

遠方で一軸一様引張りを受ける接合板中の界面き裂の応力拡大係数\*

野田尚昭\*<sup>1</sup>, 張玉\*<sup>2</sup>, 蘭欣\*<sup>3</sup>  
高瀬康\*<sup>4</sup>, 小田和広\*<sup>5</sup>

Stress Intensity Factor of an Interface Crack  
in a Bonded Plate under Uni-Axial Tension

Nao-Aki NODA\*<sup>6</sup>, Yu ZHANG, Xin LAN,  
Yasushi TAKASE and Kazuhiro ODA

\*<sup>6</sup> Department of Mechanical and Control Engineering, Kyushu Institute of Technology,  
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka, 804-8550 Japan

Although a lot of interface crack problems were previously treated, few solutions are available under arbitrary material combinations. This paper deals with a central interface crack in a bonded infinite plate and finite plate. Then, the effects of material combinations on the stress intensity factors are discussed. A useful method to calculate the stress intensity factors of an interface crack is presented with focusing on the stress at the crack tip calculated by the finite element method. For the central interface crack, it is found that the results of bonded infinite plate under remote uni-axial tension are always depending on the Dundurs' parameters  $\alpha$ ,  $\beta$  and different from the well-known solution of the central interface crack under internal pressure that is only depending on  $\beta$ . Besides, it is shown that the stress intensity factor  $F_I$  of bonded infinite plate can be estimated from the stress of crack tip in the bonded plate when there is no crack. It is also found that dimensionless stress intensity factor  $F_I < 1$  when  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) > 0$ ,  $F_I > 1$  when  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) < 0$ , and  $F_I = 1$  when  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 0$ .

**Key Words:** Elasticity, Stress Intensity Factor, Finite Element Method, Central Interface Crack

1. 緒言

界面き裂の応力拡大係数として最もよく知られているのは、次式により表される接合無限板中の界面き裂が内圧  $\sigma$  を受ける場合(図1(a))の結果である。

$$K_I + iK_{II} = (F_I + iF_{II})(1 + 2i\varepsilon)\sigma\sqrt{\pi a}, F_I = 1, F_{II} = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{\kappa_1 + \frac{1}{G_1}}{G_2} \right) / \left( \frac{\kappa_2 + \frac{1}{G_2}}{G_1} \right) \right] \quad (2)$$

$$\kappa_m = \begin{cases} (3 - \nu_m) / (1 + \nu_m) & (\text{plane stress}) \\ 3 - 4\nu_m & (\text{plane strain}) \end{cases}$$

$\nu_m$ : (Poisson's ratio), ( $m=1, 2$ )

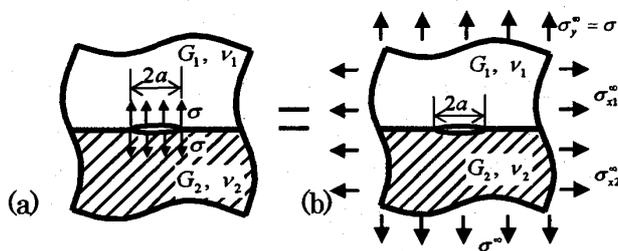
$G_m$ : (shear modulus), ( $m=1, 2$ )

ここで  $F_I$ ,  $F_{II}$  は無次元化応力拡大係数であり,  $\sigma$  は遠方引張り応力,  $i$  は虚数単位である。

図1(b)に示すように, この内圧の解は界面で  $x$  方向のひずみが等しい ( $\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2}$ ) ように  $\sigma_x^\infty = \sigma$ , およ

び  $\sigma_{x1}^\infty, \sigma_{x2}^\infty$  を作用させる場合の結果と等しい<sup>(1)</sup>。ここで例えば  $\sigma_{x1}^\infty$  は, 材料1を  $x$  方向に引張る応力である。

また, 界面き裂を有する接合有限板(図2(a))の問題はこれまでに多く解析され, その結果は表1に示すように大体において一致している。表1で  $a/W \rightarrow 0$  の極限を考えると,  $F_{II} \rightarrow 0$  となりそうであるけれども  $F_I \rightarrow 1$  とはならないことがわかる。すなわち, つまり式(1)で表現される内圧を受ける界面き裂の解は,  $y$  方向一軸引張りを受ける接合無限板の解とは異なる(図3(a), (b))。



$$K_I + iK_{II} = (F_I + iF_{II})(1 + 2i\varepsilon)\sigma\sqrt{\pi a}, F_I = 1, F_{II} = 0$$

$$\sigma_{x2}^\infty = \frac{1}{1 + \kappa_2} \left[ \frac{G_2}{G_1} (1 + \kappa_1) \sigma_{x1}^\infty + \left\{ 3 - \kappa_2 - \frac{G_2}{G_1} (3 - \kappa_1) \right\} \sigma_y^\infty \right]$$

Fig.1 Infinite bonded plate subjected to (a) internal pressure and (b) remote biaxial tensile stress.

\* 原稿受付 2010年8月17日, 英文誌: Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering, Vol.4, No.7 (2010), pp.974-987(原稿受付2009年11月16日)。

<sup>1</sup> 正員, 九州工業大学工学研究院(☎804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)。

<sup>2</sup> 正員, 九州工業大学大学院工学研究科。

<sup>3</sup> 学生員, 九州工業大学大学院工学研究科。

<sup>4</sup> 正員, 九州工業大学工学部機械知能工学科。

<sup>5</sup> 正員, 徳山工業高等専門学校機械電気工学科(☎745-8585 周南市学園)。

E-mail: noda@mech.kyutech.ac.jp

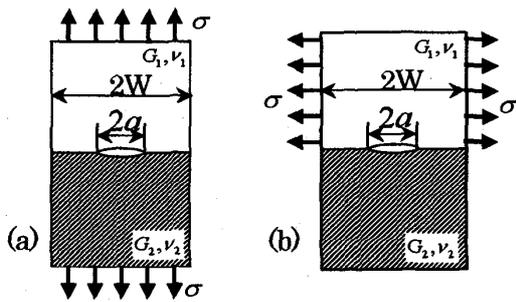


Fig. 2 Bonded finite plate with a central interface crack.

Table 1 Dimensionless stress intensity factors of center interface crack in bonded plate (see Fig 2).

