$$\begin{aligned} & \Delta u_i(x, y) = u_i(x, y, 0^+) - u_i(x, y, 0^-), \\ & (i = x, y, z) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1 \cdot e)$$

ここで、 $\Delta u_i(x, y)$ は i 方向のき裂上下面の変位差であり、記号 \int は発散積分の有限部分を表す。

3. 解析方法

体積法によってき裂問題を解析する場合、体積力対の密度が未知関数となるが、その際、無限板中の一つのき裂が存在する場合を表現する厳密な密度関数を使用し、体積力の密度を精度よく求める。この観点から、二次元界面き裂の解を考慮する。図2に示すような接合無限板中長さ $2a$ の界面き裂の縁に一樣垂直応力 σ_0 とせん断応力 τ_0 とが作用する問題は Rice-Sih⁽⁴⁾ によって解析されており、界面き裂のない接合無限板に分布すべき x, y 方向の体積力対密度 $w_x(\xi), w_y(\xi), w_z(\xi)$ とき裂開口変位 $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} & \text{図2(a)について,} \\ & \Delta u_z + i\Delta u_x = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{\kappa_i - 1}{\mu_i(1 + \kappa_i)} w_x(\xi) + i \frac{1}{\mu_i} w_y(\xi) \right] \\ & \times (\sigma_0 + i\tau_0) = \sum_{i=1}^2 \frac{1 + \kappa_i}{4\mu_i \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right)^{i\varepsilon} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

図2(b)について

$$\Delta u_y = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\mu_i} w_y(\xi) \tau_0 = \sum_{i=1}^2 \frac{1 + \kappa_i}{4} \sqrt{c^2 - \xi^2} \tau_0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

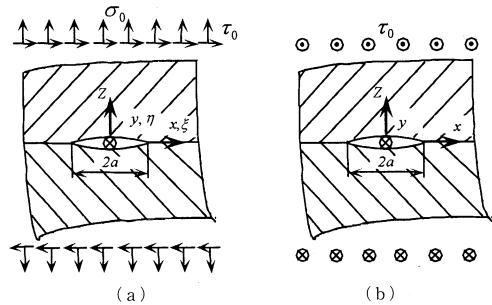


Fig.2 Fundamental densities for two dimensional problems

ここに, σ_0, τ_0 は遠方の引張応力とせん断応力, ε と κ は次式で定義される.

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right) \\ \kappa_l = 3 - 4\nu_l \quad (\text{平面ひずみ}) \quad \dots\dots\dots (4)$$

二次元界面き裂の解 (2), (3) を考慮して, 本論文ではまず, 図 1(b) のような長方形界面き裂の問題を取り上げる. そして, その場合式 (1) の解を以下のように表現する.

$$\Delta u_i(\xi, \eta) = w_i(\xi, \eta) F_i(\xi, \eta), \quad i = x, y, z \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに $w_i(\xi, \eta)$ は次式で定義される.

$$w_x(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \\ \times \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right], \quad \dots\dots\dots (6 \cdot a)$$

$$w_y(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \\ \times \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right], \quad \dots\dots\dots (6 \cdot b)$$

$$w_z(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \\ \times \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right] \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right] \\ \dots\dots\dots (6 \cdot c)$$

ここで重み関数, $F_x(\xi, \eta)$, $F_y(\xi, \eta)$, $F_z(\xi, \eta)$ は連続性を考慮した多項式を用いる. 具体的には, ξ, η について m, n 次までの以下のような表現を用いる.

$$F_x(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \eta + \dots + \alpha_{n-1} \eta^{(n-1)} + \alpha_n \eta^n \\ + \alpha_{n+1} \xi + \alpha_{n+2} \xi \eta + \dots + \alpha_{2n} \xi^n \eta^n + \dots \\ + \alpha_{l-n-1} \xi^m + \alpha_{l-n} \xi^m \eta + \dots + \alpha_{l-1} \xi^m \eta^n \\ = \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i G_i(\xi, \eta), \quad \dots\dots\dots (7 \cdot a)$$

