

応力場の等価性に基づく界面き裂問題の高精度解析法*

小田 和広^{*1}, 野田 尚昭^{*2}

Finite Element Analysis of Interface Crack Problem Based on the Equivalence of Stress Field

Kazuhiro ODA^{*1} and Nao-Aki NODA

^{*1} Dept. of Mechanical and Electrical Engineering, Tokuyama College of Technology
Gakuendai, Shunan-city, Yamaguchi, 745-8585 Japan

This paper deals with the analysis of the stress intensity factor for interfacial crack in dissimilar materials by using the finite element method. In the present method, the stress values at the crack tip calculated by FEM are used under the same mesh pattern and the stress intensity factors are evaluated from the ratio of stress values at the crack-tip-node between a given and a reference problems. This method is based on the fact that the singular stress field near the interface crack tip is controlled by the stress values at the crack tip calculated by FEM. As the reference problems, a single interface crack in an infinite bi-material plate subjected to tension and shear is selected in this study. The usefulness of the present analysis is verified by the comparing the singular stress distribution of the given problem with that of the reference problem. The calculation shows that the present method has the sufficient accuracy in the interface crack problems under various boundary conditions.

Key Words : Stress Field, Interface Crack, Stress Intensity Factor, Finite Element Method

1. 緒 言

西谷らは、有限要素解析によるき裂先端節点の応力値が、き裂先端近傍の特異応力場を代表するパラメータであるという事実に基づいて、簡便・高精度に応力拡大係数を評価することのできる第ゼロ節点法を開発した⁽¹⁾。この手法は応力場の等価性に基づいており、2つの異なるき裂問題でき裂先端節点（第ゼロ節点）の応力値が等しければ、両者のき裂先端近傍の応力分布も一致する。このとき、き裂先端付近の要素分割を2つの問題で一致させることが解析上必要である。

界面き裂問題の場合、振動応力特異性などの解析上の困難があるが、応力場の等価性の概念を用いれば、有限要素法を用いて高精度の解析が可能である⁽²⁾⁽³⁾。著者ら⁽³⁾は、応力拡大係数が既知である接合無限板中の界面き裂問題を基準問題とし、引張荷重およびせん断荷重による第ゼロ節点の応力値を重ね合わせることで、応力拡大係数が未知の界面き裂問題と等しい特異応力場を作り出すことができ、応力拡大係数を高精度に求めることが可能であることを示した。しかしながら、界面き裂の場合、解析条件として要素分割を等しくすることに加え、振動特異性を一致させるために界面き裂長さも基準問題と未知問題で一致させる必要がある。このため、き裂長さが異なる問題を解析する場合には、未知問題のき裂長さに合わせて基準問題のモデルも作成する必要があった。

本研究では、界面き裂長さが異なるモデルの場合でも、き裂先端節点応力値により、界面き裂の応力拡大係数が解析可能であることを示す。また、曲げ応力や熱応力が生じる問題においても、き裂先端節点応力値が振動特異場を規定するパラメータであり、応力場の等価性の概念が有効であることを示す。

* 原稿受付 2011年10月31日

^{*1} 正員, 徳山工業高等専門学校(〒745-8585 山口県周南市学園台)(現 大分大学工学部)

^{*2} 正員, フェロー, 九州工業大学工学研究院
E-mail: oda@tokuyama.ac.jp



2. 解析方法

本研究で用いる方法は、き裂先端節点の応力値を直接利用し、未知問題と基準問題の特異応力場を等しくすることにより応力拡大係数を決定する手法である⁽³⁾。本研究では、応力拡大係数が既知である基準問題の負荷応力 T と S を調節することによって、未知の問題と等しい特異応力場を作り出す。界面き裂先端は混合モード状態となるため、基準問題として、図 1(a) に示す一様な引張応力 T およびせん断応力 S を受ける接合無限板を考える。引張応力 T=1 あるいはせん断応力 S=1 とした場合の基準問題の界面き裂先端節点の FEM 解析値をそれぞれ $\sigma_{y0,FEM}^{T=1}$ 、 $\tau_{xy0,FEM}^{T=1}$ 、 $\sigma_{y0,FEM}^{S=1}$ 、 $\tau_{xy0,FEM}^{S=1}$ とし、応力拡大係数が未知の問題[図 1(b)]のそれを $\sigma_{y0,FEM}$ 、 $\tau_{xy0,FEM}$ と表記すれば、基準問題と未知問題のき裂先端節点応力が等しいという条件より、基準問題に作用させる負荷応力 T, S の値は次式より決定できる。

$$T = \frac{\sigma_{y0,FEM} \cdot \tau_{xy0,FEM}^{S=1} - \sigma_{y0,FEM}^{S=1} \cdot \tau_{xy0,FEM}}{\sigma_{y0,FEM}^{T=1} \cdot \tau_{xy0,FEM}^{S=1} - \sigma_{y0,FEM}^{S=1} \cdot \tau_{xy0,FEM}^{T=1}}, \quad S = \frac{\sigma_{y0,FEM}^{T=1} \cdot \tau_{xy0,FEM} - \sigma_{y0,FEM} \cdot \tau_{xy0,FEM}^{T=1}}{\sigma_{y0,FEM}^{T=1} \cdot \tau_{xy0,FEM}^{S=1} - \sigma_{y0,FEM}^{S=1} \cdot \tau_{xy0,FEM}^{T=1}} \quad (1)$$