$\frac{G_2}{G_1}$	$a/W$	$F_I$			$F_{II}$		
		Ref. [2]	Ref. [3]	Ref. [4]	Ref. [2]	Ref. [3]	Ref. [4]
4	-0	?	?	?	?	?	?
	0.1	0.986	0.981	0.986	0.005	0.005	0.005
	0.2	1.005	1.005	1.005	0.009	0.010	0.009
100	-0	?	?	?	?	?	?
	0.1	0.943	0.941	0.943	0.008	0.008	0.009
	0.2	0.960	0.960	0.960	0.017	0.018	0.018

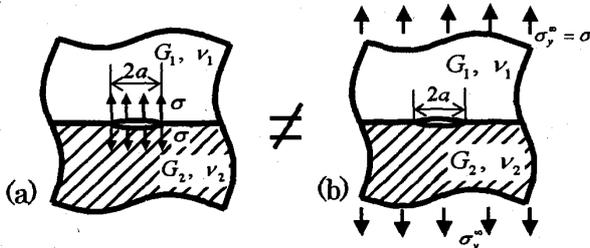


Fig. 3 Infinite bonded plate subjected to (a) internal pressure and (b) remote uni-axial tensile stress.

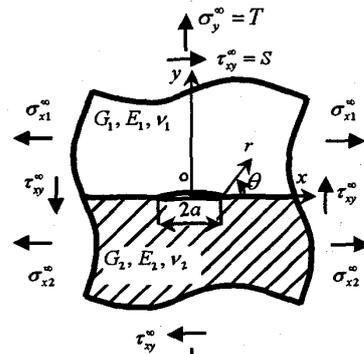
本研究では、有限要素法解析により得られるき裂先端の節点の値を用いて、基準解との比をとることにより応力拡大係数を決定する方法<sup>(2)</sup>を利用する。そして、最も基本的な図 2 に示す接合無限板中の中央界面き裂が任意の材料の組合せに対しての応力拡大係数  $K_I, K_{II}$  に及ぼす材料組合せの影響を明らかにする。

2. き裂先端の要素の値を用いる界面き裂の解析法

本研究で用いる解析方法は、有限要素法によって得られるき裂先端近傍の応力ないし変位の解析結果をそのまま利用し、基準解との比をとることにより応力拡大係数を決定する手法である<sup>(5)</sup>。例えば、均質材中のモード I のき裂先端近傍 ( $\theta = 0$ ) では、き裂先端近傍で式(3)

$$\sigma_y = K_I / \sqrt{2\pi r} \tag{3}$$

のように表される。有限要素法解析の誤差は主としてき裂先端近傍のメッシュに依存するので、2つの異なる問題をき裂先端近傍で同じメッシュを用いて



$$\sigma_{x2}^0 = \frac{1}{1 + \kappa_2} \left[ \frac{G_2}{G_1} (1 + \kappa_1) \sigma_{x1}^0 + \left\{ 3 - \kappa_2 - \frac{G_2}{G_1} (3 - \kappa_1) \right\} \sigma_y^0 \right]$$

Fig. 4 Reference problem ( $\epsilon_{x1} = \epsilon_{x2}$  at  $y = 0$ )

解析すれば、それらの  $K_I$  を  $\sigma_y$  を用いて評価できる。すなわち、 $r$  = 一定の位置に注目すると、次式が成立する。

$$K_I / \sigma_y = const. \tag{4}$$

したがって、き裂先端からの距離  $r$  が等しい位置では、2つの異なる問題 A と B について次式が成り立つ。

$$[K_I^* / \sigma_y^*]_A = [K_I / \sigma_y]_B \tag{5}$$

ここで、左辺は応力拡大係数の厳密解が分かっている基準問題 A の値であり (\* 印)、右辺は応力拡大係数の未知な問題 B の値である。有限要素法によるき裂先端の節点の値と式(5)の関係を用いて、西谷らは均質材中のき裂の問題を精度良く解析した<sup>(5)(6)</sup>。

最近、小田らは西谷らの方法を界面き裂の応力拡大係数の解析に拡張することに成功した<sup>(2)</sup>。異種接合材の界面き裂先端の応力場は、均質材中のき裂のそれとは異なり振動応力特異性を有する。すなわち接合界面上の応力を  $\sigma_y, \tau_{xy}$  とすると、界面き裂の応力拡大係数は次式で定義される。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{K_I + iK_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left( \frac{r}{2a} \right)^{i\epsilon}, \quad r \rightarrow 0 \tag{6}$$

式(6)より分かるように、界面の応力成分と応力拡大係数は均質材中のき裂と異なり完全にモード分離することができない。このため、き裂先端の要素の値から応力拡大係数を決定するためには以下に示すような工夫が必要である。すなわち、式(6)より、

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y \left( \cos Q + \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y} \sin Q \right) \tag{7}$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy} \left( \cos Q - \frac{\sigma_y}{\tau_{xy}} \sin Q \right) \tag{8}$$

$$Q = \varepsilon \ln(r/2a) \tag{9}$$

であるので、上式より、 $r$ —一定の位置で、次の条件が

$$Q^* = Q, \quad \frac{\tau_{xy}^*}{\sigma_y^*} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_y} \tag{10}$$

2つの問題で満足されれば、振動項が同じになることが分かる。したがって、基準問題と未知の問題において、 $r$ —一定の位置で、式(10)が満たされる場合、式(7)、(8)より次式が成立する。

$$\frac{K_I^*}{\sigma_y^*} = \frac{K_I}{\sigma_y}, \quad \frac{K_{II}^*}{\tau_{xy}^*} = \frac{K_{II}}{\tau_{xy}} \tag{11}$$

