

フィレット寸法の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式  
(フィレット部を有する段付き丸棒のねじり)高畑 泰幸<sup>\*1</sup>, 小田 和広<sup>\*2</sup>, 坂本 訓彦<sup>\*3</sup>, 野田 尚昭<sup>\*4</sup>Convenient stress concentration formula useful for any shape of fillet  
(Torsion of stepped round bar with fillet)Yasuyuki TAKAHATA<sup>\*1</sup>, Kazuhiro ODA<sup>\*2</sup>, Kunihiko SAKAMOTO<sup>\*3</sup> and Nao-Aki NODA<sup>\*4</sup><sup>\*1</sup> YANMAR POWER TECHNOLOGY CO., LTD.  
1-32, Chayamachi, Kita-ku, Osaka 530-0013, Japan<sup>\*2</sup> Division of Mechanical Engineering, Faculty of Science and Technology, Oita University  
700 Dannoharu, Oita-shi, Oita 870-1192, Japan<sup>\*3</sup> YANMAR HOLDINGS CO., LTD.  
1-32, Chayamachi, Kita-ku, Osaka 530-0013, Japan<sup>\*4</sup> Department of Mechanical Engineering, Kyushu Institute of Technology  
1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka 804-8550, Japan

Received: 25 April 2025; Revised: 15 June 2025; Accepted: 17 July 2025

## Abstract

To ensure the strength and safety of shafts, which are basic components of machines, it is important to accurately evaluate the stress concentration factor (SCF) of stepped round bar fillets. Noda et al. analyzed the SCF of stepped round bar with fillet under tension and bending by using the body force method and proposed SCF formulas valid for all dimensional ranges. These formulas are very useful in design practice. Since shafts generally transmit power, the SCF of torsion is also important, but there is no solution for the torsional SCF that is valid for all dimensional ranges. In this study, therefore, the stepped round bar subjected to torsion is investigated for all dimensional ranges. The finite element method for an axisymmetric body subjected to a non-axisymmetric load is applied to torsional problems by confirming the coincidence with the SCF solution by the body force method for a round bar with a semicircular notch under torsion. The SCF formula proposed for all dimensional range under torsion shows that SCF charts in literature commonly used in design practice have large errors about 10% because they are based on old research results. Peterson's SCF equation is simple and useful, but the application range of the equation for torsion is extremely narrow and inconvenient to be used in machine design.

**Keywords** : Stress concentration, Stepped shaft, Fillet, Numerical analysis, FEM, Torsion, Fatigue, Shaft design

## 1. 緒 言

機械の基本的構成要素である軸の設計において、段フィレット部の応力集中を正しく評価することは軸の強度安全性確保の観点から極めて重要である。野田ら(野田, 高瀬, 1996, 野田他, 2001)は、フィレット部を有する段付き丸棒が引張り、又は曲げを受ける場合の応力集中係数を高精度の体積力法により解析し、すべての寸法範囲に対し有効な応力集中係数の近似式を提案しており、設計実務において極めて有用である。軸は一般に動力伝達の機能を有するので、ねじりの応力集中も同様に重要であるが、すべての寸法範囲に対し有効な応力集中係数の解は見当たらない。

No.25-00110 [DOI:10.1299/transjsme.25-00110], J-STAGE Advance Publication date : 27 July, 2025

本論文は、日本機械学会九州支部第78期総会・講演会講演論文集、No.258-1 (2025)、112.の掲載内容に基づいた論文である。

<sup>\*1</sup> 正員, ヤンマーパワーテクノロジー (株) (〒530-8311 大阪市北区茶屋町 1-32)<sup>\*2</sup> 正員, 大分大学 理工学部 理工学科 機械工学プログラム (〒870-1192 大分市旦野原 700 番地)<sup>\*3</sup> ヤンマーホールディングス (株) (〒530-8311 大阪市北区茶屋町 1-32)<sup>\*4</sup> 正員, 九州工業大学 (〒804-8550 福岡県北九州市戸畑区仙水町 1-1), 中国石油大学 (北京)

E-mail of corresponding author: yasuyuki\_takahata@yanmar.com

本研究では、ねじりを受けるフィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数を、すべての寸法範囲で近似する計算式を得た。数値解析手法として、非軸対称荷重を受ける軸対称体に対する有限要素法を用い、体積法により解が得られている半円切欠きを有する丸棒のねじり問題（西谷，野田，1984）等に適用することで、要素分割が適切であれば、本解析手法により十分な精度で応力集中係数が得られる事を確認した。

設計実務においては、フィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数を、書籍の図等から読み取って設計計算に用いるのが一般的である（Neuber, 1957, 津村, 1965, Peterson, 1974, 西田, 1978, 機械設計便覧編集委員会, 1992）。しかし、これらにはかなり古い研究成果に基づくものがあり必ずしも良好な精度が期待できない。また、Peterson (1974) により応力集中係数の簡易式が与えられているが、ねじりについては適用可能範囲がかなり狭く設計での使用の制約となっている。Peterson の式 (Peterson 1974, Pilkey et al, 2020), 及び西田 (1978) による応力集中係数を、本研究で得られた応力集中係数と比較しこれらの解の精度を明らかにした。

