

異種接合半無限体中の三次元長方形
界面き裂の応力拡大係数について*野田尚昭^{*1}, 徐春暉^{*2}, 高瀬康^{*1}Stress Intensity Factor for a Rectangular Interface Crack
in Three Dimensional BimaterialsNao-Aki NODA^{*3}, Chunhui XU and Yasushi TAKASE^{*3} Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper, stress intensity factors for a three dimensional rectangular interfacial crack are considered on the idea of the body force method. In the numerical calculations, unknown body force densities are approximated by the products of the fundamental densities and power series, here the fundamental densities are chosen to express singular stress fields due to an interface crack exactly. The calculation shows that the present method gives rapidly converging numerical solutions and highly satisfied boundary conditions. The stress intensity factors for a rectangular interface crack are indicated accurately with varying the aspect ratio, and biomaterial parameter.

Key Words: Elasticity, Stress Intensity Factor, Body Force Method, Interface Crack, Composite Material, Fracture Mechanics, Singular Integral Equation

1. 緒 言

近年、複合材料とみなしうる新しい材料が機能性材料の集合体である電子製品などに広く用いられている。これらの界面を有する部材の破壊は、接合面の不良接着部やはく離を起点として生じた界面き裂の伝ばに支配されることが多い。このため、異種材料接合界面の強度の正確な評価が重要となっている。界面き裂の問題に関して、これまで多くの解析⁽¹⁾⁻⁽¹⁸⁾がなされているものの、その多くは特定の材料の組合せに対する数値計算である場合がほとんどであり、任意の材料の組合せに対して応力拡大係数が精度良く与えられているものは円形界面き裂⁽¹⁷⁾、深い環状界面き裂⁽¹⁸⁾とリング状界面き裂⁽¹⁹⁾に関するもののみである。

著者らは前報⁽²⁰⁾で、異種材料接合半無限体中の三次元界面き裂問題を、体積力法の特異積分方程式で表現し、精度良く解析する方法を考察した。三次元界面き裂問題を特異積分方程式として表現することは、

陳・野田・湯ら⁽²¹⁾によって行われているが、一般に界面き裂の問題では変位の振動現象と応力の振動特異性とその厳密な解析を困難にしている。しかし、前報の方法によれば振動特異性を厳密に考慮することが可能であるばかりでなく、き裂先端の滑らかな応力拡大係数の分布と、き裂面全体での高い境界条件の満足度が得られる。そこで本研究では、実用上重要な三次元界面き裂の形状比、および材料の剛性比を変化させてそれらのパラメータが界面き裂の応力拡大係数に及ぼす影響を明らかにする。

2. 異種材料接合界面三次元き裂の
特異積分方程式

図1のように x, y 平面を接合界面とする無限体 x, y 平面に縦 $2b$, 横 $2a$ の長方形界面き裂を有する。また μ_1, μ_2 は、それぞれ上下材料の横弾性係数、 ν_1, ν_2 は上下材料のポアソン比であり、界面き裂が遠方で応力 $\sigma_x^{\infty} = \sigma_0, \tau_{yz}^{\infty} = 0, \tau_{zx}^{\infty} = 0$ を受けるものとする。陳・野田・湯⁽²¹⁾らの体積力法の考え方に基づく特異積分方程式は式(1)で表される。

* 原稿受付 2006年10月16日。

^{*1} 正員, 九州工業大学工学部 (〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。^{*2} China Agricultural University (Beijing 100083 P. R. China) [現:九州工業大学工学部]。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

ここに $w_i(\xi, \eta)$ は次式で定義される.

$$w_x(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \epsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \times \sin \left[\epsilon \ln \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right] \dots \dots \dots (6 \cdot a)$$

$$w_y(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \epsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \times \sin \left[\epsilon \ln \left(\frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right] \dots \dots \dots (6 \cdot b)$$

$$w_z(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \epsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \times \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right] \cos \left[\epsilon \ln \left(\frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right] \dots \dots \dots (6 \cdot c)$$

ここで重み関数, $F_x(\xi, \eta)$, $F_y(\xi, \eta)$, $F_z(\xi, \eta)$ は連続

性を考慮した多項式を用いる. 一例として $F_x(\xi, \eta)$ は以下のように表される.

