

This is "Advance Publication Article".

Category: Paper

Received date: 23 January 2025

Accepted date: 28 October 2025

J-STAGE Advance publication date: 10 January 2026

Publication date: *****

Corresponding author: Kazuhiro ODA (E-mail address: oda-kazuhiro@oita-u.ac.jp)

DOI: 10.14953/jjsde.2025.3043

Copyright©2026 Japan Society for Design Engineering

フィレット部を有する段付き丸棒の引張りと曲げに対して 現在用いられている応力集中係数の誤差について

Error in Stress Concentration Factors Currently Used for Tension and Bending of Stepped Round Bar with Fillet

小田 和広*1, 高畑 泰幸*2, 山下 新太*3, 野田 尚昭*4
(Kazuhiro ODA) (Yasuyuki TAKAHATA) (Arata YAMASHITA) (Nao-Aki NODA)

Abstract

The stress concentration factor (SCF) of a stepped round bar with fillets is fundamental in machine design and SCF diagrams are included in many textbooks and handbooks on mechanics of materials and machine design. Among them, Peterson's handbook, for example, is continuously used around the world. Noda et al. analyzed such stepped round bar under tension and bending accurately by using the body force method and proposed a calculation formula for the entire range of geometries. However, the above textbooks and handbooks still indicate different stress concentration diagrams throughout. Therefore, in this study, for the entire range of fillet shape dimensions including the range of very small fillet radius, Peterson's results are compared with Noda and Takase's results to clarify the error. As a result, Peterson's stress concentration factor is found to have an error of up to 25% in tension and up to 15% in bending. The errors of stress concentration factors in other books are also discussed.

Key words

stress concentration factor, stepped round bar, shoulder fillet, tension, bending, Peterson's handbook

* 1 正会員, 大分大学工学部(〒870-1192 大分市旦野原700番地), oda-kazuhiro@oita-u.ac.jp

* 2 非会員, ヤンマーホールディングス株式会社(〒530-0013 大阪市北区茶屋町1-32), yasuyuki_takahata@yanmar.com

* 3 非会員, 大分大学大学院(〒870-1192 大分市旦野原700番地)

* 4 非会員, 九州工業大学工学研究院(〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1), nao592noda@gmail.com

1 緒言

図1に示すフィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数は、機械設計の基本問題として多くの材料力学や材料強度ならびに機械設計の教科書やハンドブックに示されている^{1)~11)}。その応力集中係数 K_t は、通常、最小断面の公称応力 σ_{net} と、図1(c)に示すようなフィレット部の接線方向に生じる最大応力 σ_{max} から、式(1)で与えられる。

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{net}}, \quad \sigma_{net} = \frac{4P}{\pi d^2} \text{ (under tension)}, \quad \sigma_{net} = \frac{32M}{\pi d^3} \text{ (under bending)} \quad (1)$$

ここで、 P は段付き丸棒に作用する引張力、 M は段付き丸棒に作用する曲げモーメント、 d は最小断面の直径である(図1参照)。図1の応力集中係数は、故障が許されない船用商品や産業機械においても、極めて重要

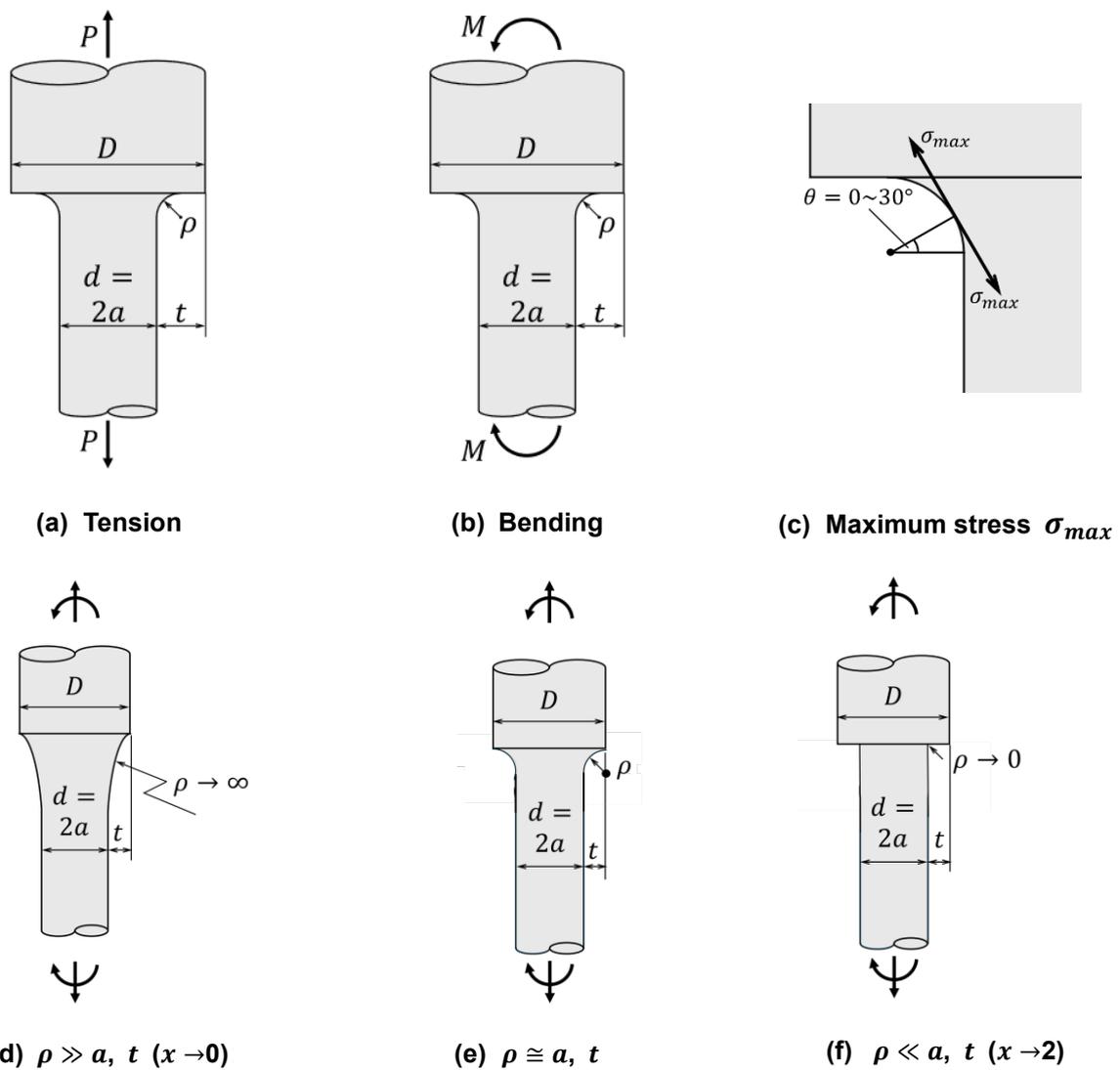


Fig. 1 Stepped round bar with fillet with the definition of stress concentration factors K_t based on the nominal stress at the minimum section σ_{net}

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{net}}, \quad \sigma_{net} = \frac{4P}{\pi d^2} \text{ (under tension)}, \quad \sigma_{net} = \frac{32M}{\pi d^3} \text{ (under bending)}$$

である。その設計では、JIS 規格で設計されている止め輪¹²⁾やベアリング¹³⁾などの部品の組み立ての都合から、フィレット部半径 ρ を大きくすることができない場合が多い。そのため、十分なフィレット部半径 ρ を確保することができない場合も多く、そのような場合には、大きな応力集中が発生する。このため、 ρ が小さい範囲の上記の文献^{11)~14)}の応力集中係数の誤差によって、予期せぬ破損に繋がることも考えられる。

野田らは、**図 1**の問題について、体積力法によって丸棒引張り、丸棒曲げの各種問題についてフィレット部の正確な解析を行っている^{3), 15)~19)}。また、それらの結果について行った物理的・力学的な考察を基にして、フィレット部の曲率半径が極端に小さい場合や、段付き部の高さが極端に大きな場合までも含めた、フィレット部の形状の全範囲に対して、応力集中係数を便利に利用できるような計算式を提案している⁴⁾。一方で、上述の教科書やハンドブックには、依然として、野田らの結果とは異なる応力集中線図が示されている。これらの線図は、フィレット部を有する段付き丸棒の、限られた形状寸法に対して与えられたものであるが、実際に設計や研究にこれらの応力集中線図が用いられることも多く、その際、誤差に対する注意はほとんどなされていない。その一例として、Peterson のハンドブックは、1974 年に発行され¹⁾、その後版を重ねながら世界的に利用され続けており、1997 年に発行された第 2 版²⁾からは近似公式と、それから得られる応力集中線図が示されている。**図 1**の段付き丸棒に対して、Peterson の近似公式は以下のように与えられている。

$$K_t^P = C_1 + C_2 \left(\frac{2t}{D}\right) + C_3 \left(\frac{2t}{D}\right)^2 + C_4 \left(\frac{2t}{D}\right)^3 \quad (2)$$