基準問題 A の界面き裂先端節点の応力値を  $\sigma_{y0,FEM}^*$ ,  $\tau_{xy0,FEM}^*$ , 応力拡大係数が未知の問題 B のそれを  $\sigma_{y0,FEM}$ ,  $\tau_{xy0,FEM}$  と表記する。FEM 解析値を利用して、界面き裂先端応力場の相似条件 [式(10)] より

$$K_I = \frac{\sigma_{y0,FEM}}{\sigma_{y0,FEM}^*} K_I^* \tag{12}$$

$$K_{II} = \frac{\tau_{xy0,FEM}}{\tau_{xy0,FEM}^*} K_{II}^* \tag{13}$$

$K_I^*, K_{II}^*$  は、図4の厳密解であり、式(14)で与えられる。

$$K_I^* + iK_{II}^* = (T + iS)\sqrt{\pi a}(1 + 2i\varepsilon) \tag{14}$$

式(11)の条件を満たすためには、基準問題 (図4) において、 $(T, S) = (1, 0)$  および  $(T, S) = (0, 1)$  とした場合の応力値をそれぞれ  $\sigma_{y0,FEM}^{T=1,S=0}$ ,  $\tau_{xy0,FEM}^{T=1,S=0}$  および  $\sigma_{y0,FEM}^{T=0,S=1}$ ,  $\tau_{xy0,FEM}^{T=0,S=1}$  とすれば、

$$\begin{aligned} \sigma_{y0,FEM} &= \sigma_{y0,FEM}^{T=1,S=0} \times T + \sigma_{y0,FEM}^{T=0,S=1} \times S, \\ \tau_{xy0,FEM} &= \tau_{xy0,FEM}^{T=1,S=0} \times T + \tau_{xy0,FEM}^{T=0,S=1} \times S \end{aligned} \tag{15}$$

$T = 1$  として式(15)を式(11)に代入すれば、

$$S = \frac{\sigma_{y0,FEM} \times \tau_{xy0,FEM}^{T=1,S=0} - \tau_{xy0,FEM} \times \sigma_{y0,FEM}^{T=1,S=0}}{\tau_{xy0,FEM} \times \sigma_{y0,FEM}^{T=0,S=1} - \sigma_{y0,FEM} \times \tau_{xy0,FEM}^{T=0,S=1}} \tag{16}$$

結局  $T = 1$  と式(16)で表される  $S$  が作用する図4の問題を基準問題として考える。この厳密解は知られているので、解析したい問題と同じメッシュで解析して誤差を評価できる。以下では式(1)で定義される無次元化応力拡大係数  $F_I, F_{II}$  を用いて結果を示す。

### 3. 接合無限板中の界面き裂の拡大係数

無次元化応力拡大係数  $F_I, F_{II}$  を式(17)で定義する。

$$K_I + K_{II} = (F_I + F_{II})(1 + 2i\varepsilon)\sigma\sqrt{\pi a} \tag{17}$$

また、 $\alpha, \beta$  は式(17)で定義される Dundurs の複合材料パラメーターである。

$$\alpha = \frac{G_1(\kappa_2 + 1) - G_2(\kappa_1 + 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)}, \quad \beta = \frac{G_1(\kappa_2 - 1) - G_2(\kappa_1 - 1)}{G_1(\kappa_2 + 1) + G_2(\kappa_1 + 1)} \tag{18}$$

#### 3.1 接合無限板中の中央界面き裂の求め方

有限要素法では無限板の問題は取り扱えないので、図2に示す有限板の問題を解析して考察する必要がある。表2に接合有限板が縦方向引張りを受けるとき (図2(a)), 三種類の材料組合せ (1)  $\alpha = 0.75, \beta = 0$ , (2)  $\alpha = 0.9, \beta = 0$ , (3)  $\alpha = 0.75, \beta = 0.2$  に対して、 $a/W = 1/1620, 1/3240, 1/6480$  の応力拡大係数の結果を示す。これから  $a/W < 1/1620$  で解析結果が3桁以上一致することがわかる。

つまり  $a/W = 1/1620$  と  $a/W \rightarrow 0$  の誤差は 0.09% 以下であり、有効数字3桁の精度がある。また、 $a/W \rightarrow 0$  で  $F_{II} \rightarrow 0$  となることがわかる。以下ではこのようにして求めた接合無限板の結果を議論する。

Table 2 Dimensionless stress intensity factors of crack in Fig.2 (a) with different  $a/W$ .

	$a/W$	$\alpha = 0.75$ $\beta = 0$	$\alpha = 0.75$ $\beta = 0$	$\alpha = 0.75$ $\beta = 0$
$F_I$	1/1620	0.93955	0.90859	0.95516
	1/3240	0.93962	0.90883	0.95515
	1/6480	0.93982	0.90943	0.95514
	$\rightarrow 0$	0.94002	0.91003	0.95513
$F_{II}$	1/1620	$2.21 \times 10^{-4}$	$2.59 \times 10^{-4}$	$1.11 \times 10^{-4}$
	1/3240	$1.10 \times 10^{-4}$	$1.28 \times 10^{-4}$	$5.53 \times 10^{-5}$
	1/6480	$5.51 \times 10^{-5}$	$6.42 \times 10^{-5}$	$2.76 \times 10^{-5}$
	$\rightarrow 0$	0	0	0

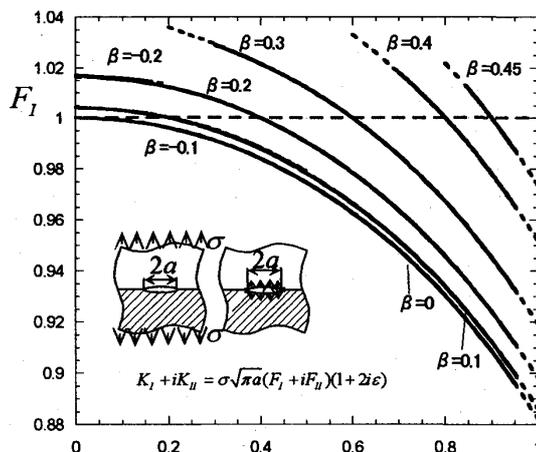


Fig.5  $F_I$  of a central interface crack in a bonded infinite plate under uni-axial tension which is corresponding to Fig.2 (a) with  $a/W \rightarrow 0$ .