$$F_y(\xi, \eta) = \beta_0 + \beta_1 \eta + \dots + \beta_{n-1} \eta^{(n-1)} + \beta_n \eta^n \\ + \beta_{n+1} \xi + \beta_{n+2} \xi \eta + \dots + \beta_{2n} \xi^n \eta^n + \dots \\ + \beta_{l-n-1} \xi^m + \beta_{l-n} \xi^m \eta + \dots + \beta_{l-1} \xi^m \eta^n \\ = \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i G_i(\xi, \eta), \quad \dots\dots\dots (7 \cdot b)$$

$$F_z(\xi, \eta) = \gamma_0 + \gamma_1 \eta + \dots + \gamma_{n-1} \eta^{(n-1)} + \gamma_n \eta^n \\ + \gamma_{n+1} \xi + \gamma_{n+2} \xi \eta + \dots + \gamma_{2n} \xi^n \eta^n + \dots \\ + \gamma_{l-n-1} \xi^m + \gamma_{l-n} \xi^m \eta + \dots + \gamma_{l-1} \xi^m \eta^n \\ = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i G_i(\xi, \eta), \quad \dots\dots\dots (7 \cdot c)$$

ここで,

$$l = (n+1)(m+1), \\ G_0(\xi, \eta) = 1, \quad G_1(\xi, \eta) = \eta, \dots, \\ G_{n+1}(\xi, \eta) = \xi, \dots, \quad G_{l-1}(\xi, \eta) = \xi^m \eta^n.$$

式 (5) ~ (7) を式 (1) に代入することによって式 (8)

が得られる. すなわち, 問題は式 (7) で示される多項式 $F_x(\xi, \eta)$, $F_y(\xi, \eta)$, $F_z(\xi, \eta)$ の $3l$ 個の係数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ を未知数とする連立一次方程式 (8) を解くことに帰する.

$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i (f_{x1}^1 + f_{x1}^2) + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i f_{y1} + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i f_{z1} = 0, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot a)$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i f_{x2} + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i (f_{y2}^1 + f_{y2}^2) + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i f_{z2} = 0, \quad \dots\dots\dots (8 \cdot b)$$

$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i f_{x3} + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i f_{y3} + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i f_{z3} = -1. \quad \dots\dots\dots (8 \cdot c)$$

ここで

$$f_{z1} = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial}{\partial x} w_z(x, y) G_l(x, y) \\ = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \times \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \times x^{-1+m} y^n \sqrt{b^2 - y^2} \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b-y}{b+y} \right) \right] \\ \times \left\{ [a^2 m - (1+m)x^2] \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \right. \\ \left. + 2a\varepsilon x \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \right\}, \quad \dots\dots\dots (9 \cdot a)$$

$$f_{z2} = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial}{\partial y} w_z(x, y) G_l(x, y) \\ = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \times \frac{1}{\sqrt{b^2 - y^2}} \\ \times y^{-1+n} x^m \sqrt{a^2 - x^2} \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \\ \times \left\{ [b^2 n - (1+n)y^2] \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b-y}{b+y} \right) \right] \right. \\ \left. + 2b\varepsilon y \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b-y}{b+y} \right) \right] \right\}, \quad \dots\dots\dots (9 \cdot b)$$

$$f_{x3} = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial}{\partial x} w_x(x, y) G_l(x, y) \\ = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \times \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \times x^{-1+m} y^n \sqrt{b^2 - y^2} \\ \times \left\{ [a^2 m - (1+m)x^2] \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \right. \\ \left. - 2a\varepsilon x \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \right\}, \quad \dots\dots\dots (9 \cdot c)$$

$$f_{y3} = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial}{\partial y} w_y(x, y) G_l(x, y) \\ = \mu_1 (\Lambda_2 - \Lambda_1) \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \times \frac{1}{\sqrt{b^2 - y^2}} \\ \times y^{-1+n} x^m \sqrt{a^2 - x^2} \\ \times \left\{ [b^2 n - (1+n)y^2] \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b-y}{b+y} \right) \right] \right. \\ \left. - 2b\varepsilon y \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b-y}{b+y} \right) \right] \right\}, \quad \dots\dots\dots (9 \cdot d)$$