Peterson はこの C_1, C_2, C_3, C_4 を以下に示すような簡便な近似式で与え²⁾、機械設計に便利に用いられている。**表 1**に丸棒引張りに関するパラメータ $C_1 \sim C_4$ を、**表 2**に丸棒曲げに関するパラメータ $C_1 \sim C_4$ を示す²⁾。

Table 1 Parameters for Peterson's approximation formula in Eq.(2) under tension²⁾

	$0.1 \leq t/\rho \leq 2.0$	$2.0 \leq t/\rho \leq 20.0$
C_1	$0.926 + 1.157\sqrt{t/\rho} - 0.099t/\rho$	$1.200 + 0.860\sqrt{t/\rho} - 0.022t/\rho$
C_2	$0.012 - 3.036\sqrt{t/\rho} + 0.961t/\rho$	$-1.805 - 0.346\sqrt{t/\rho} - 0.038t/\rho$
C_3	$-0.302 + 3.977\sqrt{t/\rho} - 1.744t/\rho$	$2.198 - 0.486\sqrt{t/\rho} + 0.165t/\rho$
C_4	$0.365 - 2.098\sqrt{t/\rho} + 0.878t/\rho$	$-0.593 - 0.028\sqrt{t/\rho} - 0.106t/\rho$

Table 2 Parameters for Peterson's approximation formula in Eq.(2) under bending²⁾

	$0.1 \leq t/\rho \leq 2.0$	$2.0 \leq t/\rho \leq 20.0$
C_1	$0.947 + 1.206\sqrt{t/\rho} - 0.131t/\rho$	$1.232 + 0.832\sqrt{t/\rho} - 0.008t/\rho$
C_2	$0.022 - 3.405\sqrt{t/\rho} + 0.915t/\rho$	$-3.813 + 0.968\sqrt{t/\rho} - 0.260t/\rho$
C_3	$0.869 + 1.777\sqrt{t/\rho} - 0.555t/\rho$	$7.423 - 4.868\sqrt{t/\rho} + 0.869t/\rho$
C_4	$-0.810 + 0.422\sqrt{t/\rho} - 0.260t/\rho$	$-3.839 + 3.070\sqrt{t/\rho} - 0.600t/\rho$

そこで、本研究では、機械設計によく用いられている Peterson の近似式²⁾と野田・高瀬の計算式⁴⁾の結果を数値で比較する。特に、フィレット半径 ρ が小さい範囲まで含めた、フィレットの形状寸法の全範囲に対しても、両者を比較検討し、Peterson の誤差を明らかにする。また、他の教科書やハンドブックの応力集中係数の誤差についても議論する。

2 本論文で用いる記号のまとめ

本論文で使用する記号をまとめて以下に示す. 特に, 野田・高瀬の計算式⁴⁾の表現に対応したパラメータを用いる.

σ_{max} : フィレット部に生じる接線方向の最大応力 (図 1(c)参照)

σ_{net} : 段付き丸棒の最小断面の公称応力 (式(1)参照)

ρ : フィレットの曲率半径 (フィレット部の曲率半径のパラメータとしては相対値 a/ρ または ρ/a を用いる).

t : フィレットの段の高さ (フィレット部の段の高さのパラメータとしては段の高さの相対値 $2t/D$ を用いる).

a : フィレット底の最小断面の半径, $d = 2a$

D : 段付き丸棒の直径 (図 1 参照)

d : 最小断面の直径, $d = 2a$

$\xi := \sqrt{t/\rho}$

$\eta := \sqrt{\rho/t}$

$\lambda := 2t/D$

x : $a/\rho \leq 1.0$ のとき $x = a/\rho$, $\rho/a \leq 1.0$ のとき $x = 2 - \rho/a$, 曲率半径のパラメータであり, フィレット部の曲率半径は $\rho = 0 \sim \infty$ を $x = 0 \sim 2.0$ の範囲で便利に表現可能である.

K_t^P : Peterson の応力集中係数²⁾

K_t^{NT} : 野田・高瀬の応力集中係数⁴⁾

K_{td} : 段の高さが無限に大きい場合のフィレットの応力集中係数 (段付き丸棒の極限 $2t/D \rightarrow 1$ の極限の応力集中係数であるが, 図 2 に示すようにフィレット部を有する段付き丸棒の $2t/D \leq 0.7$ では $K_t \approx K_{td}$)

K_{tH} : 深い回転双曲面切欠きの応力集中係数

K_{ts} : 段の高さが小さいフィレット部を有する段付き半無限板 (図 3(a)) の応力集中係数

K_{tE} : 一様引張りを受ける無限板の円孔の片縁に表面力が作用する場合の応力集中係数 $K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho}$ (図 3 に示すようにフィレット部を有する段付き丸棒の $2t/D \rightarrow 0$ の極限の解を近似的に与える)

K_{tN} : ノイバーの三角公式($m = 2$)¹⁴⁾を拡張したノイバーの拡張三角公式($m \neq 2$), $K_{tN} = (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / ((K_{ts} - 1)^m + (K_{td} - 1)^m)^{\frac{1}{m} + 1}$, 誤差を小さくするように $m \neq 2$ に拡張した公式である.

3 野田・高瀬の提案したフィレットを有する段付き丸棒の形状寸法の全範囲で与える計算式 K_t^{NT}

現状でよく用いられている応力集中係数の誤差を明らかにするため, 本節では, 野田らがフィレットを有する段付き丸棒の応力集中係数⁴⁾を, 形状寸法の全範囲で与えた計算式をまとめて示す. 以下で, K_t^{NT} は野田・高瀬の応力集中係数 K_t^{NT} であり, 最小断面の公称応力に基づくものであり, K_t^{NT} の値を精度良く与えるためノイバーの拡張三角公式との比 K_t^{NT}/K_{tN} を多項式にして与えている.

その計算式の多項式の表現では, 図 1 の形状の全範囲の応力集中係数を与えるため, 式(3)で定義されるパラメータ x と式(4)で定義される $\lambda = 2t/D$ を用いる. パラメータ x は $x = 0 \sim 2$ の範囲で変化するが, これによってフィレット部の曲率半径は $\rho = 0 \sim \infty$ を便利に表現可能である. また, 段の相対高さ $\lambda = 2t/D$ を用いることで, 段付き部の高さの全範囲は $\lambda = 0 \sim 1$ の範囲で表される.

$$x = a/\rho \text{ when } a/\rho \leq 1.0 \text{ and } x = 2 - \rho/a \text{ when } \rho/a \leq 1.0 \quad (3)$$

$$\lambda = 2t/D \quad (4)$$

前述したように、 x はフィレット半径の鋭さを表すパラメータであり、 $x = 0$ は $\rho \rightarrow \infty$ を表しており、 $x = 2$ は $\rho \rightarrow 0$ を表している。すなわち、 $0 \leq x \leq 2$ で切欠き半径の全範囲を与える。また、 $\lambda = 2t/D$ は段差の相対的な大きさを表しており、 $\lambda \rightarrow 0$ は段差がない場合 $t \rightarrow 0$ であり、 $\lambda \rightarrow 1$ は段差が大きい場合の極限 $t \rightarrow D/2$ である。すなわち、 $0 \leq 2t/D \leq 1$ で段の高さ t の全範囲を与える。図 1(d), (e), (f) にフィレット付き段付き丸棒の形状が極端の場合まで含めた形状の例を示す。たとえば、図 1(d) の形状 ($\lambda = 2t/D \rightarrow 0$, $x \rightarrow 0$) の応力集中係数は、平滑材の疲労試験片における応力集中係数として重要である。上記のパラメータを用いて、図 1(d), (e), (f) の場合まで含めた、形状の全範囲の近似式を以下に示す。なお、本論文で示す計算式は原著論文⁴⁾のミスプリントを修正したものである。なお、このミスプリントを修正した計算式の MATLAB コードはインターネット上に公開しており、文献⁴⁾に基づいて検索しダウンロードすれば、そのまま利用可能である。

1) 丸棒引張り⁴⁾

$$\begin{aligned} K_t^{NT}/K_{tN} = & (1.0002 - 0.000075706x - 0.000031717x^2) \\ & + (0.18663 + 0.22307x - 0.15343x^2)\lambda \\ & + (-1.2614 + 0.31017x + 0.38291x^2)\lambda^2 + (2.9954 - 3.4199x + 0.37239x^2)\lambda^3 \\ & + (-3.0174 + 5.4016x - 1.4530x^2)\lambda^4 + (1.0969 - 2.5157x + 0.85150x^2)\lambda^5 \end{aligned} \quad (5)$$