## 2. 記号

本論文の解析対象であるフィレット部を有する段付き丸棒を図1に示し、関連する記号を以下に示す。

- $\rho$ : フィレットの曲率半径,  $t$ : フィレットの段の高さ
- $a$ : フィレット底の最小断面の半径,  $D$ : 直径,  $d = 2a$
- $\xi = \sqrt{t/\rho}$ ,  $\eta = \sqrt{\rho/t}$ ,  $\lambda = 2t/D$
- $x = a/\rho$  ( $a/\rho \leq 1.0$  のとき),  $= 2 - \rho/a$  ( $\rho/a \leq 1.0$  のとき)
- $x' = \xi$  ( $\xi \leq 1.0$  のとき),  $= 2 - 1/\xi$  ( $1.0 < \xi$  のとき)
- $K_t$ : 応力集中係数 ( $\sigma_{max}/\sigma_{nom}$ ),  $K_{tH}$ : 深い回転双曲面切欠きの応力集中係数
- $K_{ts}$ : 段の高さが小さいフィレットを有する半無限板の応力集中係数
- $K_{td}$ : 段の高さが無限に大きい場合のフィレットの応力集中係数
- $\sigma_{max}$ : フィレット部最大応力,  $\sigma_{nom}$ : 公称応力 ( $16T/\pi d^3$ ),  $T$ : ねじりトルク

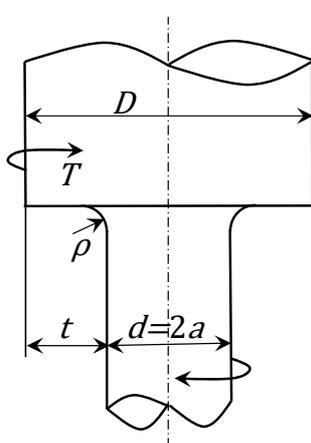


Fig.1 Stepped round bar with fillet under torsion.

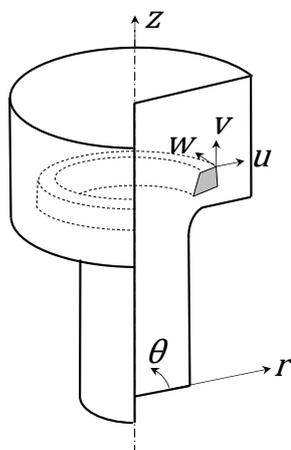


Fig.2 Cylindrical coordinate system and axisymmetric ring elements.

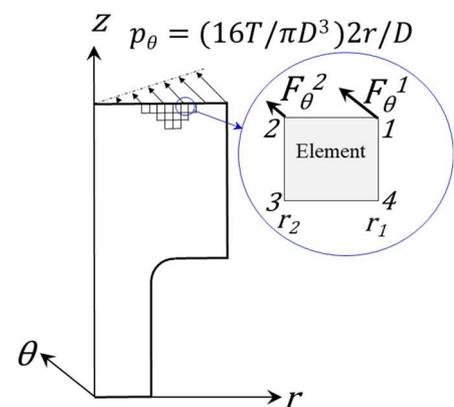


Fig.3 Consistent nodal forces for pure torsion.

## 3. 非軸対称荷重を受ける軸対称体のFEM解析

非軸対称荷重を受ける軸対称体の応力解析 (Zienkiewicz, 1975) では、荷重を周方向に Fourier 級数展開し、各次数毎に解を得る。図2に示す円筒座標系における  $\theta=0$  の  $r$  軸に対し対称な荷重成分を考えると、節点に作用する外力  $F_r$ ,  $F_z$ ,  $F_\theta$  および要素内変位の3成分  $u^k$ ,  $v^k$ ,  $w^k$  は、 $k$  を次数として式(1), (2)の様に表される (反対称荷重に対しては  $\sin$  と  $\cos$  を入れ替えば良い)。例えば軸が純曲げを受ける場合、節点外力は  $F_z$  のみで  $k=1$  の対称荷重となり、ねじりの場合は  $F_\theta$  のみで  $k=0$  の反対称荷重となる。

また、単位面積当たりの外力分布  $p_j(j = r, z, \theta)$  に整合する節点外力  $F_j^i$  (図3: ねじりの場合) は、変位内挿関数  $N_i$  を用いて式(3)により求められる(添え字  $i$  は図3の通り要素内節点番号 1~4 を示す). 式(2), (3)において,  $N_i$  は2次元の要素内変位の内挿関数であり,  $\{u^k\}^e$  等は要素を構成する節点の  $k$  次変位成分ベクトルである(上添え字  $e$  は要素構成節点の変位ベクトルであることを示す).