3.2 接合無限板中の界面き裂の縦方向一軸引張り

図5に図2(a)の $a/W \rightarrow 0$ に相当する接合無限板の縦方向引張りの結果を示す。図5では $\beta$ を一定として無次元化応力拡大係数 $F_I$ と $\alpha$ の関係を示す。図2(a)の問題で、上下の2種類の材料を逆にすると、上の式より、 $\alpha, \beta$ の値がマイナスになる、即ち、 $\alpha \rightarrow -\alpha, \beta \rightarrow -\beta$ となる。しかしながら、上下材料を入れ替えた場合の応力拡大係数は同じ値( $F_I \rightarrow F_I, F_{II} \rightarrow -F_{II}$ )となるので、図5では $\alpha > 0$ の範囲の結果を示す(図6(a)参照)。実線は接合板が無限遠方で応力 $\sigma_y = \sigma$ を受ける場合の結果である。また、破線はき裂が内圧 $\sigma$ を受ける場合の結果( $F_I = 1$ )である。なお、図6(a)の破線の範囲の材料組合せに対して、現在使用しているFEM解析コードを用いて計算を実行することができない。よって、計算可能な範囲(実線)から外そうして結果を示す。図5より遠方における引張りの結果は $\alpha, \beta$ の組合せに依存して変化し、 $F_I = 0.882 \sim 1.036$ の範囲にあることがわかり、最小値は $\alpha = 1.0, \beta = 0$ でとり、最大値は $\alpha = 0.2, \beta = 0.3$ でとる。また、常に $F_{II} = 0$ である。すなわち遠方で $y$ 方向一軸引張り応力 $\sigma = 1$ を受ける界面き裂は、内圧 $\sigma = 0.882 \sim 1.036$ を受ける界面き裂に相当することがわかる。図5の結果を表3に数値で示す。

図5および表3より、 $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) < 0$ のとき、 $F_I > 1.0$ となり、 $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 0$ のとき、 $F_I = 1.0$ となり、 $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) > 0$ のとき $F_I < 1.0$ となる。表3に $F_I = 1.0$ となる材料組合せを下線で示す。

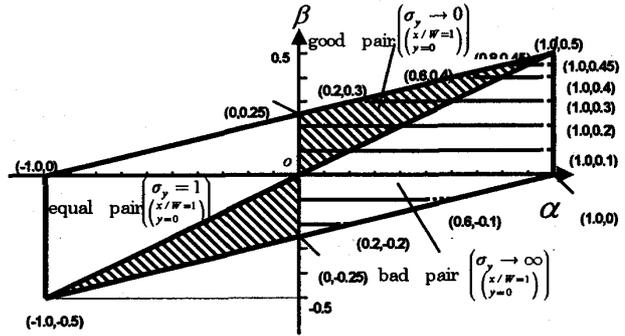
3.3 き裂のない接合有限板の応力分布について

遠方で $\sigma_y = 1$ を受ける接合板の応力拡大係数が一般的には $F_I = 1$ とならない理由を考察するため、き裂

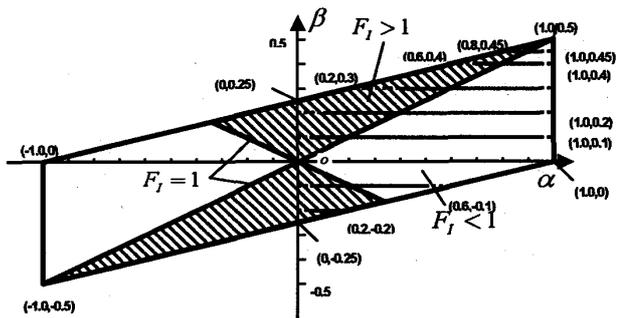
Table 3 Dimensionless stress intensity factor  $F_I$  in Fig.2 (a) with  $a/W \rightarrow 0$ .

— indicates  $F_I = 1$  for  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) = 0$  ;  
 $F_I > 1$  for  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) < 0$ ;  $F_I < 1$  for  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) > 0$

$\alpha \backslash \beta$	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
0.00	1.017	1.004	<u>1.000</u>	1.004	1.017	—	—	—
0.05	1.016	1.004	1.000	1.004	1.016	—	—	—
0.10	1.016	1.003	0.999	1.003	1.015	—	—	—
0.15	1.015	1.002	0.998	1.002	1.014	—	—	—
0.20	(1.013)	<u>1.000</u>	0.996	<u>1.000</u>	1.012	(1.036)	—	—
0.30	—	0.995	0.991	0.995	1.007	1.029	—	—
0.40	—	0.988	0.984	0.988	<u>1.000</u>	1.022	—	—
0.50	—	0.979	0.975	0.978	0.990	1.012	—	—
0.60	—	(0.966)	0.963	0.966	0.979	<u>1.000</u>	(1.033)	—
0.70	—	—	0.948	0.952	0.964	0.985	1.018	—
0.75	—	—	0.940	0.943	0.955	0.977	1.010	—
0.80	—	—	0.930	0.934	0.946	0.967	<u>1.000</u>	(1.022)
0.85	—	—	0.920	0.924	0.935	0.957	0.990	1.011
0.90	—	—	0.910	0.912	0.924	0.945	0.978	<u>1.000</u>
0.95	—	—	0.896	0.900	0.912	0.933	0.965	0.987
1.00	—	—	(0.882)	(0.886)	(0.898)	(0.919)	(0.952)	(0.974)



(a) Shadow regions  $\alpha(\alpha - 2\beta) < 0$  have no stress singular at the edge  $x = \pm W$  in Fig.2 (a)



(b) Shadow regions  $(\alpha + 2\beta)(\alpha - 2\beta) < 0$  have  $F_I > 1$  for Fig.1 (a) with  $a/W \rightarrow 0$

Fig.6 The map of  $\alpha$  and  $\beta$

がないときの界面上および界面近傍の応力分布を図7のき裂のない接合板のモデルにより検討する。

図8に断面a,b,c,d,eでの応力分布を(a)  $\alpha = 0.4, \beta = 0.3$  (b)  $\alpha = 0.6, \beta = 0.3$  (c)  $\alpha = 0.7, \beta = 0.1$  (d)  $\alpha = 0.1, \beta = -0.2$ , (e)  $\alpha = 0.2, \beta = -0.1$ の場合について示す。遠方で $y$ 方向に $\sigma_y = 1$ を受けるとき、a,b,c,d,e断面の応力分布は一般には $\sigma_y = 1$ とならな

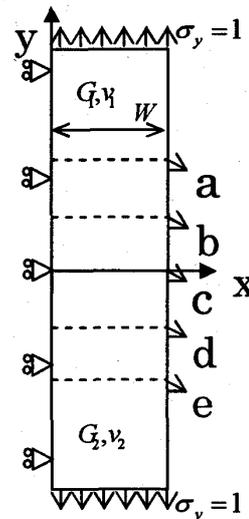


Fig.7 The finite element model in Fig.2 (a) with  $a/W \rightarrow 0$

い。しかし、応力分布を積分した各断面の力は当然つりあっている。

ここで図 6(a) より  $\alpha=0.4, \beta=0.3$  は good pair の条件  $\alpha(\alpha-2\beta) < 0$  を満たすので<sup>(7), (8)</sup>, 図 8(a) の端部では  $\sigma_y = 0$  となる。したがって、力のつりあいより  $\alpha(\alpha-2\beta) < 0$  では  $x=0$  付近で  $\sigma_y > 1$  となる。これが、 $\alpha(\alpha-2\beta) < 0$  で  $F_I > 1$  となる原因である。