$$f_{x1}^1 = \mu_1 \frac{2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2}{2\pi} \\ \times \int_s^1 \frac{1}{r^3} w_x(\xi, \eta) G_l(\xi, \eta) ds(\xi, \eta), \quad \dots\dots\dots (9 \cdot e)$$

$$f_{x1}^2 = 3\mu_1 \frac{A_1 + A_2 - A}{2\pi} \times \int_s \frac{(x - \xi)^2}{r^5} w_x(\xi, \eta) G_i(\xi, \eta) ds(\xi, \eta), \dots\dots\dots (9 \cdot f)$$

$$f_{y1} = 3\mu_1 \frac{A_1 + A_2 - A}{2\pi} \times \int_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} w_y(\xi, \eta) G_i(\xi, \eta) ds(\xi, \eta), \dots\dots\dots (9 \cdot g)$$

$$f_{y2}^1 = \mu_1 \frac{2A - A_1 - A_2}{2\pi} \times \int_s \frac{1}{r^3} w_y(\xi, \eta) G_i(\xi, \eta) ds(\xi, \eta), \dots\dots (9 \cdot h)$$

$$f_{x2} = 3\mu_1 \frac{A_1 + A_2 - A}{2\pi} \times \int_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} w_x(\xi, \eta) G_i(\xi, \eta) ds(\xi, \eta), \dots\dots\dots (9 \cdot i)$$

$$f_{y2}^2 = 3\mu_1 \frac{A_1 + A_2 - A}{2\pi} \times \int_s \frac{(y - \eta)^2}{r^5} w_y(\xi, \eta) G_i(\xi, \eta) ds(\xi, \eta), \dots\dots\dots (9 \cdot j)$$

$$f_{z3} = \mu_1 \frac{A_1 + A_2}{2\pi} \int_s \frac{1}{r^3} w_z(\xi, \eta) G_i(\xi, \eta) ds(\xi, \eta). \dots\dots\dots (9 \cdot k)$$

4. 特異積分の処理方法について

式(9・e)～(9・k)の積分を実行するとき、注目点(x, y)と着力点(ξ, η)が一致するとき、特異性を有するので、特別に評価する必要があるので、

図3に示す注目点(x, y)を原点とする極座標(r, θ)を用いて、被積分関数の構成要素を以下のように展開する。ここで、ξ - x = r cos θ, η - y = r sin θの関係がある。

$$\sqrt{a^2 - \xi^2} = P_0(x) - (\xi - x)P_1(x) - (\xi - x)^2 P_2(\xi, x), \dots\dots\dots (10 \cdot a)$$

$$\sqrt{b^2 - \eta^2} = Q_0(y) - (\eta - y)Q_1(y) - (\eta - y)^2 Q_2(\eta, y), \dots\dots\dots (10 \cdot b)$$

ここで、

$$P_0(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad Q_0(y) = \sqrt{b^2 - y^2},$$

$$P_1(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad Q_1(y) = \frac{y}{\sqrt{b^2 - y^2}},$$

$$P_2(\xi, x) = \frac{\xi + x}{\sqrt{a^2 - x^2}(\sqrt{a^2 - \xi^2} + \sqrt{a^2 - x^2})} \times \frac{a^2}{(\xi\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{a^2 - \xi^2})},$$

$$Q_2(\eta, y) = \frac{\eta + y}{\sqrt{b^2 - y^2}(\sqrt{b^2 - \eta^2} + \sqrt{b^2 - y^2})}$$

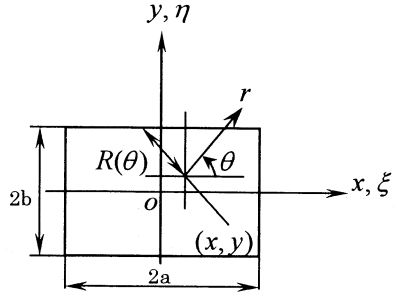


Fig. 3 Integral parameters

$$\times \frac{b^2}{(\eta\sqrt{b^2 - y^2} + y\sqrt{b^2 - \eta^2})},$$

$$\xi^m = x^m + mx^{m-1}(\xi - x) + \sum_{i=0}^{m-2} [(i+1)\xi^{(m-2-i)}x^i] \times (\xi - x)^2 = b_0(x) + b_1(x)(\xi - x) + b_2(\xi, x)(\xi - x)^2, \dots\dots\dots (10 \cdot c)$$