$$F_x(\xi, \eta) = a_0 + a_1 \eta + \dots + a_{n-1} \eta^{(n-1)} + a_n \eta^n + a_{n+1} \xi + a_{n+2} \xi \eta + \dots + a_{2n} \xi \eta^n + \dots + a_{l-n-1} \xi^m + a_{l-n} \xi^m \eta + \dots + a_{l-1} \xi^m \eta^n = \sum_{i=0}^{l-1} a_i G_i(\xi, \eta) \dots \dots \dots (7)$$

4. 解析結果および考察

4・1 境界条件の満たし方と無次元化応力拡大係数の定義

以上の理論に基づいて, 計算プログラムを作成し, 式(7)の多項式の次数 m, n を変化させて形状比 $a/b=1, 2, 4, 8$, 材料のバイマテリアル定数 $\epsilon=$

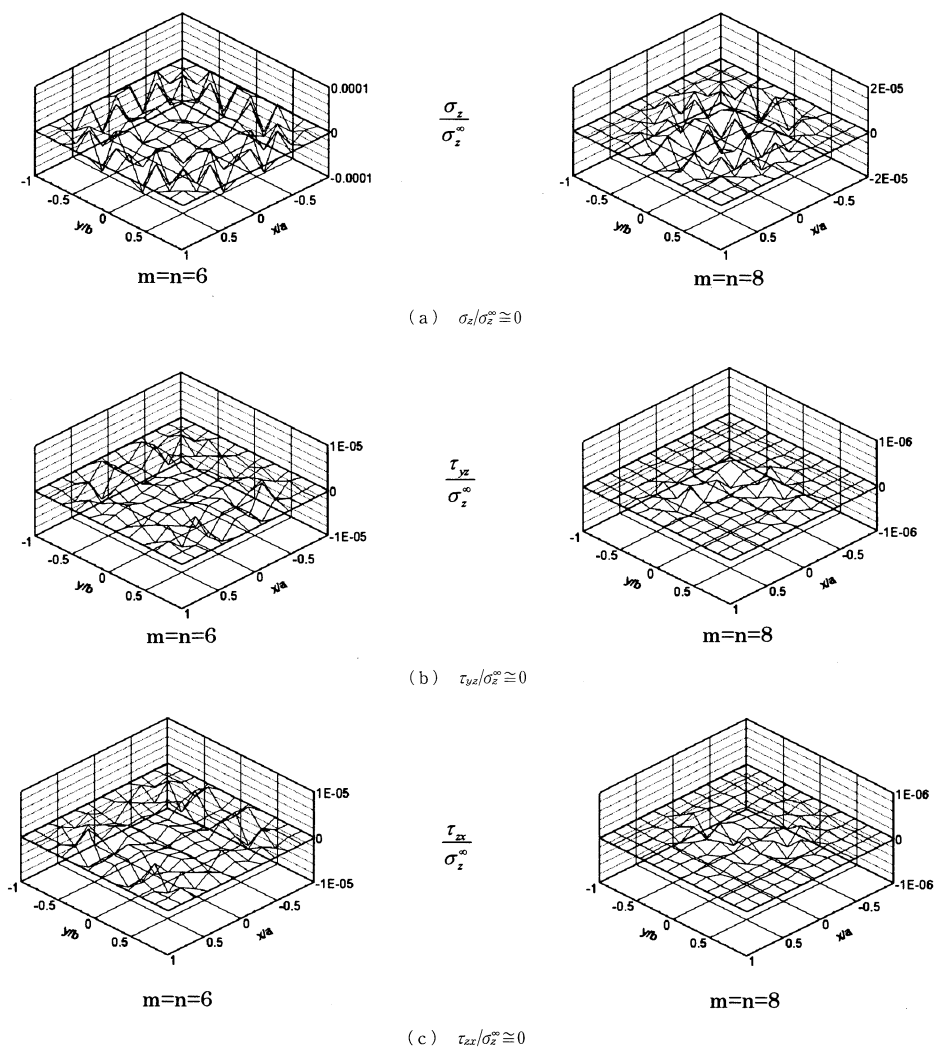


Fig. 3 Compliance of boundary condition for $a/b=1, \epsilon=0.02$

Table 1 Convergence of stress intensity factor F_I for $\varepsilon=0$, $a/b=1$ at $y=b$ (collocation point 20×20)