一方、図 8(b) より、 $\alpha=0.6, \beta=0.3$  は、 $\alpha(\alpha-2\beta) = 0$  の equal pair の条件を満たして、どの断面でも  $\sigma_y = 1$  の一様応力分布が生じているため、 $F_I = 1$  となる。

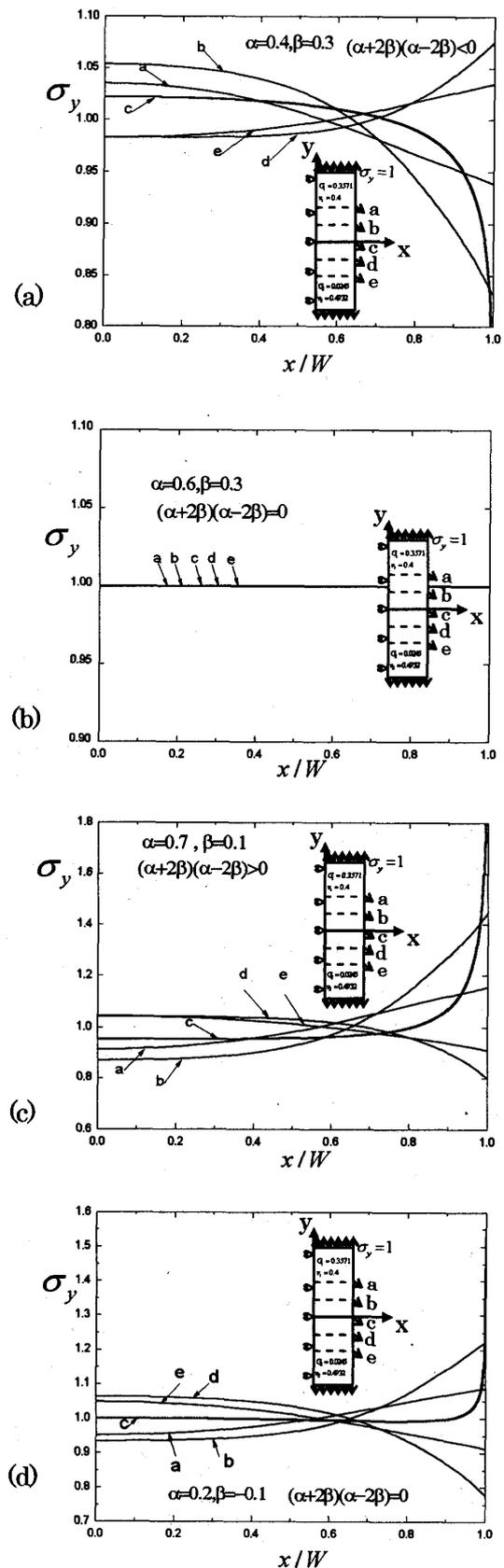
次に、 $\alpha=0.7, \beta=0.1$  では、bad pair の条件  $\alpha(\alpha-2\beta) > 0$  を満たすので、界面接合端部  $x/W = 1$  で  $\sigma_y \rightarrow \infty$  となる。したがって、 $x=0$  付近での応力分布は  $\sigma_y < 1$  となる。これが、 $\alpha(\alpha-2\beta) > 0$  で  $F_I < 1$  となる原因である。

図 8(d) は  $\alpha=0.2, \beta=-0.1$  で bad pair の条件  $\alpha(\alpha-2\beta) > 0$  を満たす。この場合界面接合端部  $x/W = 1$  で  $\sigma_y \rightarrow \infty$  となるが図 8(c) とは異なり応力  $\sigma_y$  は  $x/W = 1$  付近で 1 より小さくなる。そして、 $x=0$  では  $\sigma_y = 1$  となり  $F_I = 1$  となる。この場合  $\alpha+2\beta = 0$  を満たすので、図 8(b) と図 8(d) より、 $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta) = 0$  を満たすと  $F_I = 1$  となる。

図 8(e) は  $\alpha=0.1, \beta=-0.2$  の場合の応力分布である。図 8(d) と似ていて、bad pair の条件  $\alpha(\alpha-2\beta) > 0$  を満たし、 $x=0$  では  $\sigma_y > 1$  となり  $F_I > 1$  となる。この場合  $\alpha+2\beta < 0$  を満たすので、図 8(a) と図 8(e) より、 $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta) < 0$  を満たすと  $F_I > 1$  となる。

したがって応力拡大係数  $F_I$  は、図 6(b) に示すように、 $\alpha-2\beta = 0$  と  $\alpha+2\beta = 0$  の 2 つのラインの内方で  $F_I > 1$ 、 $F_I < 1$  が決まる。 $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta) > 0$  のとき  $F_I < 1$  となり、 $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta) = 0$  のとき  $F_I = 1$  となり、 $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta) < 0$  のとき  $F_I > 1$  となる。

表 4 はき裂があるときの応力拡大係数と、き裂がないときの応力の比較を示す。表 4 より、き裂があるときの応力拡大係数  $F_I$  と、き裂がないときの応力  $\sigma_y$  が同じとなるのがわかる。したがって、界面中央き裂を有する接合無限板の応力拡大係数  $F_I$  は、き裂がない接合有限板の  $x=0, y=0$  での応力  $\sigma_y$  の値より求めることができる。これにより、一軸引張の界面き裂の応力拡大係数を求めることが容易になる。



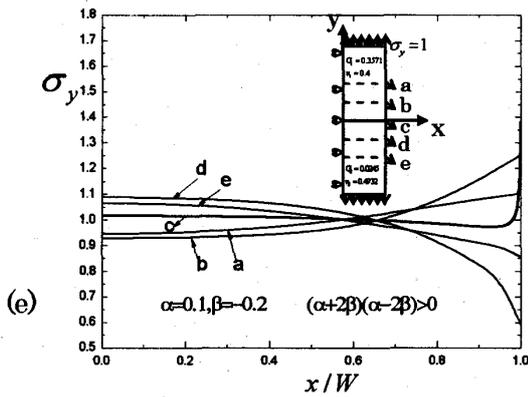


Fig.8 stress distribution  $\sigma_y$  (a)  $\alpha=0.4, \beta=0.3$ , (b)  $\alpha=0.6, \beta=0.3$ , (c)  $\alpha=0.7, \beta=0.1$ , (d)  $\alpha=0.2, \beta=-0.1$ , (e)  $\alpha=0.1, \beta=-0.2$

Table 4 The comparison between  $\sigma_y$  at  $x=0, y=0$  in Fig.7 and  $F_I$  in Fig.2 (a) with  $a/W \rightarrow 0$ .

