

せん断荷重下における異種接合半無限体中の  
界面き裂の応力拡大係数の解析\*徐 春 暉<sup>\*1</sup>, 野田 尚 昭<sup>\*2</sup>, 高瀬 康<sup>\*2</sup>Variations of Stress Intensity Factors  
of a Planar Interfacial Crack Subjected to Mixed Mode LoadingChunhui XU, Nao-Aki NODA<sup>\*3</sup> and Yasushi TAKASE<sup>\*3</sup> Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology,  
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

In this paper, a mixed mode interfacial crack in three dimensional bimetals is analyzed by singular integral equations on the basis of the body force method. In the numerical analysis, unknown body force densities are approximated by the products of the fundamental density functions and power series, where the fundamental density functions are chosen to express a two-dimensional interface crack exactly. The results show that the present method yields smooth variations of mixed mode stress intensity factors of a rectangular interface crack along the crack front accurately. The effect of crack shape on the stress intensity factor for 3D interface cracks is also discussed on the basis of present solution. Then, it is found that the stress intensity factors  $K_{II}$  and  $K_{III}$  are always insensitive to the shear modulus ratio, and almost determined by Poisson's ratio alone. Distributions of stress intensity factors are indicated in tables and figures with varying the rectangular shape and Poisson's ratio.

**Key Words:** Stress Intensity Factor, Body Force Method, Interface Crack, Composite Material, Singular Integral Equation

## 1. 緒 言

最近, 軽量化と高機能化を目的として複合材料が広分野で使用されるようになり, その強度評価が重要な問題となっている。多くの界面を有する複合材料の破壊は, 界面に生じたき裂の伝ばに支配されることが多い。しかし界面き裂問題では, 変位の振動現象と応力の振動特異性が解析を困難なものとしているため, これまで得られた厳密な解析結果はあまり多くない。三次元界面き裂に関しては円形界面き裂<sup>(1)~(5)</sup>やだ円形界面き裂<sup>(6)</sup>や有限体中のき裂<sup>(7)</sup>などいくつかの解析はなされているものの, その多くは特定の材料の組合せに対する数値計算である場合がほとんどであり, 任意の材料の組合せに対して応力拡大係数が閉じた形で与えられているものは円形界面き裂<sup>(7)</sup>と深い環状界面き裂<sup>(8)</sup>に関するもののみである。著者ら<sup>(9)</sup>は, 異種材料接合界面に接する軸対称き裂がねじりと引張りを受ける問題を, 体積力法の特異積分方程式で表現し解

析を行っている。また, 体積力法の特異積分方程式の未知関数を基本密度関数と多項式で近似する方法を用いて<sup>(9)~(11)</sup>, 均質材中の三次元き裂先端の精度の高い滑らかな応力拡大係数の分布を求めたほか, 異種接合面上の界面き裂が引張りを受ける問題を取扱った<sup>(12)(13)</sup>。

三次元界面き裂問題を特異積分方程式として表現することは, 陳・野田・湯ら<sup>(14)</sup>によって行われているが, この場合にも, 変位の振動現象と応力の振動特異性がその厳密な解析を困難にしている。そこで, 本研究では, その特異積分方程式を, せん断荷重下において振動特異性を考慮して厳密に解析する方法を考察するため, まず長方形界面き裂問題について応力拡大係数の解析を行う。解析方法としては, 体積力法の未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いる。本解析法は, 界面き裂先端近傍で生じる変位の振動現象を厳密に評価した解析が可能であり, 応力拡大係数が連立方程式の解から直接決定されるという特徴をもっている。

## 2. 解析方法

図1のように  $x, y$  平面を接合界面とする無限体中の界面き裂を考える。ここで,  $\mu_1, \mu_2$  は, それぞれ上

\* 原稿受付 2006年12月11日。

<sup>\*1</sup> China Agricultural University (Beijing 100083 P.R. China) [現: 九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)]。<sup>\*2</sup> 正員, 九州工業大学工学部(☎804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

下材料の横弾性係数,  $\nu_1, \nu_2$  は上下材料のポアソン比である。このような三次元界面き裂の問題に関して陳・野田・湯ら<sup>(14)</sup>らによって体積力法の考え方に基づく特異積分方程式(1・a)~(1・e)が導かれている。

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial \Delta u_x(x, y)}{\partial x} + \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \oint_s \frac{1}{r^3} \Delta u_x(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \\ & \times \oint_s \frac{(x - \xi)^2}{r^5} \Delta u_x(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \oint_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \Delta u_y(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) \\ & = -p_x(x, y), \quad x, y \in S \quad \dots\dots\dots(1 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_2 - \Lambda_1) \frac{\partial \Delta u_x(x, y)}{\partial y} + \mu_1 \frac{(2\Lambda - \Lambda_1 - \Lambda_2)}{2\pi} \oint_s \frac{1}{r^3} \Delta u_y(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \\ & \times \oint_s \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \Delta u_x(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) + 3\mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2 - \Lambda)}{2\pi} \oint_s \frac{(y - \eta)^2}{r^5} \Delta u_y(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) \\ & = -p_y(x, y), \quad x, y \in S \quad \dots\dots\dots(1 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_1(\Lambda_1 - \Lambda_2) \left[ \frac{\partial \Delta u_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u_y(x, y)}{\partial y} \right] + \mu_1 \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)}{2\pi} \oint_s \frac{1}{r^3} \Delta u_z(\xi, \eta) dS(\xi, \eta) = -p_z(x, y), \quad x, y \in S \\ & \dots\dots\dots(1 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}, \quad \Lambda_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}, \quad \Lambda_2 = \frac{\mu_2}{\mu_2 + \kappa_2 \mu_1} \\ \kappa_1 &= 3 - 4\nu_1, \quad \kappa_2 = 3 - 4\nu_2, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \\ & \dots\dots\dots(1 \cdot d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta u_i(x, y) &= u_i(x, y, 0^+) - u_i(x, y, 0^-), \\ i &= x, y, z \\ & \dots\dots\dots(1 \cdot e) \end{aligned}$$