ここで、FEM 解析の際、二つの問題でき裂先端付近のメッシュパターンおよび材料定数が等しいという条件が必要である⁽³⁾。

式(1)より求めた T, S の値より、基準問題である異材接合無限板の応力拡大係数は、次式より求められる。

$$K_1^* + iK_2^* = (T + iS)\sqrt{\pi a^*} (1 + 2i\varepsilon), \quad \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left[\frac{\left(\frac{\kappa_1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)}{\left(\frac{\kappa_2}{G_2} + \frac{1}{G_1}\right)} \right] \quad (2)$$

ここで、 G_m は材料のせん断弾性係数、 $\kappa_m = 3 - 4\nu_m$ (平面ひずみ)、 $\kappa_m = (3 - \nu_m)/(1 + \nu_m)$ (平面応力)、 ν_m はポアソン比 (m=1,2) である。式(2)の応力拡大係数は未知の問題のもとの等しいため、

$$K_1 = K_1^*, \quad K_2 = K_2^* \quad (3)$$

以上より、未知の問題の応力拡大係数 K_1 と K_2 を簡便に計算することができる。ここで得られる応力拡大係数は、次のように基準問題の界面き裂長さ $2a^*$ を基準長さとしたものであることに注意する。

$$\sigma_y + i\tau_{xy} = \frac{K_1 + iK_2}{\sqrt{2\pi r}} \left(\frac{r}{2a^*}\right)^{i\varepsilon} \quad (4)$$

基準問題と未知の問題とでき裂長さが異なる場合、式(2)で得られる応力拡大係数を次の式で変換すればよい⁽⁴⁾。

$$\begin{Bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_1^* \\ K_2^* \end{Bmatrix}, \quad Q = \varepsilon \ln(a/a^*) \quad (5)$$

ここで、基準問題の応力拡大係数およびき裂長さ半長には*を付けて表記している。

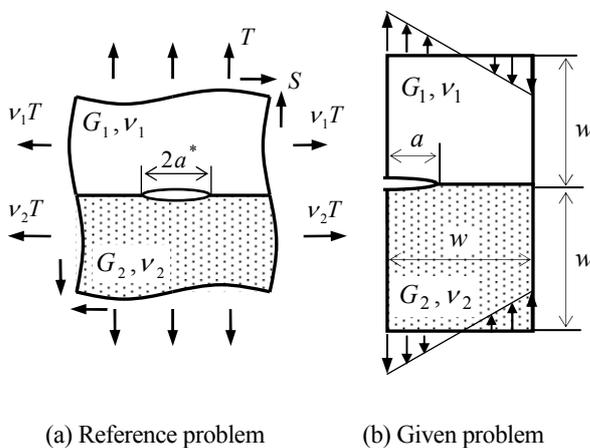


Fig. 1 Treated interface crack problems

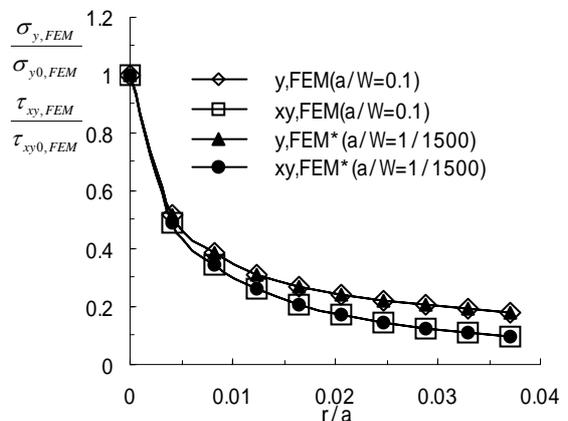


Fig. 2 Relative stress distributions near the interface crack tip as shown in Fig. 1 (a) and (b)

3. 解析結果および考察

解析には、汎用有限要素解析コード MARC を用い、4 節点四角形要素を選択した。なお、要素分割は西谷らの研究⁽¹⁾を参考に規則的なパターンとし、き裂先端の要素サイズ e を便宜上 $e = a/243\text{mm}$ になるようにした。基準問題は、き裂長さ a に対する一辺の長さ w/a が 1500 倍である中央界面き裂を持つ接合無限板とした⁽³⁾。