2) 丸棒曲げ⁴⁾

$$\begin{aligned} K_t^{NT}/K_{tN} = & (1.0005 + 0.0017219x - 0.0010527x^2) + (0.16467 + 0.19626x - 0.031310x^2)\lambda \\ & + (-1.1176 - 0.87011x + 0.68405x^2)\lambda^2 + (2.6857 + 1.0239x - 1.9163x^2)\lambda^3 \\ & + (-2.6520 - 0.22573x + 2.0113x^2)\lambda^4 \\ & + (0.91873 - 0.12401x - 0.74777x^2)\lambda^5 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 K_{tN} はノイバーの三角公式¹⁴⁾ ($m = 2$) を拡張したもの⁴⁾であり、 $m = 1.8$ (引張り)、 $m = 1.6$ (曲げ) は誤差を最小とするように決められた。

$$K_{tN} = \left[\frac{(K_{ts} - 1)(K_{td} - 1)}{\{(K_{ts} - 1)^m + (K_{td} - 1)^m\}^{\frac{1}{m}}} \right] + 1, \quad (7)$$

$$m = 1.8 \text{ (under tension), } m = 1.6 \text{ (under bending)}$$

ここで、式(7)の K_{td} は、図 2(b)に示す段の高さが無限に大きい場合 ($2t/D \rightarrow 1$ の極限) のフィレットの応力集中係数である。図 2に示すように、 $2t/D \geq 0.7$ では、図 2(a)の応力集中係数 K_t は、図 2(b)の高さが無限に大きいフィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数 K_{td} で良く近似できる。以下で K_{tH} は深い回転双曲面切欠きの応力集中係数¹⁴⁾である。すなわち、 K_{td} の計算式を精度良く与えるため、 K_{td}/K_{tH} に対して多項式の表現を与えている⁴⁾。

1) 丸棒引張り⁴⁾

$$\frac{K_{td}}{K_{tH}} = 1.0007 - 0.10457x + 0.12152x^2 - 0.11645x^3 + 0.08214x^4 - 0.023524x^5 \quad (8)$$

$$K_{tH} = \frac{\frac{a}{\rho} \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 0.8 \frac{a}{\rho} + 1.3 \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right)}{\frac{a}{\rho} + 0.6 \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 2} \quad (9)$$

2) 丸棒曲げ⁴⁾

$$\frac{K_{td}}{K_{tH}} = 0.99891 - 0.067502x + 0.051582x^2 - 0.019304x^3 \quad (10)$$

$$K_{tH} = \frac{\frac{3}{4} \left(\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1 \right) + 3 \frac{a}{\rho} - \frac{1.3}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1}}{3 \left(\frac{a}{\rho} + 1 \right) + 2.2 \sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + \frac{1.3}{\sqrt{\frac{a}{\rho} + 1} + 1}} \quad (11)$$

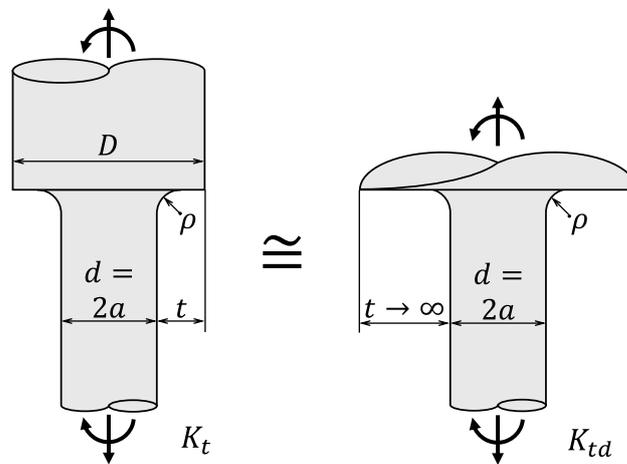


Fig. 2 $K_t \cong K_{td}$ when $2t/D \geq 0.7$

一部の読者は $2t/D \rightarrow 1$ は段付き軸の形状として存在しないので、例えばピーターソンの誤差を $2t/D \rightarrow 1$ まで拡張して議論する意味があるのか？という疑問をもつかもかもしれない。ノイバーは $2t/D \rightarrow 1$ の双曲面切欠きの解（1933年）や回転双曲面切欠きの解（1937年）を求めた後、ただちに切欠きの応力集中問題に対するノイバー三角則（式7）を提案した（1937年）¹⁴⁾。このことから明らかのように、 $2t/D \rightarrow 1$ の極限の解 K_{td} は、通常の段付き丸棒の応力集中係数 K_t と密接な関係があり、 $2t/D \rightarrow 1$ の解の存在によって、通常の $2t/D$ の段付き丸棒の応力集中係数の見積もりが可能となっている。実際、後述する図4や図5の実線（ピーターソンの公式の有効範囲）に示すように、ピーターソンの公式もかなりの範囲で $2t/D \rightarrow 1$ の範囲まで有効とな

っている。

また、式(7)の K_{ts} は、**図 3(a)**に示す段の高さが小さい場合($2t/D \rightarrow 0$ の極限)のフィレットを有する半無限板の応力集中係数であり、以下のように表される。ここで、 K_{tE} は、**図 3(d)**に示す一様引張りを受ける無限板中のだ円孔の片縁に表面力 σ が作用する場合の応力集中係数 $K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho}$ である。**図 3(a)**の問題は、半無限板の自由縁で $\tau=0$ となるため、**図 3(b)**の縁をまるめた長方形孔の問題に近似的に等価となる。**図 3(b)**の問題は等価だ円の概念より**図 3(c)**に置き換えられるが、長方形孔が荷重軸方向に無限に長いものであるため、長方形孔の下縁で応力を解放することの影響はほとんど無視できる、このため、孔縁で応力自由のだ円孔の応力集中係数 $K_{tE} = 1 + 2\sqrt{t/\rho}$ ではなく、 $K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho}$ がよい近似となる。 K_{ts} の計算式を精度良く与えるため、 K_{ts}/K_{tE} に対して多項式の表現を与えている。

1) $0 \leq t/\rho \leq 1$ のとき

$$\frac{K_{ts}}{K_{tE}} = 1.000 + 0.159\xi - 0.127\xi^2 + 0.050\xi^3, \quad \xi = \sqrt{\frac{t}{\rho}}, \quad K_{tE} = 1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}} \quad (12)$$

2) $0 \leq \rho/t \leq 1$ のとき

$$\frac{K_{ts}}{K_{tE}} = 1.106 + 0.016\eta - 0.059\eta^2 + 0.019\eta^3, \quad \eta = \sqrt{\frac{\rho}{t}}, \quad K_{tE} = 1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}} \quad (13)$$

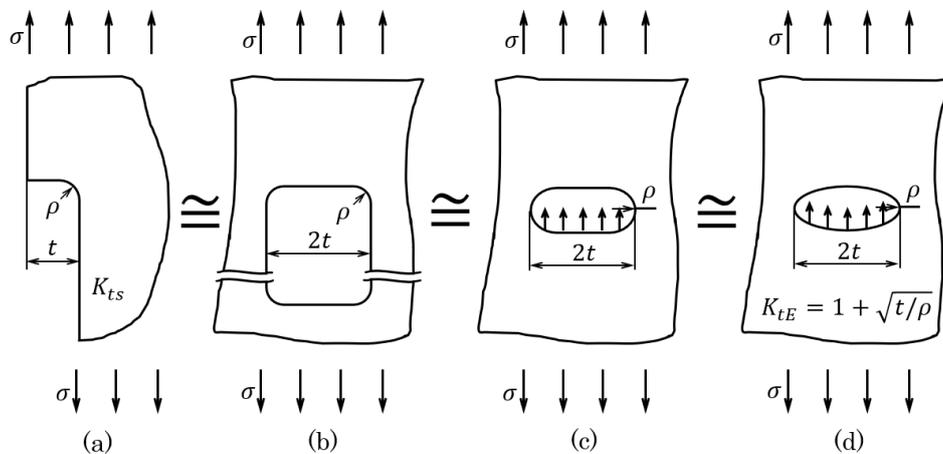


Fig. 3 SCF of stepped round bar with a fillet in a semi-finite plate K_{ts} can be approximated by $K_{tE} = 1 + \sqrt{t/\rho}$

4 Peterson の応力集中係数 K_t^P と野田・高瀬の応力集中係数 K_t^{NT} との比 K_t^P/K_t^{NT}

図 4 は段付き丸棒の引張り(**図 1(a)**)に関する第 1 章で示した Peterson の応力集中係数 K_t^P と第 2 章で示した野田・高瀬の応力集中係数 K_t^{NT} との比 K_t^P/K_t^{NT} をまとめたものである。ここでは、段付き丸棒のすべての形状寸法、すなわち $x = 0 \sim 2$, $2t/D = 0 \sim 1$ に対して K_t^P/K_t^{NT} の比を考察している。後述する**図 6**に示すように、実際の設計では $x \approx 2$ のフィレット部半径 ρ が極めて小さい場合も必要とされている。また、 $2t/D \approx 0$ の段の高さが小さい場合、ならびに、 $2t/D \approx 0.7$ の段の高さが大きい場合(このとき $K_t \cong K_{td}$, **図 2**参照)も