ここで,  $\Delta u_i(x, y)$  は  $i$  方向のき裂上下面の変位差であり,  $\oint$  は発散積分の有限部分を表す。本論文では図1(b)に示すように界面上に寸法  $2a \times 2b$  の長方形界面き裂が存在し, せん断応力  $\tau_{yz}^\infty = 1$  ( $\sigma_z^\infty = 0, \tau_{zx}^\infty = 0$ ) を受ける場合を解析の対象とする。この問題に対し

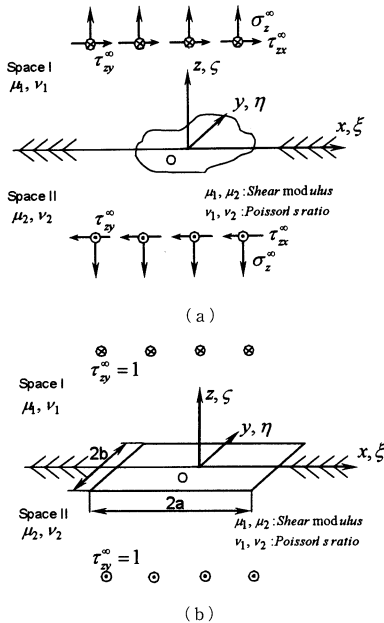


Fig.1 Problem configuration

て, 未知関数である  $\Delta u_i$  を精度良く求めるため, 本論文では以下のおく。

$$\begin{aligned} \Delta u_i(\xi, \eta) &= w_i(\xi, \eta) F_i(\xi, \eta), \quad i = x, y, z \\ & \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここに  $w_i(\xi, \eta)$  は次式で定義される。

$$\begin{aligned} w_x(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^2 \frac{1 + \kappa_i}{4\mu_i \cosh \pi \epsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \\ & \times \sin \left[ \epsilon \ln \left( \frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right] \\ w_y(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^2 \frac{1 + \kappa_i}{4\mu_i \cosh \pi \epsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \\ & \times \cos \left[ \epsilon \ln \left( \frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right] \\ w_z(\xi, \eta) &= - \sum_{i=1}^2 \frac{1 + \kappa_i}{4\mu_i \cosh \pi \epsilon} \sqrt{a^2 - \xi^2} \sqrt{b^2 - \eta^2} \\ & \times \cos \left[ \epsilon \ln \left( \frac{a - \xi}{a + \xi} \right) \right] \sin \left[ \epsilon \ln \left( \frac{b - \eta}{b + \eta} \right) \right] \\ & \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

ここで  $w_x(\xi, \eta), w_y(\xi, \eta), w_z(\xi, \eta)$  は基本密度関数と呼ばれ, 界面き裂固有の振動特異性を表現する関数である。接合無限体中の  $xy$  平面上にある二次元界面き裂 ( $a/b \rightarrow 0, a/b \rightarrow \infty$  に相当) が遠方で,  $\tau_{yz}^\infty$  が作用したときの応力場を厳密に表現する体積力密度やき裂開口変位を考慮して, 式(3)を用いる<sup>(12)</sup>。

式(3)でバイマテリアル定数  $\epsilon$  と  $\kappa$  は次式で定義される。

$$\epsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{\mu_2 \kappa_1 + \mu_1}{\mu_1 \kappa_2 + \mu_2} \right)$$

ここで重み関数,  $F_x(\xi, \eta), F_y(\xi, \eta), F_z(\xi, \eta)$  は連続性を考慮した多項式を用いる。具体的には,  $\xi, \eta$  について  $m, n$  次までの以下のような表現を用いる。

$$\left. \begin{aligned} F_x(\xi, \eta) &= \alpha_0 + \alpha_1 \eta + \cdots + \alpha_{n-1} \eta^{(n-1)} + \alpha_n \eta^n + \alpha_{n+1} \xi + \alpha_{n+2} \xi \eta + \cdots + \alpha_{2n} \xi \eta^n + \cdots \\ &\quad + \alpha_{l-n-1} \xi^m + \alpha_{l-n} \xi^m \eta + \cdots + \alpha_{l-1} \xi^m \eta^n = \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i G_i(\xi, \eta) \\ F_y(\xi, \eta) &= \beta_0 + \beta_1 \eta + \cdots + \beta_{n-1} \eta^{(n-1)} + \beta_n \eta^n + \beta_{n+1} \xi + \beta_{n+2} \xi \eta + \cdots + \beta_{2n} \xi \eta^n + \cdots \\ &\quad + \beta_{l-n-1} \xi^m + \beta_{l-n} \xi^m \eta + \cdots + \beta_{l-1} \xi^m \eta^n = \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i G_i(\xi, \eta) \\ F_z(\xi, \eta) &= \gamma_0 + \gamma_1 \eta + \cdots + \gamma_{n-1} \eta^{(n-1)} + \gamma_n \eta^n + \gamma_{n+1} \xi + \gamma_{n+2} \xi \eta + \cdots + \gamma_{2n} \delta \eta^n + \cdots \\ &\quad + \gamma_{l-n-1} \xi^m + \gamma_{l-n} \xi^m \eta + \cdots + \gamma_{l-1} \xi^m \eta^n = \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i G_i(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$l = (n+1)(m+1)$$