$$\eta^n = x^n + nx^{n-1}(\eta - y) + \sum_{i=0}^{n-2} [(i+1)\eta^{(n-2-i)}y^i] \times (\eta - y)^2 = c_0(y) + c_1(y)(\eta - y) + c_2(\eta, y)(\eta - y)^2, \dots\dots\dots (10 \cdot d)$$

$$FC_{11} = \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right] = R_{01}(x) + R_{11}(x)(\xi - x) + R_{21}(x)(\xi - x)^2, \dots\dots\dots (10 \cdot e)$$

$$FS_{11} = \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right] = R_{02}(x) + R_{12}(x)(\xi - x) + R_{22}(x)(\xi - x)^2, \dots\dots\dots (10 \cdot f)$$

$$FC_{21} = \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right] = T_{01}(y) + T_{11}(y)(\eta - y) + T_{21}(y)(\eta - y)^2, \dots\dots\dots (10 \cdot g)$$

$$FS_{21} = \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right] = T_{02}(y) + T_{12}(y)(\eta - y) + T_{22}(y)(\eta - y)^2, \dots\dots\dots (10 \cdot h)$$

ここで

$$R_{01} = \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a - x}{a + x} \right) \right], \quad R_{02} = \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a - x}{a + x} \right) \right],$$

$$T_{01} = \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b - y}{b + y} \right) \right], \quad T_{02} = \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{b - y}{b + y} \right) \right],$$

$$R_{11}(x) = \frac{2a\varepsilon}{a^2 - x^2} R_{02}, \quad R_{12}(x) = -\frac{2a\varepsilon}{a^2 - x^2} R_{01},$$

$$T_{11}(y) = \frac{2b\varepsilon}{b^2 - y^2} T_{02}, \quad T_{12}(y) = -\frac{2b\varepsilon}{b^2 - y^2} T_{01},$$

$$T_{22}(y) = \begin{cases} \frac{1}{(\eta-y)^2} [FS_{21} - T_{02}(y) - T_{12}(y)(\eta-y)] & |y-\eta| \neq \varepsilon_0 \\ \frac{2b\varepsilon y}{(b^2-y^2)^2} T_{01} - \frac{2b^2\varepsilon^2}{(b^2-y^2)^2} T_{02} |y-\eta| = \varepsilon_0, \end{cases} = \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{D_0(x, y)}{R(\theta)} + D_1(x, y, \theta) \ln[R(\theta)] \right\} d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} D_2(x, y, r, \theta) dr d\theta. \quad \dots\dots(11)$$

ここで、 $R(\theta)$ は図3に示すように、注目点 (x, y) とき裂縁との距離を表す。また、式(11)の $D_0(x, y)$ 、 $D_1(x, y, \theta)$ 、 $D_2(x, y, r, \theta)$ は式(10)に含まれる $P_0(x)$ 、 $Q_0(y)$ などの組合せによって表現できる。このようにして、 $I_{mn}(x, y)$ は特異性のない線積分として、通常の数値積分によって、求めることができる。

5. 解析結果および考察

5.1 無次元化応力拡大係数の定義 以下では次式で定義される無次元化応力拡大係数 F_I 、 F_{II} を用いて、結果を示す。これは、長さ $2b$ の二次元界面き裂の応力拡大係数と比較することに相当する。

$$F_I + iF_{II} = \frac{K_I(x, y)|_{x=x, y=\pm b} + iK_{II}(x, y)|_{x=x, y=\pm b}}{\sigma_0^2 \sqrt{\pi b}} = \sqrt{a^2 - x^2} \times \left\{ \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \times F_z(x, y)|_{x=x, y=\pm b} + 2i\varepsilon F_y(x, y)|_{x=x, y=\pm b} \right\}, \quad \dots\dots(12\cdot a)$$

$$F_{III} = \frac{K_{III}(x, y)|_{x=x, y=\pm b}}{\sigma_0^2 \sqrt{\pi b}} = \sum_{i=1}^2 \frac{1 + \kappa_i}{4\mu_i \cosh \pi\varepsilon} \times \frac{1}{(1/\mu_1 + 1/\mu_2)} \sqrt{a^2 - x^2} \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \times F_x(x, y)|_{x=x, y=\pm b}. \quad \dots\dots(12\cdot b)$$