$\alpha$	$\beta$	$\sigma_y$ at O in Fig.7	$F_I$
0.20	0.0	0.995943	0.995944
0.85	0.0	0.908100	0.908081
0.40	0.3	1.021600	1.021750
0.80	0.4	1.000000	1.000000

### 3.4 無限板中の界面き裂の材料1の横方向引張り

表5に接合有限板の横方向引張りを受けるとき(図2(b)), 三種類の材料組合せ $\alpha=0.3, \beta=0.2$ ,  $\alpha=-0.75, \beta=0$ ,  $\alpha=-0.8, \beta=-0.4$ に対して,  $a/W=1/1620, 1/3240, 1/6480$ の応力拡大係数の結果を示す。これから $a/W < 1/1620$ で解析結果が3桁以上一致することがわかる。

図9に接合無限板(図2(b)の $a/W \rightarrow 0$ に相当)の材料1が横方向引張りを受ける場合の結果を示す。有限要素法により応力を得ることが困難な材料組合せが存在するので, 図中の破線は実線を延長して示

Table 5 Dimensionless stress intensity factors of crack in Fig.2 (b) with different  $a/W$ .

	$a/W$	$\alpha=0.3, \beta=0.2$	$\alpha=-0.75, \beta=0$	$\alpha=-0.8, \beta=-0.4$
$F_I$	1/1620	-0.02540	0.07051	0.17962
	1/3240	-0.02539	0.07056	0.17960
	1/6480	-0.02539	0.07055	0.17959
	$\rightarrow 0$	-0.02539	0.07054	0.17958
$F_{II}$	1/1620	$1.11 \times 10^{-4}$	$2.59 \times 10^{-4}$	$3.28 \times 10^{-4}$
	1/3240	$5.53 \times 10^{-5}$	$1.29 \times 10^{-4}$	$1.64 \times 10^{-4}$
	1/6480	$2.77 \times 10^{-5}$	$6.46 \times 10^{-5}$	$8.19 \times 10^{-5}$
	$\rightarrow 0$	0	0	0

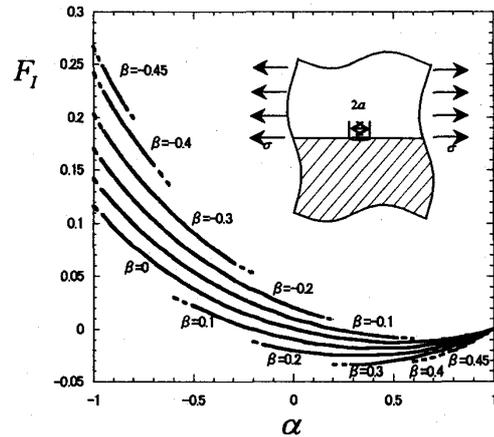


Fig.9  $F_I$  of a central interface crack in a bonded infinite plate under  $\sigma_{x1}^{\infty} = \sigma$  (see Fig.2 (b) with  $a/W \rightarrow 0$ )

した値である。図9では $\beta$ を一定として無次元化応力拡大係数 $F_I$ と $\alpha$ の関係を示している。これまで接合無限板が $x$ 方向に引張りを受けても, 応力拡大係数には影響しないと思われているようであるが, 図9より応力拡大係数 $F_I$ が0とならないことがわかる。図4のように界面上で $\epsilon_{x1} = \epsilon_{x2}$ となる場合を除き, 応力拡大係数は0とならないので注意が必要である。そして,  $\alpha=0.2, \beta=0.3$ のとき最小値 $F_I = -0.034$ をとり,  $\alpha=-1.0, \beta=-0.45$ のとき最大値 $F_I = 0.267$ をとる。無次元化応力拡大係数 $F_{II}$ についても検討した結果, 無限遠方で応力 $\sigma_x = \sigma$ を受ける場合もその値は0になることがわかった。すなわち材料1が遠方で $x$ 方向一軸引張応力 $\sigma=1$ を受ける接合無限板中の界面き裂は, 内圧 $\sigma = -0.034 \sim 0.267$ を受ける接合無限板中の界面き裂に相当する。図9の結果を表6に数値で示す。

### 4. 接合有限板中の中央界面き裂

ここまでは無限板での $a/W \rightarrow 0$ について考察してきた。次は有限板の縦方向引張りを受ける場合の考察を行う。

例として, 有限板 $a/W=0.2$ と $a/W=0.5$ の場合の $F_I, F_{II}$ を図10, 11に示す。有限要素法により応力を得ることが困難な材料組合せが存在するので, 図中の破線は実線を延長して示した値である。図5と図10, 11を比較すると, 傾向は似ているものの図5の接合無限板に対して図10, 11の値が大きくなっていることがわかる。図10, 11のように, 種々の $a/W$ に対して, すべての材料組合せに対する $F_I, F_{II}$ を求

Table 6 Dimensionless stress intensity factor  $F_I$  in Fig.2 (b) with  $a/W \rightarrow 0$ .