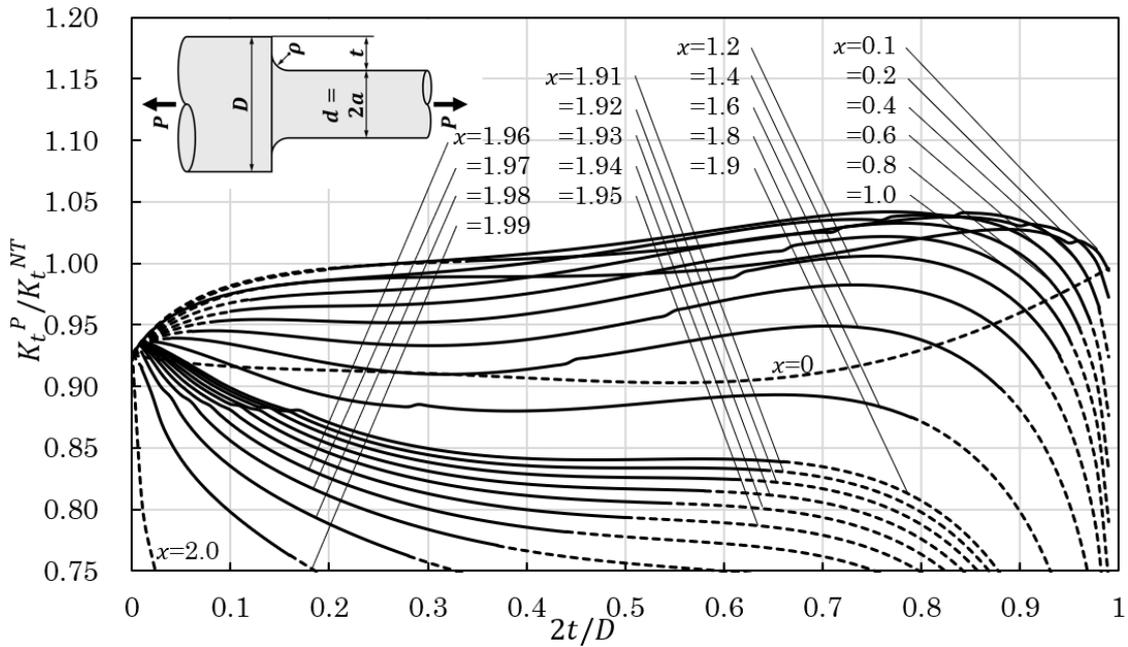


Fig. 4 K_t^P/K_t^{NT} for fixed x under tension. Here, $x = a/\rho$ when $a/\rho \leq 1.0$ and $x = 2 - \rho/a$ when $\rho/a \leq 1.0$, K_t^P is provided in Eq. (1) and K_t^{NT} is provided in Eqs. (2) ~ (13). The solid line shows the results within the range of applicability of Peterson's approximation formula, and the dashed line shows the results outside of the range of applicability of Peterson's approximation formula

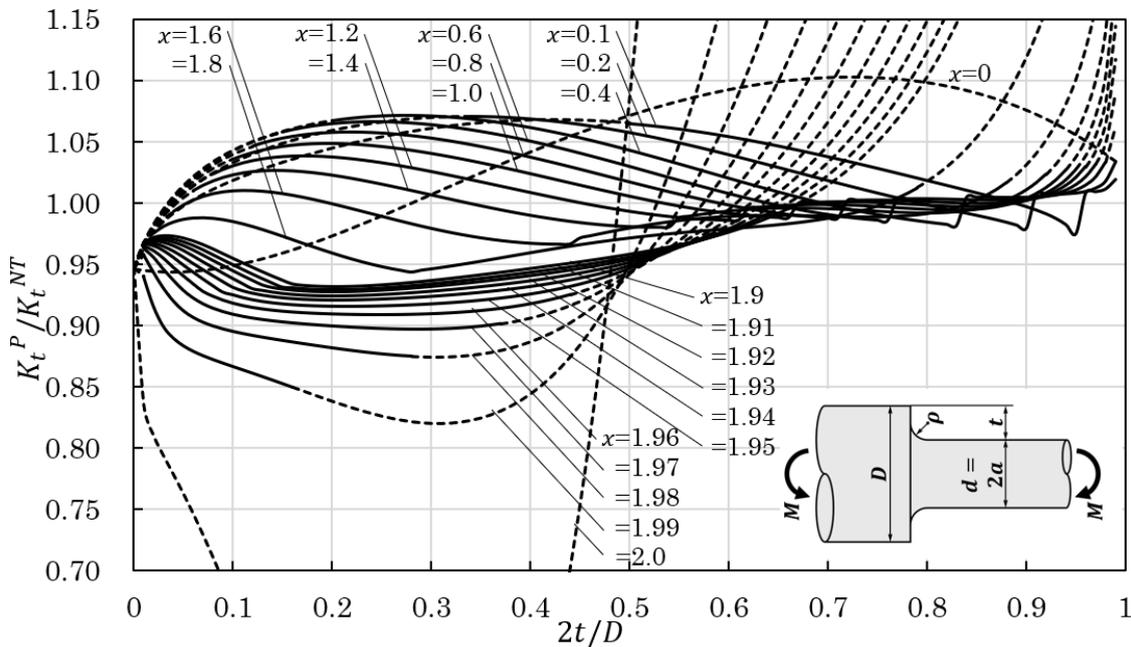


Fig. 5 K_t^P/K_t^{NT} for fixed x under bending. Here, $x = a/\rho$ when $a/\rho \leq 1.0$ and $x = 2 - \rho/a$ when $\rho/a \leq 1.0$, K_t^P is provided in Eq. (1) and K_t^{NT} is provided in Eqs. (2) ~ (13). The solid line shows the results within the range of applicability of Peterson's approximation formula, and the dashed line shows the results outside of the range of applicability of Peterson's approximation formula

応力集中係数の評価が必要とされている。このことから、 $x = 0 \sim 2$, $2t/D = 0 \sim 1$ の全範囲に対して、現状で用いられている資料の誤差を明らかにすることは極めて有用である。図 4 の実線は Peterson の近似式の適用範囲の結果であり、破線は Peterson の近似式の適用範囲外まで拡張した結果である。図 4 より、Peterson の応力集中係数 K_t^P には 5% 程度まで過大な値を与える場合と、-25% 程度まで過小な値を与える場合があることが分かる。

図 5 は段付き丸棒の曲げ (図 1(b)) に関する第 1 章で示した Peterson の応力集中係数 K_t^P と第 2 章で示した野田・高瀬の応力集中係数 K_t^{NT} をまとめたものである。実線は Peterson の近似式の適用範囲の結果であり、破線は Peterson の近似式の適用範囲外まで拡張した結果である。図 5 より、Peterson の応力集中係数 K_t^P には 7% 程度まで過大な値を与える場合と、-15% 程度まで過小な値を与える場合があることが分かる。

なお、図 4 と図 5 では $x \rightarrow 2$ の結果が示されているが、 $x \rightarrow 2$ で $K_t^P \rightarrow \infty$, $K_t^{NT} \rightarrow \infty$ となる。しかし、それらの比 $K_t^P / K_t^{NT} \rightarrow \text{有限}$ ($x \rightarrow 2$) となる。付録 A に示すように、本論文の議論のベースとなる文献 4) の精度には十分な検討がなされている。一方、 K_t^P は何らかの誤差が含まれているので $K_t^P / K_t^{NT} \rightarrow 1$ とならず有限値となる。