5.2 解の収束性 表1~3に $a/b=1$ 、 $\varepsilon=0.02$ ($\mu_2/\mu_1=1.5628$ 、 $\nu_1=0.3$ 、 $\nu_2=0.3$)とした場合の解の

$$T_{21}(y) = \begin{cases} \frac{1}{(\eta-y)^2} [FC_{21} - T_{01}(y) - T_{11}(y)(\eta-y)] & |y-\eta| \neq \varepsilon_0 \\ \frac{2b\varepsilon y}{(b^2-y^2)^2} T_{02} - \frac{2b^2\varepsilon^2}{(b^2-y^2)^2} T_{01} |y-\eta| = \varepsilon_0, \end{cases}$$

$$R_{21}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\xi-x)^2} [FC_{11} - R_{01}(x) - R_{11}(x)(\xi-x)] & |x-\xi| \neq \varepsilon_0 \\ \frac{2a\varepsilon x}{(a^2-x^2)^2} R_{02} - \frac{2a^2\varepsilon^2}{(a^2-x^2)^2} R_{01} |x-\xi| = \varepsilon_0, \end{cases}$$

$$R_{22}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\xi-x)^2} [FS_{11} - R_{02}(x) - R_{12}(x)(\xi-x)] & |x-\xi| \neq \varepsilon_0 \\ \frac{2a\varepsilon x}{(a^2-x^2)^2} R_{01} - \frac{2a^2\varepsilon^2}{(a^2-x^2)^2} R_{02} |x-\xi| = \varepsilon_0. \end{cases}$$

ここで、実際の数値計算では、 $\varepsilon_0=10^{-10}$ とした。式(10)の表現を用いれば、式(9・e)~(9・k)に含まれる発散積分の有限部分をとることによって、以下のように評価できる。

$$I_{mn}(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \left[\frac{D_0(x, y)}{r^2} + \frac{D_1(\theta)}{r} \right] dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} D_2(r, \theta) dr d\theta$$

Table 1 Convergence of stress intensity factor F_I at $y=b$ for $\varepsilon=0.02$, $\mu_2/\mu_1=1.5628$, $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.3$, $a/b=1$

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
m=n=4	0.7531	0.7512	0.7457	0.7364	0.7233	0.7059	0.6828	0.6517	0.6073	0.5385	0.4177
m=n=6	0.7524	0.7507	0.7456	0.7367	0.7237	0.7060	0.6826	0.6519	0.6098	0.5465	0.4329
m=n=8	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400

Table 2 Convergence of stress intensity factor F_{II} at $y=b$ for $\varepsilon=0.02$, $\mu_2/\mu_1=1.5628$, $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.3$, $a/b=1$

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
m=n=4	0.0272	0.0271	0.0268	0.0264	0.0257	0.0248	0.0236	0.0221	0.0200	0.0171	0.0127
m=n=6	0.0273	0.0272	0.0270	0.0265	0.0259	0.0250	0.0238	0.0223	0.0203	0.0174	0.0131
m=n=8	0.0274	0.0273	0.0271	0.0266	0.0260	0.0251	0.0239	0.0224	0.0203	0.0176	0.0133

Table 3 Convergence of stress intensity factor F_{III} at $y=b$ for $\varepsilon=0.02$, $\mu_2/\mu_1=1.5628$, $\nu_1=0.3$, $\nu_2=0.3$, $a/b=1$

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
m=n=4	0	0.0010	0.0021	0.0031	0.0042	0.0053	0.0065	0.0079	0.0094	0.0109	0.0120
m=n=6	0	0.0010	0.0020	0.0031	0.0041	0.0052	0.0064	0.0076	0.0091	0.0106	0.0120
m=n=8	0	0.0010	0.0020	0.0031	0.0041	0.0051	0.0063	0.0075	0.0089	0.0105	0.0120