$$G_0(\xi, \eta) = 1, \quad G_1(\xi, \eta) = \eta, \quad \dots, \quad G_{n+1}(\xi, \eta) = \xi, \quad \dots, \quad G_{l-1}(\xi, \eta) = \xi^m \eta^n$$

式(4)より式(5)が得られ、結局問題は式(4)で示される多項式  $F_x(\xi, \eta)$ ,  $F_y(\xi, \eta)$ ,  $F_z(\xi, \eta)$  の  $3l$  個の係数  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  を未知数とする連立一次方程式を解くことに帰する。これらの未知数は、界面き裂となる仮想境界上で残留する応力が最小となるように最小二乗法によって決定する。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i (f_{x1}^2 + f_{y1}^2) + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i f_{y1} + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i f_{z1} &= -p_x(x, y), \quad x, y \in S \\ \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i f_{x2} + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i (f_{y2}^2 + f_{z2}^2) + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i f_{z2} &= -p_y(x, y), \quad x, y \in S \\ \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i f_{x3} + \sum_{i=0}^{l-1} \beta_i f_{y3} + \sum_{i=0}^{l-1} \gamma_i f_{z3} &= -p_z(x, y), \quad x, y \in S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

### 3. 解析結果および考察

**3.1 無次元化応力拡大係数の定義** 2章までの理論に基づいて、計算プログラムを作成し、多項式の次数のパラメータ  $m, n$  を変化させてき裂の形状比  $a/b=1, 2, 4, 8$  について数値計算を行った。本解析結果から、き裂前縁の滑らかな応力拡大係数の分布が得られる。以下では次式で定義される無次元化応力拡大係数  $F_I, F_{II}$  を用いて、結果を示す。これは、長さ  $2b$  の二次元界面き裂の応力拡大係数  $K_I + iK_{II} = (\sigma_z^{\infty} + i\tau_{yz}^{\infty})(1+2i\epsilon)\sqrt{\pi b}$  と比較することに相当する。

$$F_I + iF_{II} = \frac{K_I(x, y)|_{x=x, y=\pm b} + iK_{II}(x, y)|_{x=x, y=\pm b}}{\tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi b}} = \sqrt{a^2 - x^2} \times \left\{ -2\epsilon \cos \left[ \epsilon \ln \left( \frac{a-x}{a+x} \right) \right] F_x(x, y)|_{x=x, y=\pm b} \right. \\ \left. \times iF_y(x, y)|_{x=x, y=\pm b} \right\} \dots\dots\dots (6.a)$$

$$F_{III} = \frac{K_{III}(x, y)|_{x=x, y=\pm b}}{\tau_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi b}} = \frac{2}{\pi} \frac{1 + k_I}{4\mu_I \cosh \pi \epsilon} \frac{1}{(1/\mu_1 + 1/\mu_2)} \sqrt{a^2 - x^2} \sin \left[ \epsilon \ln \left( \frac{a-x}{a+x} \right) \right] F_x|_{x=x, y=\pm b} \\ \dots\dots\dots (6.b)$$

**3.2 境界条件の満たし方と解の収束性** 形状比  $a/b=1, \mu_2/\mu_1=2$ , ポアソン比  $\nu_1=\nu_2=0.3$  のき裂について、近似する式(4)の多項式の次数を変化させたときの辺  $y=b$  の応力拡大係数  $F_{II}, F_I, F_{III}$  の収束性を表1に示す。表1の場合では有効数字3けた程度収束している。ここで、境界条件を満足させるため、残留する応力が最小となるように  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  を最小二乗法によって決定した。その際、き裂となるべき境界上に想定した  $10 \times 10$  のメッシュの交点での応力が最小となるようにした。境界条件の満足度を図2に示す。図2に示すように境界条件  $\sigma_z/\tau_{yz}^{\infty}=0, \tau_{yz}/\tau_{yz}^{\infty}+1=0, \tau_{zx}/\tau_{yz}^{\infty}=0$  は、 $n=8$  で  $5.2 \times 10^{-5}$  以下で満足される。

**3.3 二次元界面き裂との比較** き裂の形状比  $a/b$  を大きくした場合には二次元界面き裂の解に一致するはずである。表2に  $a/b=8$  のとき、多項式の次

数  $m=n=8$  として、式(6)で定義される  $F_I, F_{II}$  の値を示す。表2のような検討によって、 $a/b=8$  の結果は  $|x/a| \leq 0.5$  の範囲で  $a/b \rightarrow \infty$  の二次元界面き裂の厳密解  $F_I=2\epsilon, F_{II}=1$  によく一致することがわかった。