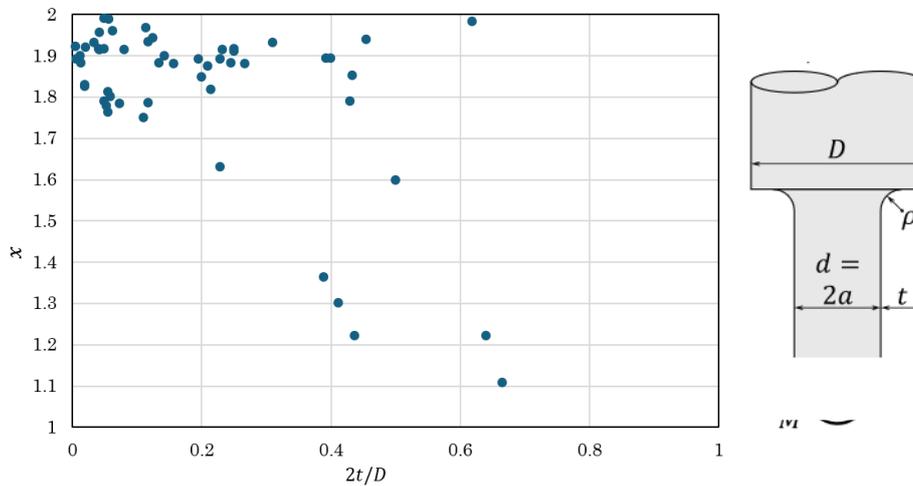


Fig. 6 Examples of stepped round bar geometry used in the mechanical design

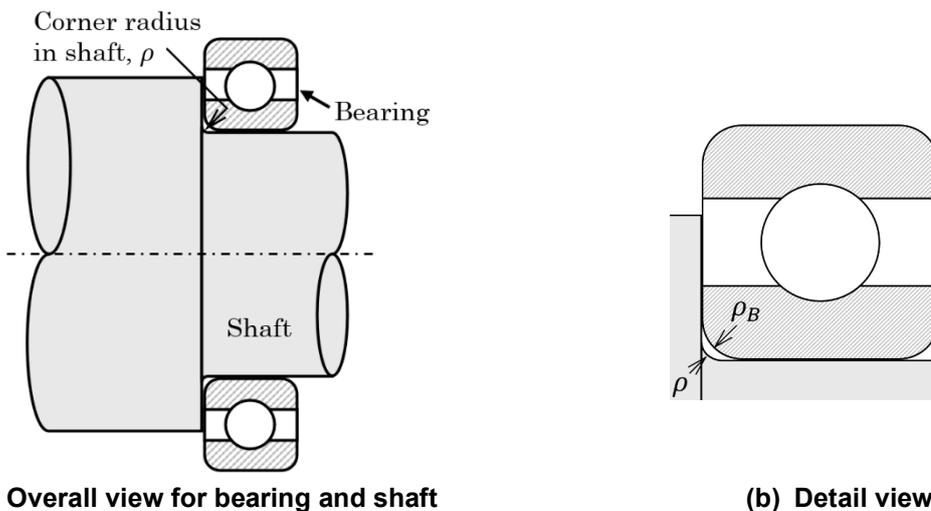


Fig. 7 Fillet root radius ρ in stepped round bar that should be smaller than bearing root radius ρ_B

図6は、実際の機械設計に用いられた段付き丸棒の形状寸法の例を示したものである。船用機械のエンジンや農業機械のトラクター、コンバイン、田植え機のミッションなどに使用しているシャフトの図面より、JIS規格に基づいて設計された軸の寸法を読み取ったものである^{12), 13), 20), 21)}。図6より、 $2.0 \geq x \geq 1.7$ ($0 \leq \rho/a \leq 0.3$)とフィレットの曲率半径 ρ が小さい形状の段付き丸棒が、多く使用されていることがわかる。これは、軸の設計において、止め輪や軸受けなどJIS規格に基づいた部品(図7)では、組み立ての際、 ρ を大きく取れないためである。このことを考慮して、 ρ が小さい箇所の応力集中を低減するための手法が提案されているが⁵⁾、加工の労力やコスト面から採用されないことが多い。図4、図5より、Petersonの応力集中係数 K_t^P は、 $x = 1.7 \sim 2.0$ の範囲では、野田・高瀬の近似式との誤差が大きいため、軸の設計に利用するには、十分な注意が必要である。

5 他の設計資料の誤差の検討

表3は、段付き丸棒の曲げ(図1(b))に関する野田・高瀬の応力集中係数 K_t^{NT} と、その他の設計資料①⁵⁾、②⁶⁾、③⁷⁾、④⁸⁾、⑤⁹⁾、⑥¹⁰⁾、⑦¹¹⁾の応力集中係数 K_t および野田・高瀬との比 K_t/K_t^{NT} をまとめたものである。①～④は便覧等の設計資料、⑤～⑦は大学等で使用される講義資料から応力集中線図を引用している。例えば、 K_t ^①はPetersonの応力集中線図⁵⁾からの読み取り値である。図8は、応力集中線図の一例であり、ここでは文献7の西田正孝のハンドブックからの読み取り値③をプロットしたものである。この応力集中係数7は、1951年のLevenとHartmanの論文によるもので、二次元両側フィレットの応力集中係数から、フィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数を換算して求めた結果であるとの説明が文献7にある。このハンドブックが出版された1950年代には、最も確からしい解の一つであったと考えられるが、換算方法は近似的なものであり、高精度を期待すべき解ではないことに注意が必要である。

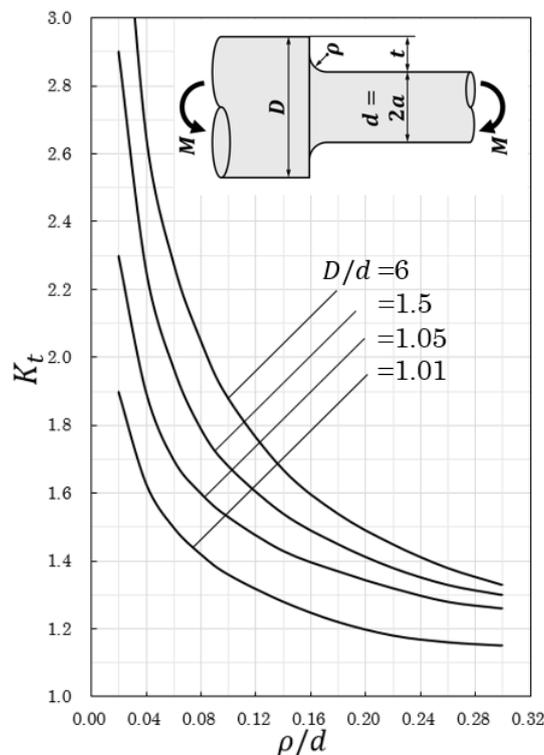


Fig. 8 Example of stress concentration chart obtained from the results in Ref.(7)

Table 3 Most accurate stress concentration factor K_t^{NT} of Noda-Takase in comparison with ①~⑦ for $D/d=1.01, 1.05, 1.5, 2.0, 6.0, \rho/d=0.02, 0.04, 0.1$ under bending, ① : Ref.(5), ② : Ref.(6), ③ : Ref.(7), ④ : Ref.(8), ⑤ : Ref.(9), ⑥ : Ref.(10), ⑦ : Ref.(11)

D/d	ρ/d	$K_t^{NT(4)}$	$K_t^{(1)5)}$	$K_t^{(2)6)}$	$K_t^{(3)7)}$	$K_t^{(4)8)}$	$K_t^{(5)9)}$	$K_t^{(6)10)}$	$K_t^{(7)11)}$
6	0.04	2.672	—	2.58	2.65	2.55	2.58	—	2.67
	0.1	1.877	—	1.87	1.88	1.87	1.88	—	1.895
2	0.04	2.580	2.41	2.35	2.38	2.28	2.33	2.00	2.40
	0.1	1.855	1.81	1.73	1.735	1.73	1.73	1.51	1.74
1.5	0.04	2.499	2.26	2.265	2.265	2.20	2.22	1.95	2.28
	0.1	1.834	1.73	1.69	1.69	1.69	1.69	1.49	1.69
1.05	0.04	1.783	1.73	1.905	1.905	1.88	1.87	—	1.93
	0.1	1.472	1.47	1.53	1.53	1.52	1.53	—	1.54
1.01	0.02	1.392	1.31	1.87	1.90	1.85	1.87	—	1.91
	0.04	1.244	1.24	1.62	1.63	1.61	1.62	-	1.63
D/d	ρ/d	$\frac{K_t^{NT}}{K_t^{NT}}$	$\frac{K_t^{(1)}}{K_t^{NT}}$	$\frac{K_t^{(2)}}{K_t^{NT}}$	$\frac{K_t^{(3)}}{K_t^{NT}}$	$\frac{K_t^{(4)}}{K_t^{NT}}$	$\frac{K_t^{(5)}}{K_t^{NT}}$	$\frac{K_t^{(6)}}{K_t^{NT}}$	$\frac{K_t^{(7)}}{K_t^{NT}}$
6	0.04	1.000	—	0.965	0.992	0.954	0.965	—	0.999
	0.1	1.000	—	0.996	1.001	0.996	1.001	—	1.009
2	0.04	1.000	0.934	0.911	0.922	0.884	0.903	0.775	0.930
	0.1	1.000	0.976	0.933	0.935	0.933	0.933	0.814	0.938
1.5	0.04	1.000	0.904	0.906	0.906	0.880	0.888	0.780	0.912
	0.1	1.000	0.943	0.921	0.921	0.921	0.921	0.812	0.921
1.05	0.04	1.000	0.970	1.068	1.068	1.054	1.049	—	1.082
	0.1	1.000	0.999	1.040	1.040	1.033	1.040	—	1.046
1.01	0.02	1.000	0.938	1.201	1.220	1.188	1.201	—	1.227
	0.04	1.000	0.948	1.164	1.171	1.157	1.164	—	1.171

表3に示す読取値①, ②, ④, ⑤, ⑦に関しても, 西田正孝のハンドブックからの読み取り値③と共に, 設計実務で広く活用されているものである. 表3に示すように, これらの値①, ②, ④, ⑤, ⑦は, 西田の応力集中係数③と近い値であり, ③を参照しているものと考えられる. また, 表3の⑥¹⁰⁾の値は大学の講義資料から読み取ったものであるが, その応力集中線図の精度も①, ②, ④, ⑤と同様である. 表3より, 他の資料の応力集中係数は, D/d が大きく ρ が小さい場合に, 野田・高瀬の計算式の結果より小さい値となる傾向がある. 図5のPetersonの近似式を全寸法範囲で調査した誤差も, 応力集中が厳しい $x \geq 1.8$ ($\rho \leq 0.2$)で過少評価となっている. 当時の実験や解析技術に基づいて作成したチャートであるため, 同様な傾向の誤差が存在しているものと考えられる. ①~⑦の教科書やハンドブックには, これらの精度の低い応力集中線図が依然として示されている. このように, その精度が確認されないまま, 現在でも設計に利用されていることに十分注意する必要がある.