3・1 界面き裂先端近傍の応力分布

き裂先端節点の応力値が、界面き裂先端近傍の特異応力場を規定するパラメータであることを確認するために、FEM 解析によって得られた界面き裂先端付近の界面上の応力分布を図 2 に示す。図 2 の応力分布は、図 1(b)に示す相対き裂長さ $a/w=0.1$ の接合曲げ試験片の $\sigma_{y,FEM}$ 、 $\tau_{xy,FEM}$ と図 1(a)に示す基準問題の $\sigma_{y,FEM}^*$ 、 $\tau_{xy,FEM}^*$ をき裂先端節点の値で除したものである。図 2 より、両者の応力分布はよく一致しており、き裂先端節点の応力値を 2 つの異なる問題で一致させれば、特異応力場も一致することが確認できる。

3・2 界面き裂長さが異なる基準問題の解析結果

本研究で定義している界面き裂の応力拡大係数は、式(4)に示すように界面き裂長さを基準とする振動項を含んでおり、それを未知問題と基準問題で一致させるために、両者のき裂長さを等しくした FEM モデルを使用する必要があった⁽³⁾。しかしながら、変換式(5)を適用すれば、異なる界面き裂長さを持つ基準問題の応力値から、未知問題のき裂長さに基づく応力拡大係数を算定することが可能である。

例として、界面き裂長さ半長 $a^*=10\text{mm}$ の基準問題の値を用いて、 $a=10, 20, 30\text{mm}$ の一様引張りを受ける界面き裂の無次元化応力拡大係数を、式(5)の関係を用いて変換した結果を表 1 に示す。このとき、未知問題のき裂先端付近の最小要素寸法は、き裂長さに無関係に基準問題の最小要素寸法と等しくした。得られた応力拡大係数は、次式のように無次元化した。

$$F_{1,2}^* = K_{1,2}^* / \sigma \sqrt{\pi a^*}, \quad F_{1,2} = K_{1,2} / \sigma \sqrt{\pi a} \tag{6}$$

表 1 で文献 [3] の値は、基準問題と未知問題のき裂長さが等しい FEM モデルによって解析した結果である。表 1 に示すように、異なるき裂長さの基準問題を用いても、界面き裂先端の応力値から正しい応力拡大係数の値が得られることが確認できる。ただしモデル作成の際、基準問題と未知問題で界面き裂長さが異なる場合でも、き裂先端の最小要素寸法は等しくしなければならないことに注意する。

3・3 接合曲げ試験片の解析結果

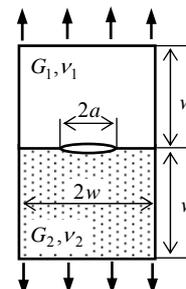
界面き裂長さを変化させた場合の解析例として、 $a/w=0.1 \sim 0.9$ とした接合曲げ試験片の応力拡大係数の解析結果を図 3 に示す。剛性比 $G_2/G_1=1, 10, 100$ 、板厚 $B=1$ 、平面ひずみとし、基準問題はき裂長さ $a^*=10\text{mm}$ のモデルを用い、曲げ試験片の FEM モデルのき裂長さを変化させた。図 3 には、次式のように定義される無次元化応力拡大係数 Y_1 および Y_2 を示す⁽⁵⁾。式(7)で、 M は試験片に作用する曲げモーメントである。

$$Y_{1,2} = K_{1,2} (w-a)^{3/2} B / M \tag{7}$$

図 3 より、相対き裂長さ a/w 0.7 程度までは、式(7)の無次元化応力拡大係数 Y_1 および Y_2 は剛性比にあまり影響されないことがわかる。

Table 1 Normalized stress intensity factors of interface crack in finite plate with different crack length $2a$ ($G_2/G_1=2, \nu_1=\nu_2=0.3$, Plane stress)

a/w	0.1 (a=10mm)	0.2 (a=20mm)	0.3 (a=30mm)
F_1^*	1.001	1.443	1.826
F_1	1.001	1.019	1.052
Ref.[3]	1.001	1.019	1.052
F_2^*	-0.072	-0.062	-0.047
F_2	-0.072	-0.070	-0.071
Ref.[3]	-0.072	-0.071	-0.071