**3.4 バイマテリアル定数  $\epsilon$  が一定の場合の応力拡大係数について** さきの研究<sup>(12)</sup> において、三次元界面き裂の引張問題では応力拡大係数はバイマテリアル定数  $\epsilon$  のみに依存することを明らかにした。表3に  $\epsilon=0.02$  と固定し、ポアソン比と剛性比を変えたときの結果を示す。表3に示すようにせん断荷重下では応力拡大係数は  $\epsilon$  のみでは決まらないことがわかる。

**3.5 ポアソン比一定のときの剛性比  $\mu_2/\mu_1$  の応力拡大係数への影響** 一般の形状比について多項式の次数  $m=n=8$ , 選点数  $10 \times 10$  として、以下の結果を得た。ポアソン比  $\nu_1=\nu_2=0.3$  と固定して、剛性比

Table 1 Convergence of dimensionless stress intensity factor at  $y=b$  for  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $a/b=1$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ 

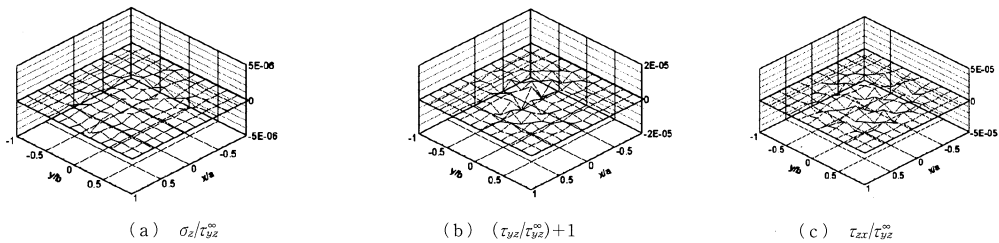
	m, n	$x/a=0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{II}$	m=n=6	0.8419	0.8398	0.8336	0.8235	0.8098	0.7924	0.7702	0.7408	0.6981	0.6284	0.4966
	m=n=7	0.8419	0.8402	0.8349	0.8257	0.8120	0.7932	0.7688	0.7374	0.6956	0.6327	0.5131
	m=n=8	0.8428	0.8411	0.8359	0.8268	0.8132	0.7945	0.7695	0.7369	0.6936	0.6307	0.5154
$F_I$	m=n=6	0.0472	0.0471	0.0467	0.0460	0.0449	0.0433	0.0410	0.0380	0.0338	0.0283	0.0202
	m=n=7	0.0474	0.0472	0.0468	0.0461	0.0451	0.0436	0.0416	0.0388	0.0349	0.0295	0.0214
	m=n=8	0.0475	0.0473	0.0469	0.0461	0.0451	0.0437	0.0417	0.0391	0.0357	0.0312	0.0245
	m, n	$y/b \rightarrow 0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{III}$	m=n=6	0.6516	0.6500	0.6454	0.6376	0.6264	0.6111	0.5906	0.5624	0.5222	0.4607	0.3547
	m=n=7	0.6505	0.6490	0.6443	0.6364	0.6250	0.6098	0.5900	0.5638	0.5274	0.4717	0.3714
	m=n=8	0.6507	0.6490	0.6442	0.6360	0.6243	0.6088	0.5886	0.5626	0.5273	0.4743	0.3780

Table 2 Dimensionless stress intensity factor  $F_{II}$  and  $F_I$  for  $a/b=8$  at  $(0, b)$ 

$\mu_2/\mu_1$	2		5		10		100	
$\nu_1, \nu_2$	$F_{II}$	$F_I (2\varepsilon)$	$F_{II}$	$F_I (2\varepsilon)$	$F_{II}$	$F_I (2\varepsilon)$	$F_{II}$	$F_I (2\varepsilon)$
$\nu_1=0, \nu_2=0$	0.9930	0.1042(0.1072)	0.9834	0.2009(0.2206)	0.9742	0.2410(0.3298)	0.9373	0.2743(0.3476)
$\nu_1=0.0, \nu_2=0.5$	0.9768	0.2366(0.2698)	0.9671	0.2640(0.3122)	0.9626	0.2745(0.2766)	0.9576	0.2847(0.3414)
$\nu_1=0.3, \nu_2=0.3$	0.9975	0.0602(0.0608)	0.9952	0.1189(0.1228)	0.9933	0.1448(0.1516)	0.9905	0.1716(0.1832)

Table 3 Dimensionless stress intensity factor for  $a/b=1$ ,  $\varepsilon=0.02$  at  $y=b$ 