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
m=n=4	0.7521	0.7507	0.7462	0.7379	0.7250	0.7066	0.6821	0.6509	0.6108	0.5538	0.4497
m=n=6	0.7538	0.7520	0.7467	0.7377	0.7248	0.7072	0.6836	0.6520	0.6094	0.5482	0.4423
m=n=8	0.7534	0.7516	0.7463	0.7373	0.7243	0.7063	0.6821	0.6500	0.6081	0.5513	0.4543
Qin	0.7534	0.7512	0.7462	0.7379	0.7255	0.7072	0.6821	0.6497	0.6090	0.5521	0.4464
Wang	0.7534	0.7517	0.7465	0.7376	0.7245	0.7066	0.6828	0.6512	0.6086	0.5492	0.4536

Table 2

(a) Dimensionless stress intensity factor F_I for $a/b=8$ at $y=b$

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$\varepsilon=0.02$	0.9947	0.9946	0.9942	0.9933	0.9917	0.9888	0.9838	0.9750	0.9580	0.9175	0.7954
$\varepsilon=0.04$	0.9938	0.9937	0.9932	0.9923	0.9907	0.9878	0.9828	0.9739	0.9568	0.9160	0.7931
$\varepsilon=0.06$	0.9920	0.9919	0.9914	0.9905	0.9889	0.9860	0.9809	0.9719	0.9545	0.9134	0.7892
$\varepsilon=0.08$	0.9891	0.9890	0.9885	0.9875	0.9859	0.9830	0.9779	0.9687	0.9509	0.9092	0.7836
$\varepsilon=0.10$	0.9848	0.9847	0.9842	0.9833	0.9816	0.9786	0.9733	0.9640	0.9461	0.9037	0.7755

(b) Dimensionless stress intensity factor F_{II} for $a/b=8$ at $y=b$

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$\varepsilon=0.02$	0.0397	0.0397	0.0396	0.0396	0.0395	0.0394	0.0391	0.0387	0.0378	0.0358	0.0304
$\varepsilon=0.04$	0.0786	0.0786	0.0785	0.0784	0.0783	0.0780	0.0775	0.0766	0.0749	0.0710	0.0601
$\varepsilon=0.06$	0.1160	0.1160	0.1160	0.1158	0.1156	0.1152	0.1144	0.1131	0.1106	0.1047	0.0885
$\varepsilon=0.08$	0.1515	0.1515	0.1514	0.1512	0.1509	0.1503	0.1493	0.1476	0.1442	0.1364	0.1151
$\varepsilon=0.10$	0.1845	0.1845	0.1844	0.1842	0.1838	0.1831	0.1819	0.1797	0.1755	0.1658	0.1394

(c) Dimensionless stress intensity factor $F_{III} \times 10^3$ for $a/b=8$ at $y=b$ ($\nu_1=\nu_2=0.3$)

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$\varepsilon=0.02$	0	0.0609	0.1217	0.1823	0.2423	0.3013	0.3584	0.4118	0.4579	0.4793	0.4887
$\varepsilon=0.04$	0	0.1086	0.2371	0.3551	0.4721	0.5872	0.6985	0.8028	0.8932	0.9370	0.9540
$\varepsilon=0.06$	0	0.1704	0.3406	0.5101	0.6784	0.8439	1.004	1.155	1.286	1.354	1.375
$\varepsilon=0.08$	0	0.2141	0.4279	0.6411	0.8562	1.061	1.263	1.453	1.620	1.714	1.736
$\varepsilon=0.10$	0	0.2484	0.4965	0.7439	0.9897	1.232	1.467	1.690	1.886	2.009	2.026

0~0.1 について数値計算を行った。本解析結果として、き裂前縁の滑らかな応力拡大係数の分布が得られる。結果として得られた応力拡大係数 K_I , K_{II} , K_{III} をまとめるのに、無限板中長さ $2b$ の二次元界面き裂の応力拡大係数 $\sigma_z^* \sqrt{\pi b}$ で無次元化した値である F_I , F_{II} , F_{III} を用いる。ここで、境界条件を考慮する点として、界面き裂となるべき境界上に想定した 10×10 のメッシュの交点を考える。そして、これらの点で残留する応力が最小となるように最小二乗法によって、多項式の係数 [式(7)の $\alpha_0 \sim \alpha_{l-1}$ 等] を決定する。