$\alpha \backslash \beta$	-0.45	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45
-1.00	(0.267)	(0.242)	(0.203)	(0.170)	(0.142)	(0.116)	—	—	—	—	—
-0.95	0.247	0.224	0.187	0.157	0.130	0.107	—	—	—	—	—
-0.90	0.229	0.208	0.173	0.144	0.119	0.096	—	—	—	—	—
-0.85	0.213	0.193	0.160	0.133	0.109	0.087	—	—	—	—	—
-0.80	(0.199)	0.180	0.148	0.122	0.099	0.078	—	—	—	—	—
-0.75	—	0.167	0.137	0.112	0.090	0.071	—	—	—	—	—
-0.70	—	0.155	0.127	0.103	0.082	0.063	—	—	—	—	—
-0.60	—	(0.131)	0.108	0.086	0.067	0.050	(0.030)	—	—	—	—
-0.50	—	—	0.091	0.071	0.054	0.038	0.022	—	—	—	—
-0.40	—	—	0.076	0.059	0.043	0.028	0.014	—	—	—	—
-0.30	—	—	0.063	0.047	0.033	0.019	0.006	—	—	—	—
-0.20	—	—	(0.053)	0.037	0.024	0.012	0.000	(-0.012)	—	—	—
-0.15	—	—	—	0.033	0.020	0.008	-0.003	-0.015	—	—	—
-0.10	—	—	—	0.028	0.017	0.005	-0.006	-0.017	—	—	—
-0.05	—	—	—	0.024	0.013	0.003	-0.008	-0.019	—	—	—
0.05	—	—	—	0.017	0.007	-0.002	-0.012	-0.022	—	—	—
0.10	—	—	—	0.014	0.005	-0.004	-0.014	-0.023	—	—	—
0.15	—	—	—	0.011	0.002	-0.006	-0.015	-0.024	—	—	—
0.20	—	—	—	(0.009)	0.000	-0.008	-0.016	-0.025	(-0.034)	—	—
0.30	—	—	—	—	-0.003	-0.010	-0.018	-0.025	-0.034	—	—
0.40	—	—	—	—	-0.006	-0.012	-0.018	-0.025	-0.033	—	—
0.50	—	—	—	—	-0.008	-0.013	-0.018	-0.024	-0.030	—	—
0.60	—	—	—	—	(-0.009)	-0.012	-0.017	-0.022	-0.027	(-0.031)	—
0.70	—	—	—	—	—	-0.011	-0.014	-0.018	-0.022	-0.027	—
0.75	—	—	—	—	—	-0.010	-0.013	-0.016	-0.020	-0.024	—
0.80	—	—	—	—	—	-0.009	-0.011	-0.014	-0.016	-0.020	(-0.021)
0.85	—	—	—	—	—	-0.007	-0.009	-0.011	-0.013	-0.016	-0.017
0.90	—	—	—	—	—	-0.005	-0.006	-0.008	-0.009	-0.011	-0.012
0.95	—	—	—	—	—	-0.003	-0.003	-0.004	-0.004	-0.006	-0.006
1.00	—	—	—	—	—	(-0.002)	(0.001)	(0.001)	(0.001)	(-0.001)	(0.001)

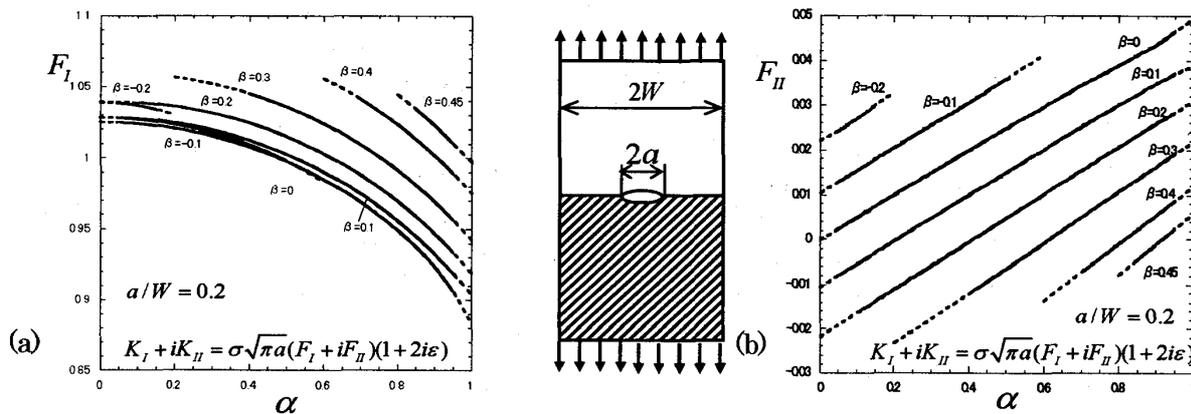


Fig.10 Dimensionless stress intensity factor (a)  $F_I$ , (b)  $F_{II}$  for  $a/W = 0.2$

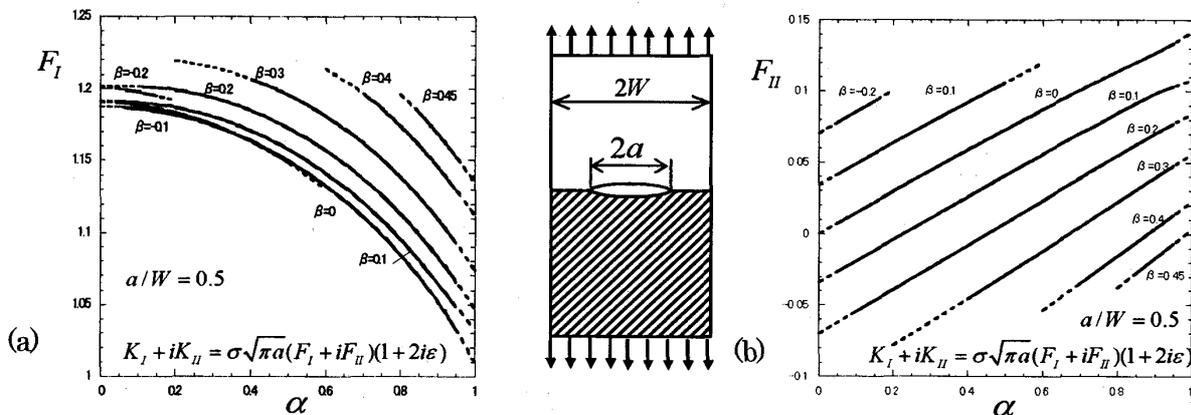
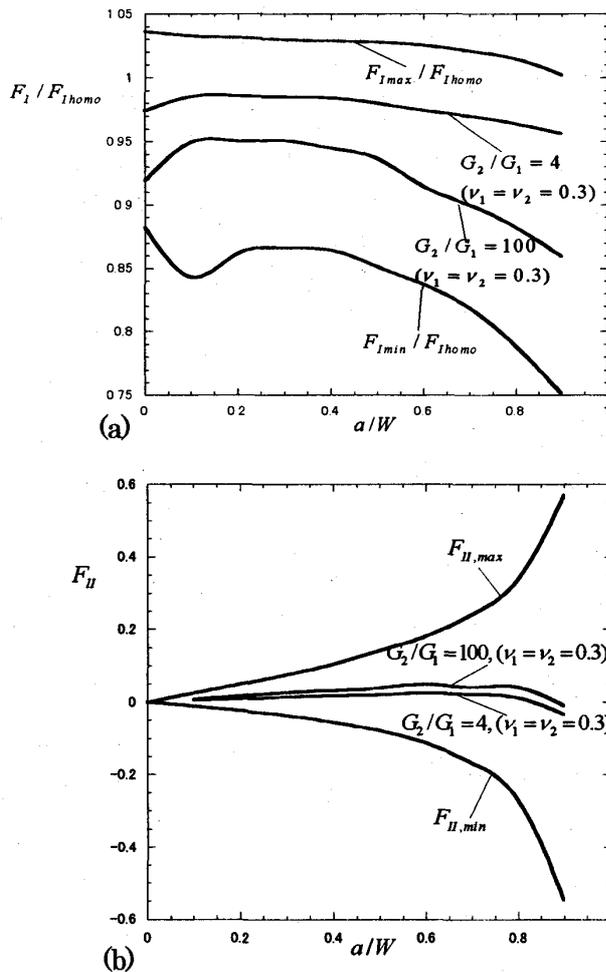