表3に示した範囲 ($D/d = 1.01, 1.05, 1.5, 2, 6, \rho/d = 0.02, 0.04, 0.1$)では, Petersonの最大誤差は10%程

度である。図5で段付き丸棒のすべての幾何形状を考慮した場合の誤差より小さいのは、形状が限定されているためである。一方、西田の応力集中係数や②～⑦の応力集中係数は、表3に示した限定した範囲 ($D/d = 1.01, 1.05, 1.5, 2, 6, \rho/d = 0.02, 0.04, 0.1$) でも最大誤差 22%程度であり、Peterson の誤差よりさらに大きい。このように、これらの誤差を認識した上で線図を利用することは、事故を防ぐ意味でも重要である。

6 結言

図1に示すフィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数は、機械設計の基本問題として多くの材料力学や材料強度、ならびに機械設計の教科書やハンドブックに示されている^{1)~11)}。その一例として、Peterson のハンドブックは、世界的に利用され続けており、近似公式と、それから得られる応力集中線図が利用されている^{1), 2), 5)}。野田らは、これまで体積力法によって丸棒引張り、丸棒曲げの各種問題についてフィレット部の正確な解析を行い^{3), 15)~19)}、その結果を基にして、応力集中係数を全範囲で簡便に利用できる計算式 K_t^{NT} を提案している⁴⁾。一方で、上述の教科書やハンドブックには、依然通して異なる応力集中線図が示されている。そこで本研究では、Peterson の近似式と野田・高瀬の近似式のフィレット半径 ρ が小さい範囲まで含めた、フィレットの形状寸法の全範囲に対して、両者を比較検討し、Peterson の誤差を明らかにした。

- 1) 段付き丸棒の引張りに関する Peterson の応力集中係数 K_t^P には+5%程度まで過大な値を与える場合と、-25%程度まで過小な値を与える場合がある。切欠き半径が小さい場合には、最大で-25%程度の誤差が生じる場合があるので、注意が必要である。
- 2) 段付き丸棒の曲げに関する Peterson の応力集中係数 K_t^P には 7%程度まで過大な値を与える場合と、-15%程度まで過小な値を与える場合がある。切欠き半径が小さい場合の最大誤差は-15%程度となり、引張りの誤差よりも小さくなるが、切欠き半径が大きい場合の最大誤差+7%であり、引張りの場合よりも大きいので注意が必要である。
- 3) Peterson の応力集中係数 K_t^P は、 $x = 1.7 \sim 2.0$ ($0 \leq \rho/a \leq 0.3$) の範囲では、野田・高瀬の近似式との誤差が大きいため、軸の設計に利用するには、十分な注意が必要である。
- 4) 段付き丸棒の曲げに対して、野田・高瀬の応力集中係数 K_t^{NT} と、よく設計で用いられる設計資料の応力集中係数 K_t (読取値) との比 K_t/K_t^{NT} をまとめ、それらの誤差を検討した (表3)。調査した範囲 ($D/d = 1.01, 1.05, 1.5, 2, 6, \rho/d = 0.02, 0.04, 0.1$) では、Peterson の最大誤差は 10%程度であった。一方、西田やその他の応力集中係数は、最大誤差 22%程度であり、Peterson の誤差よりさらに大きい。教科書やハンドブックには、これらの精度の低い応力集中線図が依然として示されており、その精度が確認されないまま、現在でも設計に利用されている。これらの誤差を認識した上で線図を利用することが、事故を防ぐ意味でも重要である。

参考文献

- 1) Peterson, R.E.: Stress Concentration Factors, 1st Edition, Wiley. Co., (1974), 103.
- 2) Pilkey, W.D.: Peterson's Stress Concentration Factors, 2nd Edition, John Wiley & Sons, Inc., (1997), 156.
- 3) 野田尚昭, 山崎丈巳, 松尾勝規, 西谷弘信: フィレット部を有する丸棒および平板試験片の応力集中解析, 日本機械学会論文集 (A 編), 59, 566 (1993), 2404.
- 4) Noda, N.-A. and Takase, Y.: Stress Concentration Formula Useful for Any Dimensions of Shoulder Fillet in a Round Bar under Tension and Bending, Fatigue Fract Engng Mater Struct, 26, 3 (2003), 245.

- 5) Pilkey, W.D., Pilkey, D.F. and Bi, Z.: Peterson's Stress Concentration Factors, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc., (1997), 198.
- 6) 津村利光：強度設計データブック，裳華房，(1965)，385.
- 7) 西田正孝：応力集中，森北出版 増補版，(1978)，644.
- 8) 機械設計便覧編集委員会：機械設計便覧，丸善出版，(1992)，269.
- 9) 中原一郎：材料力学 上巻，養賢堂，(1995)，304.
- 10) 和田稲苗 編者：機械要素設計，実教出版，(1984)，15.
- 11) 渋谷寿一，本間寛臣，斎藤憲司：現代材料力学，朝倉書店，(1986)，235.
- 12) JIS B2804-2010：止め輪，日本産業規格.
- 13) JIS B1521-2012：転がり軸受－深溝玉軸受，日本産業規格.
- 14) Neuber, H.: Kerbspannungslehre, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (1937), 6.
- 15) 野田尚昭，高瀬康，門田圭司：フィレット部を有する丸棒および帯板における応力集中係数の計算式，機械の研究，48, 8 (1996)，855.
- 16) 野田尚昭，高瀬康：フィレット部を有する段付丸棒および段付平板の応力集中についての考察，日本機械学会論文集 (A 編)，62, 595 (1996)，787.
- 17) Noda, N.-A., Takase, Y. and Monda, K.: Stress concentration factors for shoulder fillets in round and flat bars under various loads, International Journal of Fatigue, 19, 1 (1997), 75.
- 18) Noda, N.-A. and Takase, Y.: Stress Concentration Factor Formulas Useful for Any Dimensions of Shoulder Fillet in a Flat Test Specimen Under Tension and Bending, Journal of Testing and Evaluation, 32, 3 (2004), 217.
- 19) Noda, N.-A., Yamasaki, T., Matsuo, K. and Takase, Y.: Interaction between Fillet and Crack in Round and Flat Test Specimens, Eng Fract Mech, 50, 3 (1995), 385.
- 20) JIS B2401-1-2012：O リンガー第1部：O リンガー，日本産業規格.
- 21) JIS B2401-2-2012：O リンガー第2部：ハウジングの形状・寸法，日本産業規格.
- 22) Nisitani, H. and Noda, N.-A.: Stress concentration of a cylindrical bar with a V-shaped circumferential groove under torsion, tension or bending, Engineering Fracture Mechanics, 20, 5 (1984), 743.
- 23) 西谷弘信，野田尚昭，村上敬宜：半だ円切欠き列を有する丸棒の引張り，日本機械学会論文集，49, 441 (1983)，602.
- 24) 長谷川久夫：半円形環状みぞをもつ丸軸の引張り (物体力の働く円柱問題のグリーン関数による解法)，日本機械学会論文集 (A 編)，46, 407 (1980)，805.
- 25) Noda, N.-A. and Takase, Y.: Stress concentration formula useful for all notch shape in a round bar (comparison between torsion, tension and bending), International Journal of fatigue, 28, 2 (2006), 151.
- 26) 村上敬宜，野田尚昭，西谷弘信：半だ円形円周切欠きを有する丸棒の引張りにおける応力集中係数，日本機械学会論文集，47, 423 (1981)，1194.
- 27) 菊川 真，佐藤芳久：引張りもしくは曲げを受ける帯板，丸棒の切欠きによる応力集中 (第2報，U 形環状みぞのある丸棒)，日本機械学会論文集 (A 編)，38, 311 (1972)，1673.
- 28) 佐藤芳久，菊川 真，松井高信：引張りもしくは曲げを受ける帯板，丸棒の切欠きによる応力集中 (第4報，半円環状みぞのある丸棒の有限要素解析)，日本機械学会論文集 (A 編)，42, 364 (1976)，3701.
- 29) Nisitani, H. and Noda, N.-A.: Tension of a cylindrical bar having an infinite row of circumferential cracks, Engineering Fracture Mechanics, 20, 4 (1984), 675.