$$F_r = \sum F_r^k \cos k\theta, F_z = \sum F_z^k \cos k\theta, F_\theta = \sum F_\theta^k \sin k\theta \tag{1}$$

$$u^k = [N_1, N_2, N_3, N_4] \{u^k\}^e \cos k\theta, v^k = [N_1, N_2, N_3, N_4] \{v^k\}^e \cos k\theta, w^k = [N_1, N_2, N_3, N_4] \{w^k\}^e \sin k\theta \tag{2}$$

$$F_j^i = - \int N_i(\xi, \eta, \theta) p_j dA \quad i = 1, 2 \quad j = r, z, \theta \tag{3}$$

式(2)に円筒座標系における歪と変位の関係を用いると、要素の節点変位ベクトルと歪ベクトルを関係付ける  $[B]$  マトリックスが式(4), (5)の通り求められる.  $[B]$  マトリックスは式(6)と表記でき、要素剛性マトリックス  $[K]$  は、 $[B]^T [D] [B]$  の要素内積分で求められる ( $[D]$  は応力ベクトルと歪ベクトルを関係付ける弾性マトリックス). このとき、 $\theta$  に関する積分は定数となり、 $[K]$  は、式(7)のように表される.

$$[B] = [B_1, B_2, B_3, B_4] \tag{4}$$

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial r \cdot \cos k\theta & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z \cdot \cos k\theta & 0 \\ N_i / r \cdot \cos k\theta & 0 & k N_i / r \cdot \cos k\theta \\ \partial N_i / \partial z \cdot \cos k\theta & \partial N_i / \partial r \cdot \cos k\theta & 0 \\ -k N_i / r \cdot \sin k\theta & 0 & (\partial N_i / \partial r - N_i / r) \cdot \sin k\theta \\ 0 & -k N_i / r \cdot \sin k\theta & \partial N_i / \partial z \cdot \sin k\theta \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \tag{5}$$

$$[B] = [B_s^k] \sin k\theta + [B_c^k] \cos k\theta \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \tag{6}$$

$$[K] = \pi \iint [B_s^k]^T [D] [B_s^k] r dr dz + \pi \iint [B_c^k]^T [D] [B_c^k] r dr dz \quad (k = 0, 1, 2 \dots) \tag{7}$$

純曲げの場合、軸端には  $p_z \propto r \cos \theta$  ( $p_r = p_\theta = 0$ ) が作用するので、節点外力は  $F_z$  のみの対称荷重で  $k = 1$  のみとなり、 $[B_i]$  は、以下となる.

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial r & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial z & 0 \\ N_i / r & 0 & N_i / r \\ \partial N_i / \partial z & \partial N_i / \partial r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cos \theta + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -N_i / r & 0 & \partial N_i / \partial r - N_i / r \\ 0 & -N_i / r & \partial N_i / \partial z \end{bmatrix} \sin \theta \tag{8}$$

軸端に作用する曲げモーメントが  $M$  の場合、軸端の各要素の両端節点に作用させるべき整合節点力は式(3)を展開することにより、以下の式の通りとなる. 軸端上の節点にはその節点を含む要素で求められた節点力を重ね合わせた力を作用させることになる.

$$F_z^1 = (16M/D^4/3)(r_1 - r_2)(3r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2) \tag{9}$$

$$F_z^2 = (16M/D^4/3)(r_1 - r_2)(r_1^2 + 3r_2^2 + 2r_1r_2)$$

ねじりの場合、軸端には  $p_\theta \propto r$  ( $p_r = p_z = 0$ ) が作用するので、節点外力は  $F_\theta$  のみの反対称荷重で  $k = 0$  のみとなり、 $[B_i]$  は、以下となる.

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial r - N_i / r \\ 0 & 0 & \partial N_i / \partial z \end{bmatrix} \tag{10}$$

軸端に作用するねじりトルクが  $T$  の場合、軸端の各要素の両端節点に作用させるべき整合節点力は式(3)を展開することにより、以下の式の通りとなる.

$$F_\theta^1 = (16T/D^4/3)(r_1 - r_2)(3r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2) \tag{11}$$

$$F_\theta^2 = (16T/D^4/3)(r_1 - r_2)(r_1^2 + 3r_2^2 + 2r_1r_2)$$

### 4. 半円切欠きを有する丸棒のねじり

3章に示した解析手法による応力集中係数の精度を確認する為、体積力法(BFM)による解が求められている(西谷, 野田, 1984)ねじりを受ける半円切欠きを有する丸棒の応力集中係数を求めた. FEM解析では四角形1次要素を用いた. 節点数は2400~3900節点程度としており, この範囲の節点数では, メッシュ細分化に伴う集中応力の変化が無視できる. 切欠き底の最小要素サイズは, 切欠き半径 $\rho$ の1/42程度とした. 又, 各要素の節点に於ける応力を1次要素の内挿関数で求め, 最大応力により応力集中係数を決定した.