Table 4 Stress intensity factor F_I at $y=b$ for $a/b=1, \epsilon=0.02$

ν_1	ν_2	μ_2 / μ_1	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
0	0	1.2870	0.7528	0.7511	0.7459	0.7370	0.7238	0.7059	0.6822	0.6513	0.6099	0.5490	0.4400
0	0.1	1.0439	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7059	0.6822	0.6513	0.6099	0.5490	0.4400
0	0.2	0.8009	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6513	0.6099	0.5490	0.4400
0	0.3	0.5578	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0	0.4	0.3148	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0	0.5	0.0718	0.7527	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.1	0.1	1.3288	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7059	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.1	0.2	1.0194	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.1	0.3	0.7101	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.1	0.4	0.4007	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.1	0.5	0.0913	0.7527	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.2	0.2	1.4019	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.2	0.3	0.9765	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.2	0.4	0.5510	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.2	0.5	0.1256	0.7527	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.3	0.3	1.5628	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.3	0.4	0.8819	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.3	0.5	0.2010	0.7527	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.4	0.4	2.2076	0.7527	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.4	0.5	0.5032	0.7527	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
0.45	0.5	2.0257	0.7527	0.7511	0.7459	0.7369	0.7328	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400

Table 5 Stress intensity factor F_{II} at $y=b$ for $a/b=1, \epsilon=0.02$

ν_1	ν_2	μ_2 / μ_1	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
0	0	1.2870	0.0278	0.0277	0.0274	0.0269	0.0262	0.0253	0.0241	0.0224	0.0202	0.0171	0.0122
0	0.1	1.0439	0.0277	0.0277	0.0274	0.0269	0.0262	0.0253	0.0241	0.0224	0.0203	0.0172	0.0124
0	0.2	0.8009	0.0277	0.0276	0.0273	0.0268	0.0262	0.0252	0.0240	0.0224	0.0203	0.0173	0.0126
0	0.3	0.5578	0.0276	0.0275	0.0272	0.0268	0.0260	0.0252	0.0240	0.0224	0.0203	0.0174	0.0129
0	0.4	0.3148	0.0274	0.0273	0.0271	0.0266	0.0260	0.0251	0.0239	0.0224	0.0204	0.0176	0.0134
0	0.5	0.0718	0.0271	0.0270	0.0268	0.0264	0.0258	0.0250	0.0238	0.0223	0.0204	0.0178	0.0141
0.1	0.1	1.3288	0.0277	0.0276	0.0273	0.0268	0.0262	0.0252	0.0240	0.0224	0.0203	0.0173	0.0126
0.1	0.2	1.0194	0.0276	0.0275	0.0273	0.0268	0.0261	0.0252	0.0240	0.0224	0.0203	0.0173	0.0127
0.1	0.3	0.7101	0.0275	0.0274	0.0272	0.0267	0.0261	0.0252	0.0240	0.0224	0.0203	0.0174	0.0130
0.1	0.4	0.4007	0.0274	0.0273	0.0270	0.0266	0.0260	0.0251	0.0239	0.0224	0.0204	0.0176	0.0134
0.1	0.5	0.0913	0.0271	0.0270	0.0268	0.0264	0.0258	0.0250	0.0238	0.0223	0.0204	0.0178	0.0141
0.2	0.2	1.4019	0.0275	0.0274	0.0272	0.0267	0.0261	0.0252	0.0240	0.0224	0.0203	0.0174	0.0129
0.2	0.3	0.9765	0.0275	0.0274	0.0271	0.0267	0.0260	0.0251	0.0240	0.0224	0.0204	0.0175	0.0131
0.2	0.4	0.5510	0.0273	0.0272	0.0270	0.0266	0.0260	0.0251	0.0239	0.0224	0.0204	0.0176	0.0135
0.2	0.5	0.1256	0.0271	0.0270	0.0268	0.0264	0.0258	0.0250	0.0238	0.0223	0.0203	0.0178	0.0141
0.3	0.3	1.5628	0.0274	0.0273	0.0271	0.0266	0.0260	0.0251	0.0239	0.0224	0.0204	0.0176	0.0134
0.3	0.4	0.8819	0.0273	0.0272	0.0270	0.0266	0.0259	0.0251	0.0239	0.0224	0.0204	0.0177	0.0136
0.3	0.5	0.2010	0.0271	0.0270	0.0268	0.0264	0.0258	0.0250	0.0238	0.0223	0.0204	0.0178	0.0141
0.4	0.4	2.2076	0.0272	0.0271	0.0269	0.0265	0.0259	0.0250	0.0239	0.0224	0.0204	0.0177	0.0138
0.4	0.5	0.5032	0.0271	0.0270	0.0268	0.0264	0.0258	0.0250	0.0238	0.0223	0.0204	0.0178	0.0141
0.45	0.5	2.0257	0.0271	0.0270	0.0268	0.0264	0.0258	0.0250	0.0238	0.0223	0.0204	0.0178	0.0141