$$F_I + iF_{II} = \frac{K_I(x, y)|_{x=x, y=\pm b} + iK_{II}(x, y)|_{x=x, y=\pm b}}{\sigma_z^* \sqrt{\pi b}}$$

$$= \sqrt{a^2 - x^2} \times \left\{ \cos \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \right. \\ \left. \times F_z(x, y)|_{x=x, y=\pm b} + 2i\varepsilon F_y(x, y)|_{x=x, y=\pm b} \right\} \\ \dots \dots \dots (8 \cdot a)$$

$$F_{III} = \frac{K_{III}(x, y)|_{x=x, y=\pm b}}{\sigma_z^* \sqrt{\pi b}} = \sum_{l=1}^2 \frac{1 + \kappa_l}{4\mu_l \cosh \pi \varepsilon} \\ \times \frac{1}{(1/\mu_1 + 1/\mu_2)} \sqrt{a^2 - x^2} \sin \left[\varepsilon \ln \left(\frac{a-x}{a+x} \right) \right] \\ \times F_x(x, y)|_{x=x, y=\pm b} \dots \dots \dots (8 \cdot b)$$

4.2 解の収束性について 図3(a)~(c)に境界条件の満足度を $a/b=1$, $\varepsilon=0.02$ の場合について示

Table 3
(a) Dimensionless stress intensity factor F_I for $a/b=1$ at $y=b$

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$\varepsilon=0$	0.7534	0.7516	0.7463	0.7373	0.7243	0.7063	0.6821	0.6500	0.6081	0.5513	0.4543
$\varepsilon=0.02$	0.7528	0.7511	0.7459	0.7369	0.7238	0.7058	0.6822	0.6514	0.6099	0.5490	0.4400
$\varepsilon=0.04$	0.7509	0.7492	0.7440	0.7351	0.7219	0.7040	0.6804	0.6495	0.6080	0.5470	0.4377
$\varepsilon=0.06$	0.7478	0.7461	0.7409	0.7320	0.7188	0.7009	0.6773	0.6464	0.6048	0.5436	0.4339
$\varepsilon=0.08$	0.7433	0.7416	0.7364	0.7275	0.7143	0.6965	0.6729	0.6419	0.6003	0.5389	0.4286
$\varepsilon=0.10$	0.7373	0.7356	0.7304	0.7215	0.7085	0.6906	0.6671	0.6362	0.5945	0.5329	0.4218

(b) Dimensionless stress intensity factor F_{II} for $a/b=1$ at $y=b$

x/a	0/11	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$\varepsilon=0.02$	0.0274	0.0273	0.0272	0.0266	0.0260	0.0251	0.0239	0.0224	0.0204	0.0176	0.0134
$\varepsilon=0.04$	0.0541	0.0540	0.0535	0.0527	0.0514	0.0497	0.0474	0.0443	0.0403	0.0348	0.0365
$\varepsilon=0.06$	0.0798	0.0796	0.0789	0.0776	0.0758	0.0733	0.0699	0.0654	0.0595	0.0515	0.0393
$\varepsilon=0.08$	0.1040	0.1037	0.1028	0.1012	0.0988	0.0955	0.0911	0.0853	0.0776	0.0673	0.0515
$\varepsilon=0.10$	0.1263	0.1259	0.1248	0.1229	0.1201	0.1161	0.1107	0.1037	0.0945	0.0821	0.0629

Table 4 Comparison between the results of square and disk shaped interface cracks

	F_I		F_{II}	
	square	disk	square	disk
$\varepsilon=0.02$	0.7528	0.636	0.02738	0.030
$\varepsilon=0.04$	0.7509	0.636	0.05417	0.061
$\varepsilon=0.06$	0.7478	0.635	0.07985	0.091
$\varepsilon=0.08$	0.7433	0.634	0.1040	0.122
$\varepsilon=0.10$	0.7373	0.632	0.1263	0.152

Table 5 Dimensionless stress intensity factor F_I and F_{II} for at the point $(0, b)$