図4と表1に, このようなFEM解析で求めた応力集中係数 $K_t$ の, 式(12)のNeuberの三角則による $K_{tN}$ に対する比 $K_t/K_{tN}$ を示す. BFMの $K_t/K_{tN}$ は, 極めて精度の高い解であり, 数値的な厳密解とみなすことができる(西谷, 野田, 1984).  $2\rho/D$ の全域でFEMの解とBFMの解は極めてよく一致しており, その差は0.2%未満である. このことから, 3章の解析手法の妥当性が確認出来たと言える.

$$K_{tN} = (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \{(K_{ts} - 1)^2 + (K_{td} - 1)^2\}^{1/2} + 1, \tag{12}$$

$$K_{td} = 3(1 + \sqrt{1 + a/\rho})^2 / \{4(1 + 2\sqrt{1 + a/\rho})\}, \quad K_{ts} = 1 + \sqrt{t/\rho}$$

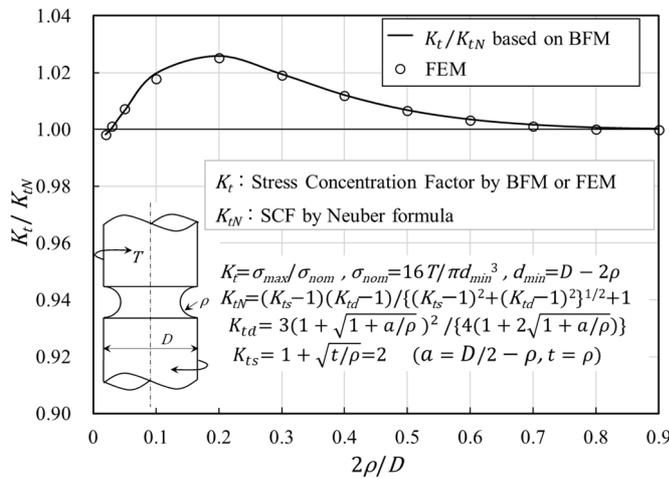


Fig.4  $K_t/K_{tN}$  for a round bar with a semicircular notch under torsion. FEM results and BFM results are in good agreement (see Table 1).

Table 1  $K_t/K_{tN}$  for a round bar with a semicircular notch under torsion. FEM results and BFM results are in good agreement.

$2\rho/D$	BFM	FEM	Difference
0.02	0.9982	0.9980	-0.012%
0.03	1.0005	1.0011	0.064%
0.05	1.0065	1.0073	0.077%
0.1	1.0197	1.0177	-0.196%
0.2	1.0259	1.0252	-0.062%
0.3	1.0195	1.0192	-0.029%
0.4	1.0121	1.0118	-0.023%
0.5	1.0068	1.0065	-0.022%
0.6	1.0035	1.0032	-0.022%
0.7	1.0016	1.0012	-0.043%
0.8	1.0006	1.0001	-0.046%
0.9	1.0002	0.9999	-0.033%

### 5. 60°V形切欠きを有する丸棒のねじり

野田らは, 切欠きを有する丸棒の応力集中係数の任意の寸法形状に対し有効な近似式を作成するに際し, 無限

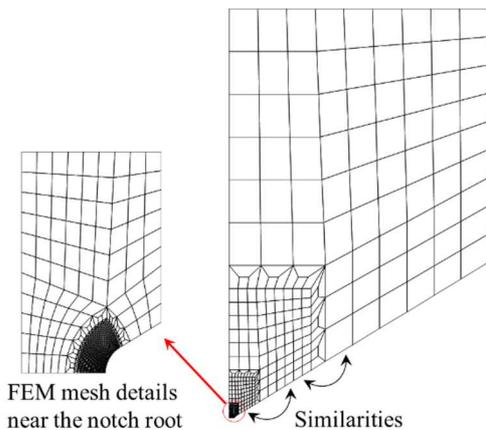


Fig.5 FEM mesh near the notch root and additional meshes due to diameter  $D$  enlargement.

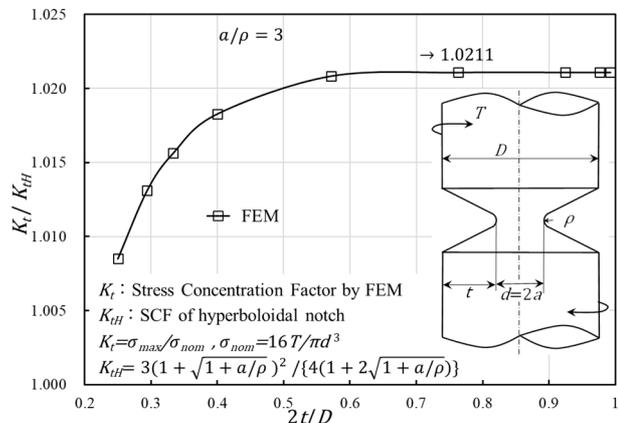


Fig.6  $K_t/K_{tH} \rightarrow K_{td}/K_{tH}$  as  $2t/D \rightarrow 1$ .  $K_{td}$  is the SCF of a 60° V-shaped deep notch under torsion. When  $2t/D \geq 0.7$ ,  $K_t/K_{tH} = 1.0211$ .