- 30) Keer, L.M., Freedman, J.M. and Watts, H.A.: Infinite tensile cylinder with circumferential edge crack, *Letters in Applied and Engineering Science*, 5, 2 (1977), 129.
- 31) 野田尚昭, 高瀬康: 設計に活かす切欠き・段付き部の材料強度, 日刊工業新聞社, (2010), 124.
- 32) Noda, N.-A. and Takase, Y.: Generalized stress intensity factors of V-shaped notch in a round bar under torsion, tension, and bending, *Engineering Fracture Mechanics*, 70, 11 (2003), 1447.
- 33) Benthem, J.P. and Koiter, W.T. (edited by Sih, G.C.): Asymptotic approximations to crack problems, *Method of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff, Leyden, (1973), 131.
- 34) 村上敬宜, 西谷弘信: 円周き裂をもつ丸棒の引張りにおける応力拡大係数, 日本機械学会論文集, 41, 342 (1975), 360.
- 35) Atsumi, A. and Shindo, Y.: Singular stress in a transversely isotropic circular cylinder with circumferential edge crack, *International Journal of Engineering Science*, 17, 12 (1979), 1229.
- 36) Bueckner, H.F. (edited by Sih, G.C.): Field singularities and related integral representations, *Method of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Noordhoff, Leyden, (1973), 239.
- 37) 村上敬宜, 野田尚昭, 西谷弘信: 体積力法による軸対称体の曲げ応力集中の解析 (第2報, 半だ円形円周切欠きを有する丸棒の曲げ), 日本機械学会論文集, 48, 427 (1982), 312.

付録 A : 応力集中の計算式の精度ならびにその基となる体積力法の解析精度について

ここでは本論文の議論のベースとなっている応力集中係数の計算式の精度と、その作成に際し数値目標とした体積力法の解析精度に関する検討結果を示す。なお、**図 1** のフィレット部を有する段付き丸棒に関しては、体積力法の解析に匹敵するような精度の高い解析や実験が見当たらない。そのため、ここでは類似形状の以下の問題を取り上げて、他の研究結果との比較により解析により精度を考察する。

表 A1 は、半円形円周切欠きを有する丸棒の引張りについて、体積力法の解析結果^{22),23)}を、長谷川の解²⁴⁾、野田・高瀬の計算式²⁵⁾、ノイバーの三角則¹⁴⁾、村上らの解²⁶⁾、菊川らの実験結果²⁷⁾、佐藤らの解²⁸⁾と比較したものである。円周切欠きの応力集中は、疲労試験片として用いられることから、多くの研究がなされている。**表 A1** に示すように、体積力法の結果 $K_t^{T(1)}$ は、長谷川の結果 $K_t^{T(2)}$ とよく一致しており、有効数字3桁～4桁程度の解析精度が確認される。これまで長く使用されてきたノイバーの三角則による結果 $K_t^{T(4)}$ はここでは最大5%程度の誤差を含む。なお、**表 A1** のノイバーの三角則の結果 $K_t^{T(4)}$ は、浅い切欠きの解 K_{ts} と、深い切欠きの解である K_{td} として、ノイバーが与えたものではなく、厳密な解を使用している²²⁾。その精度を高めたノイバー公式をさらに修正した野田・高瀬の計算式 $K_t^{T(3)}$ は、誤差1%程度以内で体積力法の解析結果^{22),23)}と一致している。他の過去の研究として、ここでは文献^{26)~28)}の結果を示したが、体積力法の解析結果^{22),23)}との比($K_t^{T(5)}/K_t^{T(1)}$ 等)に示すように、これらには2~3%の誤差がある。これらの文献^{26)~28)}以外にも多くの研究があるが、これらの多くの取組みの総合的な成果として、最終的には**表 A1** に示すような、解析結果^{22)~25)}の4桁程度までの一致($K_t^{T(2)} \approx K_t^{T(1)}$)が得られたと考える。

表 A2 は、円周き裂を有する丸棒の引張りについての結果である。**図 4** や**図 5** に示すように、本研究ではフィレット部の半径 $\rho \rightarrow 0$ の極限まで考察しているが、そのような応力集中係数が ∞ となる場合の解析例として取上げる。ここでは体積力法の解析結果²⁹⁾を、Keerらの解³⁰⁾、深い円周き裂の解³¹⁾、野田・高瀬の計算式³²⁾、Benthemらの近似式³³⁾、村上らの解³⁴⁾、Atsumiらの解³⁵⁾、Buecknerの解³⁶⁾と比較して整理している。**表 A2** に示すように、体積力法の結果 $F_I^{(1)}$ は、き裂の浅い範囲ではKeerらの $F_I^{(2)}$ と4桁程度一致しており、き裂が深い範囲では、深い円周き裂の厳密解 $F_I^{(3)}$ とよく一致しており最も信頼できる。式(A1)に示すBenthemら近似式 $F_I^{(5)}$ は、き裂深さの両極端 $2c/D \rightarrow 0$ と $2c/D \rightarrow 1$ で厳密解と一致するように係数を

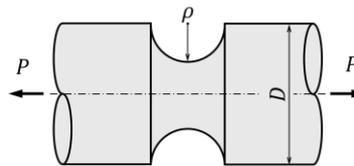
決めたもので、精度の良い公式であるが体積力法の結果 $F_I^{①}$ と比較すると最大 3%程度の誤差がある。

$$F_I^{⑤} = \frac{1}{2}\xi^{-\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{3}{8}\xi^2 - 0.363\xi^3 + 0.731\xi^4\right), \quad \xi = \frac{d}{D} \quad (\text{A1})$$

このような結果を踏まえ、野田・高瀬は、Benthem らの近似式 (A1) を修正し、体積力法との誤差が 0.2% 程度以内で円周き裂の $F_I^{④}$ を与える次式のような計算式を提案している³¹⁾。

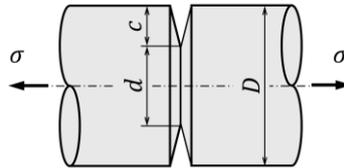
$$\frac{F_I^{④}}{F_I^{⑤}} = 1.0011 + 0.32257\lambda - 1.2018\lambda^2 + 1.8970\lambda^3 - 1.5158\lambda^4 + 0.49714\lambda^5, \quad \lambda = \frac{2c}{D} \quad (\text{A2})$$

Table A1 Stress concentration factors of a semi-circular notch in round bar under tension, ① : Ref.(22),(23) Nisitani-Noda ② : Ref.(24) Hasegawa, ③ : Ref.(25) Noda-Takase, ④ : Ref.(14) Neuber, ⑤ : Ref.(26) Murakami-Noda-Nisitani, ⑥ : Ref.(27) Kikukawa-Sato, ⑦ : Ref.(28) Sato-Kikukawa-Matsui



$2\rho/D$	Analysis		SCF formula		Analysis or experiment			Comparison with $K_t^{T①}$						
	$K_t^{T①}$ Ref.(22)	$K_t^{T②}$ Ref.(24)	$K_t^{T③}$ Ref.(25)	$K_t^{T④}$ Ref.(14)	$K_t^{T⑤}$ Ref.(26)	$K_t^{T⑥}$ Ref.(27)	$K_t^{T⑦}$ Ref.(28)	$\frac{K_t^{T①}}{K_t^{T①}}$	$\frac{K_t^{T②}}{K_t^{T①}}$	$\frac{K_t^{T③}}{K_t^{T①}}$	$\frac{K_t^{T④}}{K_t^{T①}}$	$\frac{K_t^{T⑤}}{K_t^{T①}}$	$\frac{K_t^{T⑥}}{K_t^{T①}}$	$\frac{K_t^{T⑦}}{K_t^{T①}}$
0.02	2.976	-	2.989	2.974	-	-	-	1.000	~1.0	1.004	0.999	-		
0.03	2.928	-	2.947	2.922	-	-	-	1.000	~1.0	1.006	0.998	-		
0.05	2.832	2.842	2.857	2.815	2.78	-	-	1.000	1.004	1.009	0.994	0.982		
0.1	2.601	2.593	2.612	2.551	2.56	-	-	1.000	0.997	1.004	0.981	0.984		
1/9	~2.56	-	2.558	2.496	2.52	2.58	2.57	~1.0	~1.0	~1.0	~0.975	~0.984	~1.008	~1.004
4/29	~2.43	-	2.433	2.367	2.42	2.45	-	~1.0	~1.0	~1.0	~0.974	~0.996	~1.008	
0.2	2.196	2.191	2.178	2.107	2.20	2.24	2.21	1.000	0.998	0.992	0.959	1.002	1.020	1.006
0.3	1.869	1.871	1.865	1.785	1.91	-	-	1.000	1.001	0.998	0.955	1.022		
1/3	~1.78	-	1.778	1.699	1.82	1.78	1.80	~1.0	~1.0	~1.0	~0.954	~1.022	~1.000	~1.011
0.4	1.610	1.608	1.619	1.551	1.66	-	-	1.000	0.999	1.006	0.963	1.031		
0.5	1.412	1.411	1.416	1.381	1.45	1.43	1.44	1.000	0.999	1.003	0.978	1.027	1.013	1.020
0.6	1.270	1.270	1.270	1.259	1.29	-	-	1.000	1.000	1.000	0.991	1.016		
2/3	~1.20	1.200	1.202	1.198	1.21	1.22	-	~1.0	~1.0	~1.0	~0.998	~1.008	~1.017	
0.7	1.172	-	1.174	1.171	-	-	-	1.000	~1.0	1.002	0.999	-		
0.8	1.103	1.101	1.104	1.102	1.10	-	-	1.000	0.998	1.001	0.999	0.997		
0.9	1.048	1.046	1.047	1.047	1.05	-	-	1.000	0.998	0.999	0.999	1.002		