Table 6 Stress intensity factor $F_{III} \times 10^{-2}$ at $y=b$ for $a/b=1, \epsilon=0.02$

ν_1	ν_2	μ_2 / μ_1	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
0.3	0.3	1.5628	0	0.1010	0.2028	0.3061	0.4115	0.5199	0.6331	0.7545	0.8913	1.051	1.204
0.0	0.5	0.0718	0	0.0869	0.1746	0.2637	0.3550	0.4500	0.5517	0.6662	0.8011	0.9592	1.099
0.0	0.0	1.2870	0	0.1204	0.2415	0.3641	0.4884	0.6141	0.7400	0.8667	1.000	1.156	1.328

収束性の例を示す。ここで、境界条件を満足させるため、残留する応力が最小となるように $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ を最小二乗法によって決定した。その際、き裂となるべき境界上のメッシュの交点での応力が最小となるようにした。表1~3に示すように、本解析結果は良好な収束性を示す。

5.3 数値解析結果の例 表4と表5に、式(7)の多項式の次数を $m=n=8$ として、求めた F_I と F_{II} の値を示す。ここで、形状比 $a/b=1$, $\varepsilon=0.02$ として、ポアソン比 ν_1, ν_2 と剛性比 μ_2/μ_1 を変化させた。他の a/b と ε についても検討した結果、表4, 5に示されるように F_I と F_{II} の値は、 a/b と ε が一定なら、 $\mu_2/\mu_1, \nu_1, \nu_2$ に依存しないことが明らかとなった。なお、表5で $x/a=10/11$ の場合には F_{II} に $\mu_2/\mu_1, \nu_1, \nu_2$ への依存性があるように見えるが、これは、表1~3に示されるように $x/a \rightarrow 1$ で収束性がやや悪く、解析精度が悪いことが原因であり、実際には ε に依存しないものと考えられる。ここで、式(8)の未知数である $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ は ε が一定でも $\mu_2/\mu_1, \nu_1, \nu_2$ に依存して変化する。しかし、その組合せによって決まる F_I, F_{II} の値はそれらに依存しない。したがって、 F_I, F_{II} が ε のみによって依存することを式(1)~(12)等から数学的に示すことは難しいようである。表6に示すように、モードIII応力拡大係数 F_{III} はコーナ部近くに生じる。その最大値は $F_{III\max} \leq 10^{-2} \times F_{I\max}, F_{III\max} \leq 0.5 \times F_{I\max}$ の範囲にあり、比較的小さい。 F_{III} が ε のみによって決まるかどうかは、現時点では明確でない。

6. 結 言

本研究では、三次元界面き裂問題の特異積分方程式の数値解析法を、長方形界面き裂を例として考察した。結論をまとめると以下ようになる。

(1) 解析方法としては、体積力法の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いた。その際、基本密度関数として、二次元界面き裂の解を有効に利用した。本解析法は、界面き裂先端近傍で生じる応力と変位の振動現象を厳密に評価した解析が可能であり、応力拡大係数が連立方程式の解から直接決定されるという特徴をもっている。本法による解析結果は良好な収束性を示す(表1~3)。

(2) 特に、三次元界面き裂の応力拡大係数 K_I, K_{II} は形状とバイマテリアル定数 ε のみによって決まることが、数値解析によって明らかとなった(表4, 5)。

(3) 長方形界面き裂の引張りでは、 K_{III} の極大値はコーナ部近くに生じる。その値は一般に小さく、 $F_{III\max} \leq 10^{-2} \times F_{I\max}, F_{III\max} \leq 0.5 \times F_{I\max}$ の範囲にあ