に深い切欠きの応力集中係数を体積法により求めている(野田他, 2004). この解析では数値解析が難しい鋭い切欠きも対象となるので, 3章の解析方法を適用しその解の精度を検証した.

図6中に示す解析対象の切欠き半径 $\rho$ , 切欠き底径 $d(=2a)$ を一定とし, 軸径 $D$ を増加させて収束値として得られた応力集中係数 $K_t$ を無限に深い切欠きの解とした. 切欠き底近傍の要素分割を固定し, 軸径 $D$ の増加に伴い要素分割を追加したが, 追加する要素分割は図5に示すように相似形状とした(2回の要素分割追加で軸径 $D$ が10倍になる). この方法で図6に示すように安定した収束解が得られ,  $2t/D$ が0.6~0.7程度で $K_t$ が一定値に収束している事がわかる.

図7, 表2に無限に深い60°V形切欠きを有する丸棒のねじりの応力集中係数の解析結果を示す. 図中の $x=2$ は切欠き半径ゼロを意味し,  $x$ が2に近づくとき数値解析が難しくなるが, 表2に示す通り, FEMの解と体積法の解の差は0.8%未満であり, この問題でも3章の解析手法の妥当性が確認出来たと言える.

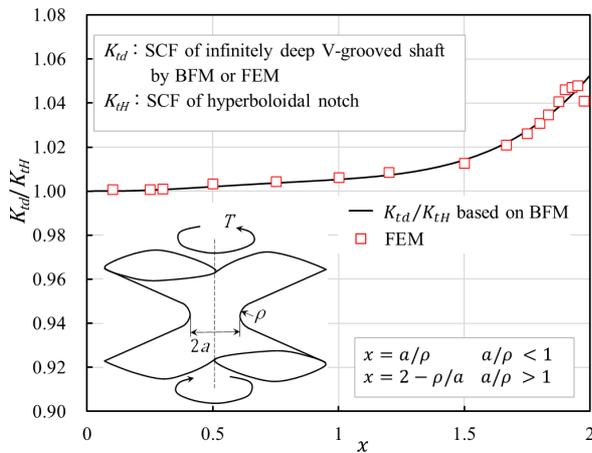


Fig.7 Stress concentration factors for a round bar with an infinitely deep 60° V-notch under torsion. FEM results and BFM results are in good agreement (see Table 2).

Table 2 Stress concentration factors for a round bar with an infinitely deep 60° V-notch under torsion. FEM results and BFM results are in good agreement.

$x$	$a/\rho$	$K_{tH}$	$K_{td}/K_{tH}$		Difference
			BFM	FEM	
$\rightarrow 0$	0	1	$\rightarrow 1.0004$	—	—
0.1	0.1	1.0163	1.0001	1.0008	0.0683%
0.25	0.25	1.0397	1.0005	1.0008	0.0291%
0.3	0.3	1.0472	1.0008	1.0012	0.0349%
0.5	0.5	1.0761	1.0021	1.0033	0.1219%
0.75	0.75	1.1100	1.0038	1.0045	0.0743%
1	1	1.1418	1.0054	1.0064	0.0959%
1.2	1.25	1.1719	1.0074	1.0086	0.1220%
1.5	2	1.2540	1.0142	1.0129	-0.1362%
1.667	3	1.3500	1.0220	1.0211	-0.0866%
1.75	4	1.4353	1.0274	1.0263	-0.1147%
1.8	5	1.5128	1.0313	1.0309	-0.0469%
1.833	6	1.5845	1.0342	1.0348	0.0570%
1.875	8	1.7143	1.0382	1.0408	0.2525%
1.9	10	1.8308	1.0407	1.0462	0.5273%
1.929	14	2.0363	1.0439	1.0473	0.3326%
1.95	20	2.2994	1.0463	1.0479	0.1477%
1.975	40	2.9773	1.0494	1.0411	-0.7862%
$\rightarrow 2$	$\infty$	$\infty$	$\rightarrow 1.0525$	—	—

### 6. 段の高さが無限に大きい場合の応力集中係数

野田らによるフィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数の解析(野田, 高瀬, 1996, 野田他, 2001)では, すべての寸法範囲を対象とする為に応力集中係数 $K_t$ は, 段の高さが無限に大きい場合の応力集中係数 $K_{td}$ 及び, 段の高さが小さい半無限板の応力集中係数 $K_{ts}$ に対する比で表されている.