	$\nu_1, \nu_2 (\mu_2/\mu_1)$	$x/a=0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{II}$	$\nu_1=0.3, \nu_2=0.3$	0.8419	0.840	0.835	0.825	0.812	0.793	0.768	0.736	0.692	0.630	0.514
	$\nu_1=0, \nu_2=0 (1.2870)$	0.7544	0.752	0.747	0.738	0.725	0.704	0.683	0.652	0.611	0.550	0.441
	$\nu_1=0, \nu_2=0.5 (0.0718)$	0.8982	0.896	0.891	0.883	0.870	0.851	0.827	0.795	0.754	0.695	0.582
$F_I$	$\nu_1=0.3, \nu_2=0.3$	0.0313	0.031	0.030	0.030	0.029	0.028	0.027	0.025	0.023	0.020	0.016
	$\nu_1=0, \nu_2=0 (1.2870)$	0.0278	0.027	0.027	0.027	0.026	0.025	0.024	0.022	0.020	0.017	0.012
	$\nu_1=0, \nu_2=0.5 (0.0718)$	0.0337	0.033	0.033	0.032	0.032	0.031	0.029	0.028	0.026	0.024	0.023
	$\nu_1, \nu_2 (\mu_2/\mu_1)$	$y/b \rightarrow 0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{III}$	$\nu_1=0.3, \nu_2=0.3 (1.5628)$	0.6529	0.651	0.646	0.638	0.626	0.610	0.590	0.564	0.529	0.475	0.379
	$\nu_1=0, \nu_2=0 (1.2870)$	0.7518	0.750	0.744	0.735	0.722	0.705	0.681	0.650	0.609	0.549	0.441
	$\nu_1=0, \nu_2=0.5 (0.0718)$	0.5741	0.572	0.568	0.560	0.550	0.537	0.520	0.498	0.469	0.424	0.339

Fig. 2 Compliance of boundary condition when  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $a/b=1$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ ,  $n=8$ 

$\mu_2/\mu_1$  を変化させた場合の無次元化応力拡大係数  $F_{II}$ ,  $F_{III}$ ,  $F_I$  を表 4~7, および図 3 に示す. これらの図表に示すように,  $F_{II}$ ,  $F_{III}$  の値は, 剛性比  $\mu_2/\mu_1$  の変化にあまり依存しないことがわかる. 一方,  $F_I$  は,  $x=a$  では正,  $x=-a$  では負であるが,  $F_I$  の値は剛性比によって大きく変化する. 図 4 に  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$

を固定して, 形状比  $a/b$  を変化させた場合の応力分布を示す.  $a/b$  が大きくなるにつれて二次元界面き裂の解  $F_{II}=1$ ,  $F_I=2\varepsilon$  に近づくことがわかる.

**3・6 剛性比一定のときのポアソン比の応力拡大係数への影響** 形状比  $a/b=1$ , 剛性比  $\mu_2/\mu_1=2$  のとき, ポアソン比を変化させた場合の無次元化応力拡大

係数  $F_{II}$ ,  $F_{III}$ ,  $F_I$  を表 8 に示す。表 8 に示すように、これらの値はポアソン比の変化にいずれも依存して変化することがわかる。 $F_{II}$  の最小値と  $F_{III}$  の最大値は、 $\nu_1 = \nu_2 = 0$  のとき現れる。 $\nu_1 \rightarrow 0.5$ ,  $\nu_2 \rightarrow 0.5$  のとき、

$F_{II}$  は最大値となり、 $F_{III}$  は最小値となる。 $F_I$  の値に関しては、 $\varepsilon$  が増加するとともに単調に増加する傾向が認められる。図 5 は、 $\mu_2/\mu_1 = 2$  のときの応力拡大係数の分布の例を示す。 $F_{II}$  と  $F_{III}$  はポアソン比の組合

Table 4 Dimensionless stress intensity factor at  $y=b$  for  $a/b=1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 

	$\mu_2/\mu_1$	$x/a=0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{II}$	2	0.8428	0.8411	0.8359	0.8268	0.8132	0.7945	0.7695	0.7369	0.6939	0.6307	0.5154
	5	0.8474	0.8457	0.8405	0.8214	0.8178	0.7990	0.7739	0.7411	0.6976	0.6345	0.5185
	10	0.8502	0.8486	0.8433	0.8342	0.8206	0.8018	0.7766	0.7438	0.7003	0.6371	0.5207
	100	0.8536	0.8519	0.8467	0.8376	0.8240	0.8051	0.7800	0.7472	0.7037	0.6404	0.5236
$F_I$	2	0.0475	0.0473	0.0469	0.0461	0.0451	0.0437	0.0417	0.0391	0.0357	0.0312	0.0245
	5	0.0947	0.0944	0.0936	0.0921	0.0901	0.0873	0.0835	0.0785	0.0718	0.0631	0.0500
	10	0.1161	0.1157	0.1147	0.1129	0.1105	0.1071	0.1026	0.0965	0.0885	0.0781	0.0623
	100	0.1388	0.1384	0.1372	0.1351	0.1323	0.1284	0.1231	0.1160	0.1067	0.0945	0.0760
		$y/b \rightarrow 0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{III}$	2	0.6507	0.6490	0.6442	0.6360	0.6243	0.6088	0.5886	0.5626	0.5273	0.4743	0.3780
	5	0.6388	0.6372	0.6324	0.6243	0.6129	0.5977	0.5781	0.5527	0.5181	0.4656	0.3696
	10	0.6307	0.6291	0.6243	0.6163	0.6050	0.5901	0.5708	0.5459	0.5118	0.4597	0.3638
	100	0.6200	0.6184	0.6137	0.6058	0.5947	0.5801	0.5613	0.5370	0.5035	0.4519	0.3563

Table 5 Dimensionless stress intensity factor at  $y=b$  for  $a/b=2$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 