	F_I				F_{II}			
	a/b=1	a/b=2	a/b=4	a/b=8	a/b=1	a/b=2	a/b=4	a/b=8
$\varepsilon=0.02$	0.7528	0.9052	0.9760	0.9947	0.0274	0.0352	0.0388	0.0397
$\varepsilon=0.04$	0.7509	0.9038	0.9750	0.9938	0.0542	0.0696	0.0768	0.0786
$\varepsilon=0.06$	0.7478	0.9013	0.9730	0.9920	0.0798	0.1027	0.1134	0.1160
$\varepsilon=0.08$	0.7433	0.8975	0.9699	0.9891	0.1040	0.1338	0.1479	0.1515
$\varepsilon=0.10$	0.7373	0.8921	0.9654	0.9848	0.1263	0.1627	0.1801	0.1845

す。図3より、境界上に残留する応力 σ_z/σ_z^∞ と $\tau_{yz}/\sigma_z^\infty$ および $\tau_{zx}/\sigma_z^\infty$ の値は、 $m=n=6$ で 4.4×10^{-5} 以下、 $m=n=8$ で 1.5×10^{-6} である。この境界条件の満足度は、異種材料接合界面と接するき裂の結果⁽²²⁾よりも良く、無限体中の長方形き裂の結果⁽²³⁾と同程度である。これまでの経験から、表面き裂の問題⁽²⁴⁾などでは境界条件の満足度が比較的良好なことがわかっている。界面き裂の問題では応力の振動特異性が生じるなど精度低下を招く要因があるが、二重指数関数形積分

公式を使用するなど数値計算上の工夫によってこのような精度が実現できていると考えられる。表1に、材料1と材料2が等しい場合の均質材中のき裂において、無次元化応力拡大係数を、 $a/b=1$ の場合に、過去の研究⁽²²⁾⁽²³⁾と比較して示す。本研究結果の収束性と精度が良いことがわかる。

4・3 二次元界面き裂との比較 き裂の形状比 a/b を大きくした場合には二次元界面き裂の解に一致するはずである。表2に $a/b=8$ のとき、多項式の次

数 $m=n=8$ として、式(8)で定義される F_I , F_{II} , F_{III} の値を示す。表2に示すように、 $a/b=8$ の結果は $|x/a| \leq 0.5$ の範囲で $a/b \rightarrow \infty$ の二次元界面き裂の厳密解 $F_I=1$, $F_{II}=2\epsilon$, $F_{III}=0$ によき一致している。

4・4 長方形界面き裂の応力拡大係数 一般の形状比について多項式の次数 $m=n=8$ として、以下の結果を得た。表3は $a/b=1$ の正方形界面き裂のき裂前縁に沿った収束性を示す。パイマテリアル定数 ϵ が0から0.1に増加するにつれて F_I は減少するが F_{II} は増加する。円板状界面き裂との比較を表4に示す。ここで、正方形界面き裂の F_I , F_{II} は $x=0$, $y=\pm b$ の値である。同じ ϵ の値に対して正方形界面き裂の F_I は常に円形界面き裂の F_I より大きく、逆に正方形界面き裂の F_{II} は円形界面き裂の F_{II} より小さい。表5は形状比 $a/b=1, 2, 4, 8$ と変化させたときの長方形界面き裂 F_I , F_{II} をまとめたものである。さきに報告⁽²⁰⁾したように、長方形界面き裂の F_I , F_{II} の値は ϵ のみによって決まる。 F_{III} の値は小さく最大でも $F_I \times 10^{-2}$ 以下である。

5. 結 言

本論文では体積力法の特異積分方程式を精度良く数値解析することによって長方形界面き裂の応力拡大係数を考察した。結論をまとめると以下ようになる。

(1) 未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式で近似することによって、界面き裂固有の振動特異性を厳密に考慮して解析した。

(2) 得られた結果はき裂前縁に沿って滑らかな応力拡大係数の分布を与えるほかに良好な収束性を示す。多項式の次数 $m=n=8$ で残留する応力は 10^{-5} 以下である(図3)。

(3) 界面き裂の形状比 $a/b=8$ の結果は $|x/a| \leq 0.5$ の範囲で $a/b \rightarrow \infty$ の二次元界面き裂の厳密解と3けた程度まで一致する(表3)。