本論文では,  $K_{td}$ を3章の有限要素法により求めた. 図1に示す解析対象のフィレット半径 $\rho$ , 小径 $d(=2a)$ を一定とし, 軸径 $D$ を増加させて収束値として得られた応力集中係数を, 段の高さが無限に大きい場合の解 $K_{td}$ とした. 図8の通り, 軸径 $D$ 増加に伴う要素分割の追加は5章と同じ要領とした. FEMによる $K_{td}/K_{tH}$ と, これから得られた近似式(13), (14)の値を図9に示す. 近似式係数の適切な桁数により, FEMの解に対する式(13), (14)の誤差は各々0.4%, 0.2%未満である. なお,  $K_{tH}$ は, 深い回転双曲面切欠きの応力集中係数である.

$$K_{td}/K_{tH} = -0.0293x^4 + 0.077x^3 - 0.0523x^2 - 0.0285x + 1.0 \quad (x \leq 1.89) \quad (13)$$

$$K_{td}/K_{tH} = -489259.30264x^6 + 5619653.8852x^5 - 26893010.75173x^4 + 68633835.40351x^3 - 98521168.34192x^2 + 75420456.1903x - 24055078.48503 \quad (1.89 < x) \quad (14)$$

$$x = a/\rho \quad (a/\rho \leq 1.0 \text{ のとき})$$

$$x = 2 - \rho/a \quad (\rho/a \leq 1.0 \text{ のとき})$$

$$K_{tH} = 3(1 + \sqrt{1 + a/\rho})^2 / \{4(1 + 2\sqrt{1 + a/\rho})\} \quad (15)$$

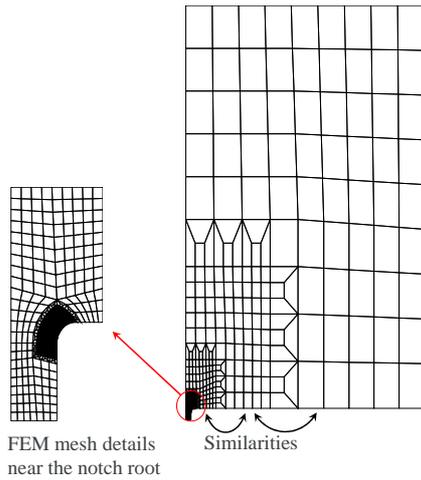


Fig.8 FEM meshes around the fillet and additional meshes due to diameter  $D$  enlargement.

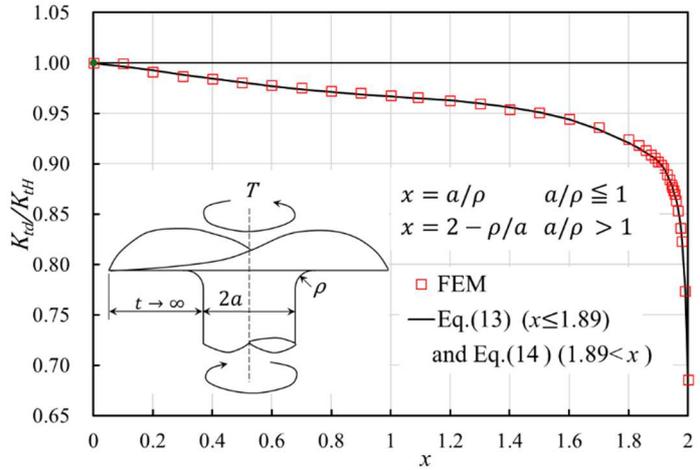


Fig.9  $K_{td}/K_{tH}$  obtained by Eqs.(13) and (14). The results of FEM coincide with the values of Eqs.(13) and (14).  $K_{td}$  is the SCF of a deep fillet when  $t \rightarrow \infty$ , and  $K_{tH}$  is the SCF of a deep hyperboloidal notch.

### 7. 段の高さが小さい半無限板の応力集中係数

段の高さが小さいフィレットを有する径が無限に大きい丸棒のねじりの応力集中係数 $K_{ts}$ は、面外せん断を受ける  $t/\rho$  が同一の半無限板の応力集中係数となる。フィレット半径  $\rho$ 、段の高さ  $t$ を一定とし、板幅  $d$ と  $D$ を増加させて収束値として得られた応力集中係数を $K_{ts}$ とした。図 10 の通り軸径  $D$ の増加に伴う要素分割の追加は 5 章と同じ要領とした。FEM による $K_{ts}/K_{tE}$ と近似式(16)、(17)による値を図 11 に示す。近似式係数の適切な桁数により、FEM の解に対する式(16)、(17)の誤差は各々0.2%、0.4%未満である。なお、 $K_{tE}$ はだ円孔を有する無限板の解に基づくが、孔でなく段であることを考慮し式(18)を採用した。

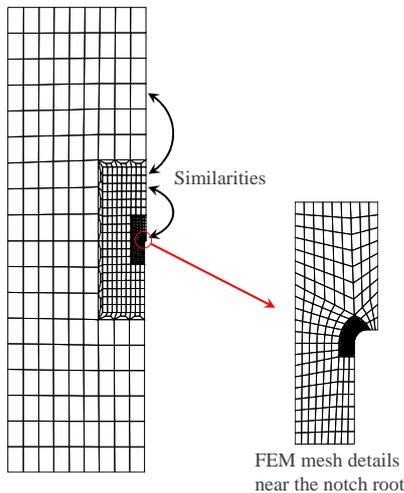


Fig.10 FEM mesh around the fillet and additional meshes due to diameters  $d$ ,  $D$  enlargement.