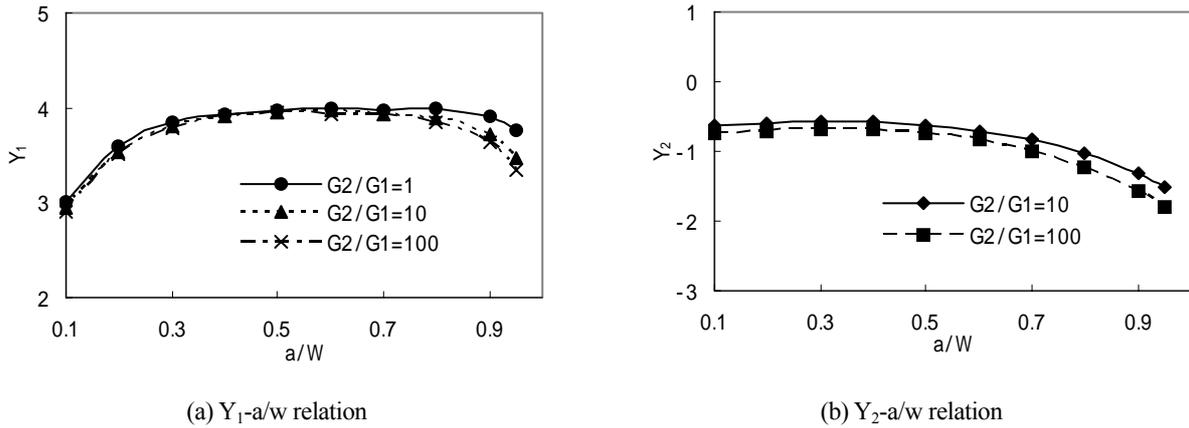


Fig. 3 Normalized stress intensity factor for the interface crack in bonded specimen under pure bending ($\nu_1=\nu_2=0.3$, Plane strain)

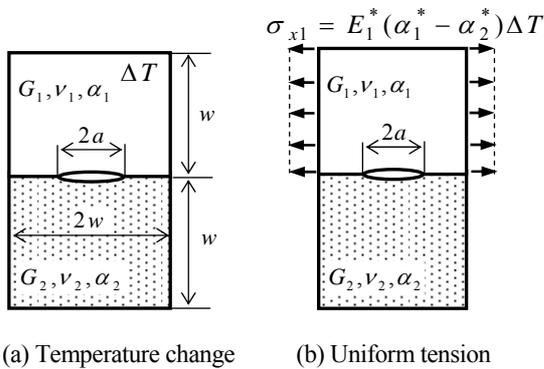


Fig. 4 Bonded specimens with center interface crack

Table 2 Crack tip stress values calculated by FEM ($G_2/G_1=10, \alpha_2/\alpha_1=0.1, \nu_1=\nu_2=0.3, a/w=0.1, e/a=1/243$)

Stress component	Temperature change	Uniform tension
	Fig.4(a)	Fig.4(b)
$\sigma_{y0,FEM}$	351.753	351.753
$\tau_{xy0,FEM}$	-51.438	-51.438

3・4 熱応力を受ける接合試験片の解析結果

図 4(a)に示す一様な温度変化 T による熱応力を受ける中央界面き裂に対し、剛性比 $G_2/G_1=10$ 、線膨張係数比 $\alpha_2/\alpha_1=0.1$ 、相対き裂長さ $a/w=0.1$ として解析を行った。図 4(a)の熱応力問題は、図 4(b)の x 方向引張りを受ける問題と界面上の応力分布が等価となる。このとき、 σ_{x1} のヤング率および線膨張係数は次のようになる。

$$\begin{cases} E_m^* = E_m, & \alpha_m^* = \alpha_m : (plane\ stress) \\ E_m^* = E_m / (1 - \nu_m^2), & \alpha_m^* = (1 + \nu_m) \alpha_m : (plane\ strain) \end{cases}, (m=1, 2) \quad (8)$$

表 2 に、同じメッシュパターンを用いて、図 4(a)と(b)の問題のき裂先端節点応力値を比較した結果を示す。表より、両問題のき裂先端節点の応力値が完全に一致していることが確認できる。これより、熱応力が生じる場合でも、き裂先端節点の FEM 応力値が、界面き裂先端の特異応力場を規定するパラメータとなっており、熱応力の問題も 2 章で説明した手法で応力拡大係数が簡便・高精度に解析できることがわかる。

文 献

- (1) 西谷弘信, 川村壮司, 藤崎渉, 福田孝之, “ F E M による板材の応力拡大係数と応力集中係数の高精度決定法 ”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 65, No.629 (1999), pp. 26-31.
- (2) 西谷弘信, 寺西高広, 福山慶介, “ 第ゼロ節点法による異種接合材の応力拡大係数解析 ”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 69, No.684 (2003), pp. 1203-1208.
- (3) 小田和広, 神杉一吉, 野田尚昭, “ 比例法による界面き裂の応力拡大係数解析 ”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 75, No. 752 (2009), pp. 476-482 .
- (4) 池田徹, 菟原裕二, 中村敦, 宮崎則幸, “ 混合モード界面き裂の破壊と屈曲条件 ”, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 66, No.644, (2000), pp. 796-803 .
- (5) 石田誠, “ き裂の弾性解析と応力拡大係数 ”, 培風館 (1976), p. 180 .