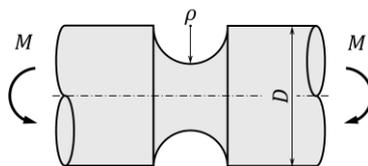
Table A2 Stress intensity factors $F_I = K_I/(\sigma\sqrt{\pi c})$ of a circumferential crack in round bar under tension, ① : Ref.(29) Nisitani-Noda, ② : Ref.(30) Keer-Freeman-Watts, ③ : Ref.(31) Deep notch, ④ : Ref.(32) Noda-Takase, ⑤ : Ref.(33) Benthem-Koiter, ⑥ : Ref.(34) Murakami-Nisitani, ⑦ : Ref.(35) Atsumi-Shindo, ⑧ : Ref.(36) Bueckner



$2c/D$	Analysis			SIF formula		Analysis			Comparison with $F_I^{①}$							
	$F_I^{①}$	$F_I^{②}$	$F_I^{③}$	$F_I^{④}$	$F_I^{⑤}$	$F_I^{⑥}$	$F_I^{⑦}$	$F_I^{⑧}$	$\frac{F_I^{①}}{F_I^{①}}$	$\frac{F_I^{②}}{F_I^{①}}$	$\frac{F_I^{③}}{F_I^{①}}$	$\frac{F_I^{④}}{F_I^{①}}$	$\frac{F_I^{⑤}}{F_I^{①}}$	$\frac{F_I^{⑥}}{F_I^{①}}$	$\frac{F_I^{⑦}}{F_I^{①}}$	$\frac{F_I^{⑧}}{F_I^{①}}$
	Ref.(29)	Ref.(30)	Ref.(31)	Ref.(32)	Ref.(33)	Ref.(34)	Ref.(35)	Ref.(36)								
0.02	1.133	-	3.644	1.133	1.125	1.136	-	-	1.000		3.216	1.000	0.993	1.003		
0.03	1.139	-	3.022	1.138	1.127	-	-	-	1.000		2.653	0.999	0.989			
0.05	1.150	1.1513	2.415	1.149	1.133	1.153	1.152	-	1.000	1.001	2.100	0.999	0.985	1.003	1.002	
0.1	1.180	1.1807	1.852	1.180	1.153	1.177	1.181	-	1.000	1.001	1.569	1.000	0.977	0.997	1.001	
0.2	1.261	1.2608	1.563	1.263	1.225	1.24	1.261	1.240	1.000	1.000	1.239	1.002	0.971	0.983	1.000	0.983
0.3	1.393	1.3904	1.559	1.321	1.353	1.30	1.390	1.365	~1.0	0.998	1.119	1.000	0.971	0.933	0.998	0.980
1/3	1.452	-	1.591	1.393	1.412	-	-	-	1.000		1.096	1.000	0.972			
0.4	1.602	1.597	1.701	1.452	1.561	1.43	1.596	1.584	1.000	0.997	1.062	0.999	0.974	0.893	0.996	0.989
0.5	1.940	1.932	2.000	1.601	1.901	-	1.928	1.921	1.000	0.996	1.031	0.999	0.980		0.994	0.990
0.6	2.516	2.502	2.552	1.939	2.481	1.88	2.494	-	1.000	0.994	1.014	1.000	0.986	0.747	0.991	
2/3	3.158	-	3.182	2.516	3.128	-	-	-	1.000		1.008	1.001	0.991			
0.7	3.618	3.598	3.637	3.160	3.590	3.05	3.571	-	1.000	0.994	1.005	1.001	0.992	0.843	0.987	
0.8	6.243	6.201	6.250	3.620	6.223		6.115	-	1.000	0.993	1.001	1.000	0.997	0.000	0.979	
0.9	16.67	16.46	16.67	6.244	16.66		-	-	1.000	0.987	1.000	0.999	0.999	0.000		

表 A3 は、半円形円周切欠きを有する丸棒の曲げについての体積法法の解析結果²²⁾を、野田・高瀬の計算式²⁵⁾、ノイバーの三角則¹⁴⁾、菊川らの実験結果²⁷⁾、佐藤らの解²⁸⁾と比較したものである。軸対称体に曲げモーメントが作用する問題では、非軸対称な応力分布を考慮した取扱いが必要になる。村上ら³⁷⁾は、無限体中の半径 r の円周上に分布する $\cos\theta$ あるいは $\sin\theta$ で変化する 3 種類の集中力の輪の応力場の解を導出し、体積法法によって曲げの応力集中係数を高精度に解析することに成功している。表 A3 に示すように、菊川らの実験結果 $K_t^{B④}$ は、体積法法の結果 $K_t^{B①}$ と誤差 1%程度以内でよく一致しており、佐藤らの FEM 解析結

Table A3 Stress concentration factors of a semi-circular notch in round bar under bending, ① : Ref.(22) Nisitani-Noda, ② : Ref.(25) Noda-Takase, ③ : Ref.(14) Neuber, ④ : Ref.(27) Kikukawa-Sato, ⑤ : Ref.(28) Sato-Kikukawa-Matsui



$2\rho/D$	Analysis	SCF formula		Analysis or experiment		Comparison with $K_t^{B①}$				
	$K_t^{B①}$ Ref.(22)	$K_t^{B②}$ Ref.(25)	$K_t^{B③}$ Ref.(14)	$K_t^{B④}$ Ref.(27)	$K_t^{B⑤}$ Ref.(28)	$\frac{K_t^{B①}}{K_t^{B①}}$	$\frac{K_t^{B②}}{K_t^{B①}}$	$\frac{K_t^{B③}}{K_t^{B①}}$	$\frac{K_t^{B④}}{K_t^{B①}}$	$\frac{K_t^{B⑤}}{K_t^{B①}}$
0.02	2.877	2.907	2.82	-	-	1.000	1.010	0.980	-	-
0.03	2.790	2.824	2.73	-	-	1.000	1.012	0.978	-	-
0.05	2.630	2.659	2.56	-	-	1.000	1.011	1.053	-	-
0.1	2.306	2.317	2.21	-	-	1.000	1.005	0.959	-	-
1/9	2.245	2.258	2.15	2.26	2.27	1.000	1.006	0.958	1.007	1.011
4/29	2.112	2.129	2.01	2.13	-	1.000	1.008	0.952	1.009	-
0.2	1.858	1.880	1.77	1.86	1.87	1.000	1.012	0.953	1.001	1.006
0.3	1.575	1.583	1.53	-	-	1.000	1.005	0.971	-	-
1/3	1.504	1.510	1.47	1.50	1.53	1.000	1.004	0.977	0.997	1.017
0.4	1.390	1.395	1.37	-	-	1.000	1.004	0.986	-	-
0.5	1.269	1.277	1.26	1.27	1.29	1.000	1.006	0.993	1.001	1.017
0.6	1.183	1.186	1.18	-	-	1.000	1.003	0.997	-	-
2/3	1.139	1.141	1.14	1.14	-	1.000	1.002	1.001	1.001	-
0.8	1.072	1.073	1.07	-	-	1.000	1.001	0.998	-	-
0.9	1.032	1.033	1.03	-	-	1.000	1.001	0.998	-	-

果 $K_t^{B⑤}$ よりも精度が良い。表 A1 の引張りの場合では、菊川らの実験結果 $K_t^{T⑥}$ の結果の精度は 2%程度であったので、引張りよりも曲げの実験の精度が良い。菊川ら²⁷⁾は、切欠き底にひずみゲージを貼付し、実験により応力集中を測定している。その際、切欠き底にひずみゲージを固定した状態で試験片加工によって既に精度よく求められていた半円切欠きを有する帯板に加工し、誤差を補正するなどの工夫によって精度の高い実験結果 $K_t^{B④}$ を得ている。また、体積力法の結果に基づいて作成された野田・高瀬の計算式 $K_t^{B②}$ は、誤差 1%程度以内で正確な応力集中係数を与えることがわかる。一方、ノイバーの三角則の結果 $K_t^{B③}$ は、曲げの場合

でも 5%程度の誤差を含んでいる.

ここでは研究の多い類似の問題について, 過去の研究との比較から, 計算式の精度と体積力法(数値目標とした)の解析精度を述べた. 形状の全範囲に対する計算式を求めるための物理的・力学的考察と工夫は, **表 A1~表 A3**の問題と段付き丸棒の問題で同様である. よって, 本論文で示しているフィレットを有する段付き丸棒の応力集中係数 K_t^{NT} (式(5)~式(11))についても, **表 A1~表 A3**に示すものと同程度の精度で応力集中を与えると考えてよい.