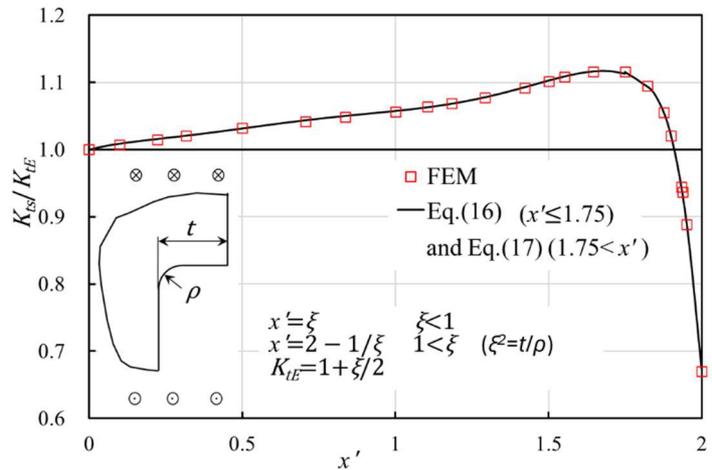


Fig.11  $K_{ts}/K_{tE}$  obtained by Eqs.(16) and (17). The results of FEM coincide with the values of Eqs.(16) and (17).  $K_{ts}$  is the SCF of a fillet in a semi-infinite plate, and  $K_{tE} = 1 + (1/2)\sqrt{t/\rho}$ .

$$K_{ts}/K_{tE} = -0.163x'^6 + 0.7631x'^5 - 1.3172x'^4 + 1.0487x'^3 - 0.3938x'^2 + 0.1197x' + 1.0 \quad (x' \leq 1.75) \quad (16)$$

$$K_{ts}/K_{tE} = 22.79536x'^4 - 210.18890x'^3 + 690.59636x'^2 - 975.12157x' + 505.31282 \quad (1.75 < x') \quad (17)$$

$$x' = \xi \quad (\xi \leq 1.0 \text{ のとき}), \quad x' = 2 - 1/\xi \quad (1.0 < \xi \text{ のとき})$$

$$K_{tE} = 1 + \xi/2, \quad \xi = \sqrt{t/\rho} \tag{18}$$

### 8. $K_t/K_{ts}$ および $K_t/K_{td}$ によるフィレット形状の全範囲に対する応力集中係数

フィレット形状の全範囲に対する応力集中係数を対象とすべく、 $\lambda (= 2t/D)$ で12ケース、 $x$ で14ケースの合計168条件で3章のFEM解析によりねじりの応力集中係数 $K_t$ を求めた。FEM解析では4章と同じく四角形1次要素を用い、節点数は2100~4000節点程度とした。各要素内の節点に於ける応力を1次要素の内挿関数で求め、最大応力により応力集中係数を求めた。メッシュサイズは細分化に伴う集中応力の変化が無視できる様に、フィレット最小径部の要素サイズを切欠き半径 $\rho$ の1/57程度とした。表3に $x$ と $\lambda$ の上下限における $K_t$ の極限值を示す。このように求められた $K_t$ を $K_{td}$ で除した結果を図12に、 $K_{ts}$ で除した結果を図13に示す。図14に $x \rightarrow 2 (\rho \rightarrow 0)$ の際の $K_t/K_{ts}$ を示す。図14から $\rho \rightarrow 0$ での $K_t/K_{ts}$ が外挿により求められる。

フィレット形状の全範囲に対し応力集中係数の計算式を得る為に、フィレット形状の全範囲を図15に示す8つの領域に分け、領域1から5については、フィレットの曲率半径 $\rho$ が小さい、または段の高さ $t$ が小さい場合の $K_{ts}$ に基づく $K_t/K_{ts}$ (図13, 14)を近似する $x, \lambda$ の多項式(24)を作成し、領域6から8については、段の高さが無限に大きい場合の $K_{td}$ に基づく $K_t/K_{td}$ (図12)を近似する $x, \lambda$ の多項式(25)を作成した。式(24), (25)及び、各領域の係数マトリックス $A_k$  (式(26)~(33))を付録に示す。

Table 3 Stress concentration factor at the upper and lower limits of  $x$  and  $\lambda$ .