(4) き裂の形状比 a/b とパイマテリアル定数 ϵ を変化させて応力拡大係数の結果を表にまとめた(表3~5)。

文 献

- (1) Salganik, R. L., The Brittle Fracture of Cemented-Bodies, *Prikladnaia matematika i mekhanika*, Vol. 27 (1963), pp. 957-962.
- (2) Erdogan, F., Stresses Distribution in a Non-homogeneous Elastic Plane with Crack, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 30 (1963), pp. 232-236.
- (3) England, A. H., A Crack between Dissimilar Media, *Transaction of the ASME, Journal of Applied*

- Mechanics*, Vol. 32 (1965), pp. 400-402.
- (4) Rice, J. R. and Sih, G. C., Plane Problems of Cracks in Dissimilar Media, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 32 (1965), pp. 418-423.
- (5) Comminou, M., The Interface Crack, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 44 (1977), pp. 631-636.
- (6) Noda, N. A. and Oda, K., Interaction Effect of Stress Intensity Factors for any Number of Collinear Interface Cracks, *International Journal of Fracture*, Vol. 84 (1997), pp. 117-128.
- (7) Willis, J. R., Fracture Mechanics of Interfacial Crack, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 19 (1971), pp. 353-368.
- (8) Tucker, M. O., In Two-phase Solids under Longitudinal Shear Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 10 (1974), pp. 323-336.
- (9) England, F. and Gupta, G. D., Bonded Wedges with an Interface Crack under Anti-plane Shear Loading, *International Journal of Fracture*, Vol. 11 (1975), pp. 583-593.
- (10) Willis, J. R., The Penny-Shaped Crack on an Interface, *Journal of Mechanics Applied Mathematica*, Vol. 25 (1972), pp. 367-385.
- (11) Mossakovski, V. I. and Rybka, M. T., Generalization of the Griffith-seddond Criterion for the Case of a Non-homogeneous Body, *Prikladnaia Matematika I Mekhanika*, Vol. 28 (1964), pp. 1061-1069.
- (12) England, F., Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials Containing Circular or Ring-Shaped Cavities, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E*, Vol. 32 (1965), pp. 829-836.
- (13) Kassir, M. K. and Bregman, A. M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack between Two Dissimilar Materials, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 39 (1972), pp. 308-310.
- (14) Lowengrub, M. and Seddon, I. N., The Effect of Internal Pressure on a Penny-Shaped Crack at the Interface of Two Bonded Dissimilar Elastic Half-Spaces, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 12 (1974), pp. 387-396.
- (15) Keer, L. M. et al., The Interface Penny-Shaped Crack Reconsidered, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 16 (1978), pp. 765-772.
- (16) Shibuya, T., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bonded Half-Spaces, *JSME International Journal, Series A*, Vol. 32 (1989), pp. 485-491.
- (17) Yuuki, R. and Cao, X. F., Boundary Element Analysis to Stress Intensity Factor of Interface Crack, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineering, Series A*, (in Japanese), No. 55-510 (1989), pp. 340-347.
- (18) Takakuda, K. et al., Stress Analysis to Interface Crack in Bonded Semi-Infinite Plate, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineering, Series A*, (in Japanese), No. 780-3 (1978), pp. 167-169.
- (19) Noda, N. A. et al., Analysis of Stress Intensity Factors of a Ring-Shaped Interface Crack, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 24 (2003), pp. 6577-6592.
- (20) Noda, N. A. et al., Stress Intensity Factor for a Planar Interfacial Crack in Three Dimensional Bimaterials, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineering, Series A* (in Japanese, submitted), No. 73-727 (2007), pp. 379-386.

- (21) Chen M. C. et al., Application of Finite-part Integrals to Planar Interfacial Fracture Problems in Three Dimensional Bimaterials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66 (1999), pp. 885-890.
- (22) Qin T. Y. and Noda, N. A., Stress Intensity Factors of Rectangular Crack Meeting a Bimaterial Interface, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40 (2003), pp. 2473-2486.
- (23) Wang, Q. et al., Variation of Stress Intensity Factors along the Front of 3D Rectangular Crack by Using a Singular Integral Equation Method, *International Journal of Fracture*, Vol. 108 (2001), pp. 119-131.
- (24) Noda, N. A. and Miyoshi, S., Variation of Stress Intensity Factor and Crack Opening Displacement of Semi-Elliptical Surface Crack, *International Journal of Fracture*, Vol. 75 (1996), pp. 19-48.
-