Fig.11 Dimensionless stress intensity factor (a)  $F_I$ , (b)  $F_{II}$  for  $a/W = 0.5$

Table 7 Maximum and minimum values of stress intensity factors  $F_I$ ,  $F_{II}$ 

$a/W$	$F_{I,max}$	$F_{I,min}$	$F_{I,homo}$	Ref. $F_I$ [9] (homogeneous)	$F_{II,max}$	$F_{II,min}$
-0	1.036	0.882	1.000	1.0000	0	0
0.1	1.039	0.848	1.006	1.0060	0.025	-0.011
0.2	1.057	0.883	1.025	1.0246	0.050	-0.023
0.3	1.089	0.916	1.058	1.0577	0.075	-0.037
0.4	1.141	0.959	1.110	1.1094	0.105	-0.056
0.5	1.219	1.010	1.187	1.1867	0.142	-0.079
0.6	1.336	1.091	1.304	1.3033	0.181	-0.113
0.7	1.519	1.218	1.488	1.4882	0.242	-0.168
0.8	1.842	1.432	1.815	1.8160	0.340	-0.272
0.9	2.582	1.936	2.574	2.5776	0.570	-0.545

Fig. 12 (a)  $F_{I,max}/F_{I,homo}$ ,  $F_{I,min}/F_{I,homo}$  vs.  $a/W$  and (b)  $F_{II,max}$ ,  $F_{II,min}$  vs.  $a/W$ 

( $F_{I,homo}$ : Stress intensity factor for homogeneous plate)

め、それぞれ  $a/W$  に対する  $F_I, F_{II}$  の最大値を  $F_{I,max}, F_{II,max}$ 、最小値を  $F_{I,min}, F_{II,min}$  として、表 7 に示す。

図 12 は、図 2(a) の結果の最大値と最小値を、横

軸に  $a/W$  をとって整理した結果である。表 7 より均質材について本研究結果は、石田の研究結果と一致していることがわかる。均質材と比較した  $F_I / F_{I,homo}$  は 4% 以内で最大値を与え  $F_{I,max} / F_{I,homo}$  は  $a/W$  が大きくなると 1 に近づいていく。  $F_{I,min} / F_{I,homo}$  は  $a/W$  が大きくなると下がっていく。  $F_{II}$  の絶対値は  $a/W$  が大きくなると増加する。  $G_2 / G_1 = 4$  と  $G_2 / G_1 = 100$  を例として表 1 に示した過去の研究結果を示す。

## 5. 結 言

本研究では有限要素法解析によるき裂先端節点における応力値を用いて、基準解との比をとることにより応力拡大係数を決定する解析法を界面き裂問題に適用して、その応力拡大係数を考察した。

(1) 接合無限板中の 2 次元中央界面き裂 (図 2(a) で  $a/W \rightarrow 0$ ) の応力拡大係数を任意の材料の組み合わせに対して正確に与えた (図 5, 図 9)。

(2) 遠方で  $y$  方向一軸引張応力  $\sigma = 1$  を受ける接合無限板中の中央界面き裂は、内圧  $\sigma = 0.882 \sim 1.036$  を受ける接合無限板中の界面き裂に相当する。材料 1 が遠方で  $x$  方向一軸引張応力  $\sigma = 1$  を受ける接合無限板中の中央界面き裂は、内圧  $\sigma = -0.034 \sim 0.267$  を受ける接合無限板中の界面き裂に相当する。

(3) 有限板で  $a/W$  を変化させて  $F_I, F_{II}$  の値をとると  $a/W$  が大きくなると、  $F_{I,max}$  は均質材に近づいていき、  $F_{I,min}$  は小さくなっていく。  $F_{II}$  は  $a/W$  が大きくなると、  $F_{II,max}$  と  $F_{II,min}$  の絶対値が大きくなる。

## 謝 辞

数値計算と研究のまとめを手伝って頂いた大学院学生の高石謙太郎氏に深謝する。

## 参考文献

- (1) Yuki, Y., *Mechanics of Interface*, (1992), p. 102, Baifuukan.
- (2) Oda, K., Kamisugi, K., and Noda, N.A., Stress intensity factor analysis of interface cracks based on proportional method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series A*, Vol. 75, (2009), pp. 467-482.
- (3) Matsumoto, T., Tanaka, M. and Obara, R., Stress intensity factor analysis of bimaterial interface cracks based on interaction energy release rate and boundary element

sensitivity analysis , *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol.65, No.638(1999), pp.2121-2127.

(4) Miyazaki, N., Ikeda, T., Soda, T., and Munakata, T., Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol.57, No.541(1991), pp. 2063-2069.

(5) Teranisi, T., and Nisitani, H., Determination of highly accurate values of stress intensity factor in a plate of arbitrary form by FEM, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 65, (1999), pp. 16-21.

(6) Nisitani, H., Teranisi, T., and Fukuyama, K., Stress intensity factor analysis of a biomaterial plate based on the crack tip stress method , *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, Series A, Vol. 69, (2003), pp. 1203-1208.

(7) Bogy, D.B., Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, (1968), pp. 460-466 .

(8) Bogy, D.B., Two edge-bonded elastic wedges of different and wedge angles under surface tractions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, (1971), pp. 377-386 .

(9) Isida, M., *Elastic analysis and stress intensity factor of crack*, (1976), p. 145, Baifuukan.