	$\mu_2/\mu_1$	$x/a=0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{II}$	2	0.9557	0.9546	0.9511	0.9448	0.9351	0.9209	0.9004	0.8714	0.8287	0.7600	0.6234
	5	0.9569	0.9558	0.9525	0.9463	0.9368	0.9228	0.9027	0.8739	0.8315	0.7630	0.6265
	10	0.9574	0.9563	0.9530	0.9470	0.9377	0.9238	0.9039	0.8753	0.8331	0.7648	0.6285
	100	0.9576	0.9566	0.9533	0.9474	0.9383	0.9247	0.9051	0.8768	0.8350	0.7670	0.6310
$F_I$	2	0.0570	0.0569	0.0566	0.0560	0.0552	0.0541	0.0524	0.0499	0.0464	0.0409	0.0314
	5	0.1130	0.1128	0.1122	0.1113	0.1097	0.1075	0.1043	0.0996	0.0928	0.0822	0.0635
	10	0.1379	0.1376	0.1370	0.1359	0.1341	0.1314	0.1276	0.1221	0.1140	0.1012	0.0786
	100	0.1640	0.1638	0.1630	0.1617	0.1597	0.1567	0.1523	0.1460	0.1367	0.1219	0.0951
		$y/b \rightarrow 0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{III}$	2	0.4707	0.4697	0.4668	0.4617	0.4542	0.4435	0.4286	0.4072	0.3759	0.3278	0.2473
	5	0.4604	0.4595	0.4567	0.4518	0.4446	0.4344	0.4199	0.3990	0.3682	0.3207	0.2412
	10	0.4535	0.4526	0.4499	0.4452	0.4382	0.4282	0.4140	0.3935	0.3631	0.3160	0.2370
	100	0.4444	0.4436	0.4410	0.4365	0.4297	0.4201	0.4063	0.3863	0.3564	0.3099	0.2316

Table 6 Dimensionless stress intensity factor at  $y=b$  for  $a/b=4$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ 

	$\mu_2/\mu_1$	$x/a=0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{II}$	2	0.9857	0.9855	0.9848	0.9834	0.9810	0.9766	0.9689	0.9556	0.9308	0.8788	0.7455
	5	0.9879	0.9877	0.9869	0.9854	0.9827	0.9780	0.9700	0.9560	0.9306	0.8008	0.7440
	10	0.9893	0.9890	0.9882	0.9866	0.9837	0.9788	0.9705	0.9561	0.9301	0.9768	0.7426
	100	0.9908	0.9905	0.9896	0.9878	0.9848	0.9795	0.9707	0.9557	0.9289	0.8748	0.7403
$F_I$	2	0.0598	0.0597	0.0596	0.0595	0.0593	0.0589	0.0582	0.0569	0.0545	0.0503	0.0414
	5	0.1182	0.1182	0.1180	0.1178	0.1174	0.1168	0.1155	0.1131	0.1088	0.1007	0.0832
	10	0.1440	0.1439	0.1437	0.1435	0.1431	0.1424	0.1410	0.1383	0.1332	0.1236	0.1026
	100	0.1708	0.1707	0.1706	0.1703	0.1700	0.1693	0.1678	0.1649	0.1593	0.1483	0.1237
		$y/b \rightarrow 0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11
$F_{III}$	2	0.3402	0.3391	0.3360	0.3305	0.3224	0.3111	0.2959	0.2756	0.2485	0.2110	0.1550
	5	0.3328	0.3318	0.3287	0.3233	0.3152	0.3040	0.2890	0.2690	0.2423	0.2056	0.1506
	10	0.3279	0.3269	0.3238	0.3184	0.3104	0.2993	0.2844	0.2646	0.2381	0.2018	0.1476
	100	0.3215	0.3205	0.3174	0.3121	0.3042	0.2932	0.2784	0.2588	0.2327	0.1970	0.1436

Table 7 Dimensionless stress intensity factor at  $y=b$  for  $a/b=8$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$

$\mu_2/\mu_1$	$x/a=0$	1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11	
$F_{II}$	2	0.9975	0.9975	0.9973	0.9970	0.9965	0.9954	0.9933	0.9895	0.9809	0.9533	0.8453
	5	0.9952	0.9951	0.9950	0.9947	0.9943	0.9933	0.9915	0.9880	0.9800	0.9535	0.8470
	10	0.9933	0.9933	0.9931	0.9929	0.9925	0.9916	0.9899	0.9867	0.9790	0.9533	0.8479
	100	0.9905	0.9904	0.9903	0.9901	0.9897	0.9890	0.9874	0.9845	0.9774	0.9527	0.8487
$F_I$	2	0.0602	0.0602	0.0602	0.0602	0.0602	0.0601	0.0599	0.0597	0.0591	0.0569	0.0492
	5	0.1190	0.1190	0.1190	0.1190	0.1190	0.1189	0.1187	0.1184	0.1175	0.1136	0.0988
	10	0.1448	0.1448	0.1448	0.1448	0.1448	0.1448	0.1448	0.1445	0.1436	0.1392	0.1217
	100	0.1716	0.1716	0.1717	0.1719	0.1719	0.1720	0.1720	0.1720	0.1712	0.1666	0.1465
$y/b \rightarrow 0$		1/11	2/11	3/11	4/11	5/11	6/11	7/11	8/11	9/11	10/11	
$F_{III}$	2	0.2248	0.2239	0.2212	0.2165	0.2099	0.2009	0.1893	0.1745	0.1556	0.1307	0.0949
	5	0.2185	0.2177	0.2150	0.2105	0.2039	0.1952	0.1839	0.1695	0.1511	0.1269	0.0921
	10	0.2143	0.2135	0.2108	0.2064	0.1999	0.1913	0.1802	0.1661	0.1481	0.1243	0.0901
	100	0.2090	0.2081	0.2055	0.2011	0.1948	0.1864	0.1755	0.1617	0.1441	0.1210	0.0876