る(表6)。

文 献

- (1) Salganik, R. L., The Brittle Fracture of Cemented Bodies, *Prikladnaia metematika i mekhanika*, Vol. 27 (1963), pp. 957-962.
- (2) Erdogan, F., Stresses Distribution in a Non-homogeneous Elastic Plane with Crack, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30 (1963), pp. 232-236.
- (3) England, A. H., A Crack between Dissimilar Media, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32 (1965), pp. 400-402.
- (4) Rice, J. R. and Sih, G. C., Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32 (1965), pp. 418-423.
- (5) Comninou, M., The Interface Crack, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44 (1977), pp. 631-636.
- (6) Noda, N-A and Oda, K., Interaction Effect of Stress Intensity Factors for any Number of Collinear Interface Cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 84 (1997), pp. 117-128.
- (7) Willis, J. R., Fracture Mechanics of Interfacial Crack, *Journal of the Mechanics and Physics of solids*, Vol. 19 (1971), pp. 353-368.
- (8) Tucker, M. O., In Two-phase Solids under Longitudinal Shear Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 10 (1974), pp. 323-336.
- (9) England, F. and Gupta, G. D., Bonded Wedges with an Interface Crack under Anti-plane Shear Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 11 (1975), pp. 583-593.
- (10) Willis, J. R., The Penny-Shaped Crack on an Interface, *Journal of Mechanics Applied Mathematics*, Vol. 25 (1972), pp. 367-385.
- (11) Mossakovski, V. I. and Rybka, M. T., Generalization of the Griffith-Sneddon Criterion for the Case of a Non-homogeneous Body, *Prikladnaia metematika i mekhanika*, Vol. 28 (1964), pp. 1061-1069.
- (12) England, F., Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials Containing Circular or Ring-Shaped Cavities, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E*, Vol. 32 (1965), pp. 829-836.
- (13) Kassir, M. K. and Bregman, A. M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack between Two Dissimilar Materials, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E*, Vol. 39 (1972), pp. 308-310.
- (14) Lowengrub, M. and Sneddon, I. N., The Effect of Internal Pressure on a Penny-Shaped Crack at the Interface of Two Bonded Dissimilar Elastic Half-Spaces, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 12 (1974), pp. 387-396.
- (15) Keer, L. M. et al., The Interface Penny-Shaped Crack Reconsidered, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 16 (1978), pp. 765-772.
- (16) Shibuya, T. et al., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bonded Half-Spaces, *JSME International Journal, Series A*, Vol. 32 (1989), pp. 485-491.
- (17) Yuuki, R. and Cao, X. F., Boundary Element Analysis to Stress Intensity Factor of Interface Crack, *Transac-*

- tion of the Japan Society of Mechanical Engineering, Series A, (in Japanese) No. 55-510 (1989), pp. 340-347.*
- (18) Takakuda, K. et al., Stress Analysis for biomaterial with an Interface Crack, In: *Prelim. Proc. 55th Annual Meeting of Japan Soc. Mech. Engrs.*, (in Japanese) No. 780-3 (1978), pp. 167-169.
- (19) Noda, N. A. et al., Analysis of Stress Intensity Factors of a Ring-Shaped Interface Crack, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 24 (2003), pp. 6577-6592.
- (20) Qing, W. and Noda, N. A., Variation of Stress Intensity Factors along the Front of 3D Rectangular Crack by Using a Singular Integral Equation Method, *International Journal of Fracture*, Vol. 108 (2001), pp. 119-131.
- (21) Qin, T. Y. and Noda, N. A., Three-Dimensional Crack Problem Analysis Using Boundary Element Method with Finite-part Integrals, *International Journal of Fracture*, Vol. 84 (1997), pp. 191-202.
- (22) Qin, T. Y. and Noda, N. A., Stress Intensity Factors of Rectangular Crack Meeting a Bimaterial Interface, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40 (2003), pp. 2473-2486.
- (23) Chen, M. C. et al., Application of Finite-part Integrals to Planar Interfacial Fracture Problems in Three Dimensional Bimaterials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66 (1999), pp. 885-890.