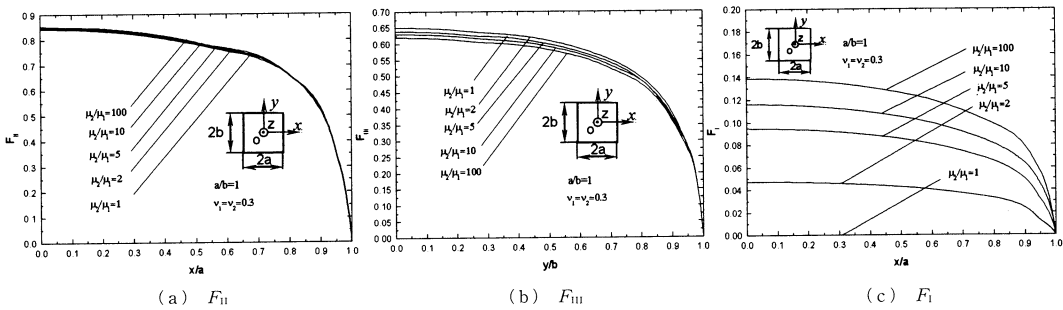


Fig. 3 Variations of dimensionless stress intensity factor for  $a/b=1$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$

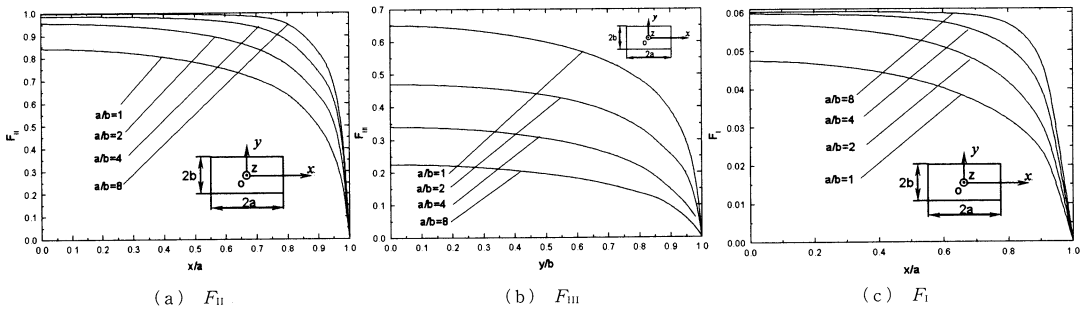


Fig. 4 Variations of dimensionless stress intensity factor for  $\mu_2/\mu_1=2$ ,  $\nu_1=\nu_2=0.3$ ,  $2\epsilon=0.0608$

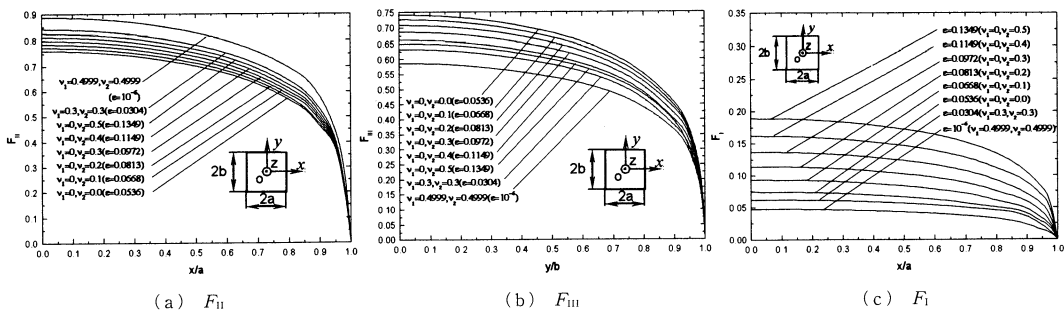


Fig. 5 Variations of dimensionless stress intensity factor for  $a/b=1$ ,  $\mu_2/\mu_1=2$

Table 8 Dimensionless stress intensity factor at  $(0, b)$  for  $a/b=1, \mu_2/\mu_1=2$ 

$\nu_1$	$\nu_2$	$\varepsilon$	$F_{II}$	$F_{III}$	$F_I$
0	0	0.0536	0.7603	0.7421	0.0740
0	0.1	0.0668	0.7725	0.7268	0.0930
0	0.2	0.0813	0.7855	0.7088	0.1138
0	0.3	0.0972	0.7992	0.6876	0.1365
0	0.4	0.1149	0.8134	0.6625	0.1614
0	0.5	0.1349	0.8276	0.6325	0.1887
0.1	0.1	0.0475	0.7858	0.7160	0.0682
0.1	0.2	0.0620	0.7983	0.6992	0.0896
0.1	0.3	0.0779	0.8117	0.6792	0.1133
0.1	0.4	0.0956	0.8258	0.6555	0.1392
0.1	0.5	0.1155	0.8401	0.6268	0.1679
0.2	0.2	0.0400	0.8132	0.6858	0.0598
0.2	0.3	0.0559	0.8260	0.6675	0.0843
0.2	0.4	0.0736	0.8397	0.6454	0.1114
0.2	0.5	0.0935	0.8540	0.6185	0.1416
0.3	0.3	0.0304	0.8428	0.6507	0.0475
0.3	0.4	0.0481	0.8557	0.6308	0.0757
0.3	0.5	0.0680	0.8696	0.6062	0.1075
0.4	0.4	0.0177	0.8749	0.6087	0.0389
0.4	0.5	0.0376	0.8878	0.5873	0.0621
0.4999	0.4999	$\rightarrow 0$	0.9098	0.5570	$7 \times 10^{-6}$

せでその値が支配されるのに対して  $F_I$  は  $\varepsilon$  によって支配されている。

#### 4. 結 言

本研究では、せん断荷重下における長方形界面き裂の問題(図1)を、体積力法の特異積分方程式で表現し、未知関数を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を用いて考察した。

(1) 未知関数である体積力密度を基本密度関数と多項式の積で近似する方法を適用した結果、良好な収束性(表1)と境界条件の満足度(図2)が得られた。また、本解析結果は  $a/b=8$  で二次元界面き裂の厳密解とよく一致する。

(2)  $F_{II}$ ,  $F_{III}$  は剛性比に不敏感であり、狭い範囲に整理されることがわかる。これらの値は主としてき裂形状とポアソン比のみによって決まることが、数値解析によって明らかとなった[表4~7, 図3, 4, 5(a), (b)]。

(3) 剛性比が一定のとき、 $F_I$  の値は  $\varepsilon$  の増加とともに増加する。一方、 $F_{II}$  と  $F_{III}$  は  $\varepsilon$  ではなくポアソン比の組合せによって大小が決まり、 $\nu_1 \rightarrow 0.5$ ,  $\nu_2 \rightarrow 0.5$  のとき、 $F_{II}$  は最大値となり、 $F_{III}$  は最小値となる[表8, 図5(c)]。

#### 文 献

- (1) Mossakovski, V. I. and Rybka, M. T., Generalization of the Griffith-Sneddon Criterion for the Case of a Non-homogeneous Body, *Prikladnaia matematika I mekhanika*, Vol. 28 (1964), pp. 1061-1069.
- (2) England, F., Stress Distribution in Bonded Dissimilar Materials Containing Circular or Ring-Shaped Cavities, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E*, Vol. 32 (1965), pp. 829-836.
- (3) Kassir, M. K. and Bregman, A. M., The Stress Intensity Factor for a Penny-Shaped Crack between Two Dissimilar Materials, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Series E*, Vol. 39 (1972), pp. 308-310.
- (4) Lowengrub, M. and Sneddon, I. N., The Effect of Internal Pressure on a Penny-Shaped Crack at the Interface of Two Bonded Dissimilar Elastic Half-Spaces, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 12 (1974), pp. 387-396.
- (5) Keer, L. M. et al., The Interface Penny-Shaped Crack Reconsidered, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 16 (1978), pp. 765-772.
- (6) Shibuya, T. et al., Stress Analysis of the Vicinity of an Elliptical Crack at the Interface of Two Bonded Half-Spaces, *JSME International Journal, Series A*, Vol. 32 (1989), pp. 485-491.
- (7) Yuuki, R. and Cao, X. F., Boundary Element Analysis to Stress Intensity Factor of Interface Crack, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineering, Series A*, Vol. 55, No. 510 (1989), pp. 340-347.
- (8) Takakuda, K. et al., Stress Analysis for biomaterial with an Interface Crack, *In: Preliminary Proceeding 55th Annual Meeting of Japan Society of Mechanical Engineering (in Japanese)*, No. 780-3 (1978-4), pp. 167-169.
- (9) Noda, N. A. et al., Analysis of Stress Intensity Factors of a Ring-Shaped Interface Crack, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 24 (2003), pp. 6577-6592.
- (10) Qing W. and Noda, N. A., Variation of Stress Intensity Factors along the Front of 3D Rectangular Crack by Using a Singular Integral Equation Method, *International Journal of Fracture*, Vol. 108 (2001), pp. 119-131.
- (11) Qin T. Y. and Noda, N. A., Stress Intensity Factors of Rectangular Crack Meeting a Bimaterial Interface, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40 (2003), pp. 2473-2486.
- (12) Noda, N. A. et al., Stress Intensity Factor for a Planar Interfacial Crack in Three Dimensional Bimaterials, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineering, Series A*, Vol. 73, No. 727 (2007), pp. 379-386.
- (13) Noda, N. A. et al., Stress Intensity Factor for a Rectangular Interface Crack in Three Dimensional Bimaterials, *Transaction of the Japan Society of Mechanical Engineering, Series A*, Vol. 73, No. 728 (2007), pp. 468-474.
- (14) Chen M. C. et al., Application of Finite-part Integrals to Planar Interfacial Fracture Problems in Three Dimensional Bimaterials, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 66 (1999), pp. 885-890.