Bounds	$a/\rho, t/\rho, \rho/a, \rho$	$K_{tH}, K_{tE}, K_{ts}, K_{td}, K_t$	$K_t/K_{ts}, K_t/K_{td}$
$\lambda \rightarrow 0$	$t/\rho \rightarrow 0$	$K_{tE} \rightarrow 1, K_{ts} \rightarrow 1, K_t \rightarrow 1$	$K_t/K_{ts} \rightarrow 1, K_t/K_{td} \rightarrow 1/K_{td}$
$\lambda \rightarrow 1, 0 < x \leq 2$	$t/\rho \rightarrow \infty$	$K_{tE} \rightarrow \infty, K_{ts} \rightarrow \infty, K_t = K_{td}$	$K_t/K_{ts} \rightarrow 0, K_t/K_{td} \rightarrow 1$
$x \rightarrow 0$	$a/\rho \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty, t/\rho \rightarrow 0$	$K_{tH} \rightarrow 1, K_{tE} \rightarrow 1, K_{ts} \rightarrow 1, K_{td} \rightarrow 1, K_t \rightarrow 1$	$K_t/K_{ts} \rightarrow 1, K_t/K_{td} \rightarrow 1$
$x \rightarrow 2, 0 < \lambda < 1$	$\rho/a \rightarrow 0, \rho \rightarrow 0$	$K_{ts} \rightarrow \infty, K_{td} \rightarrow \infty, K_t \rightarrow \infty$	obtained by extrapolation

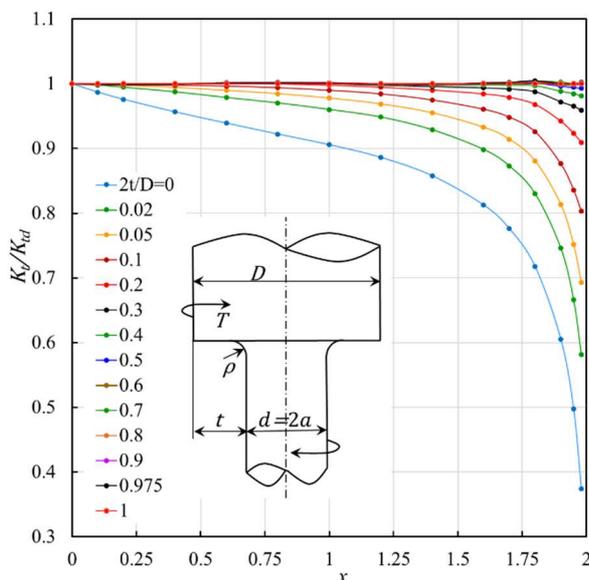


Fig.12 Relationship between  $K_t/K_{td}$  and  $x$  at each  $\lambda$ .

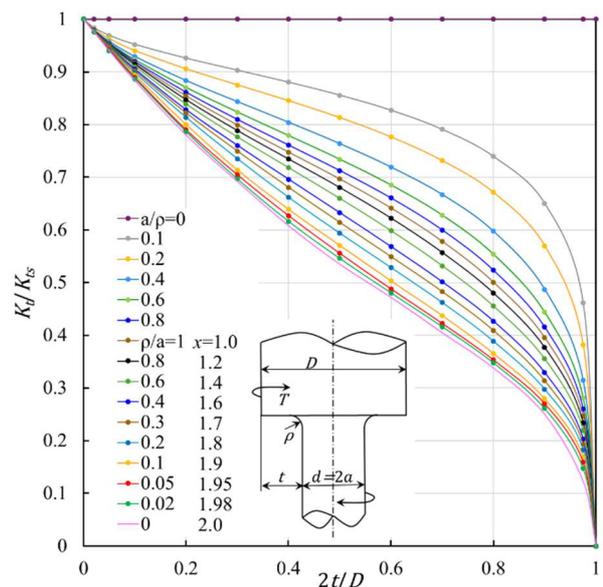


Fig.13 Relationship between  $K_t/K_{ts}$  and  $\lambda$  at each  $x$ .

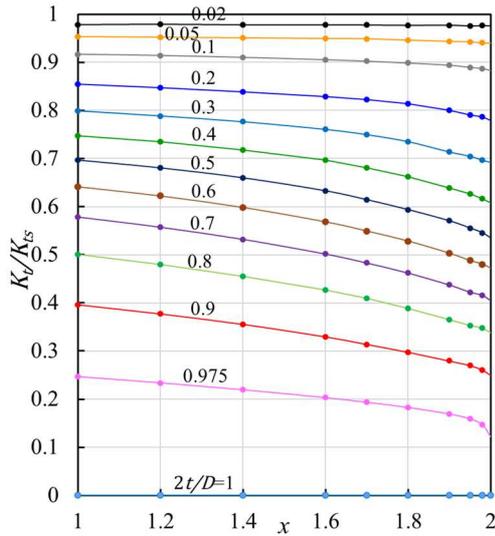


Fig.14 Relationship between  $K_t/K_{ts}$  and  $x$  at each  $\lambda$ . The values of  $K_t/K_{ts}$  as  $x \rightarrow 2$  ( $\rho \rightarrow 0$ ) can be found by extrapolation.

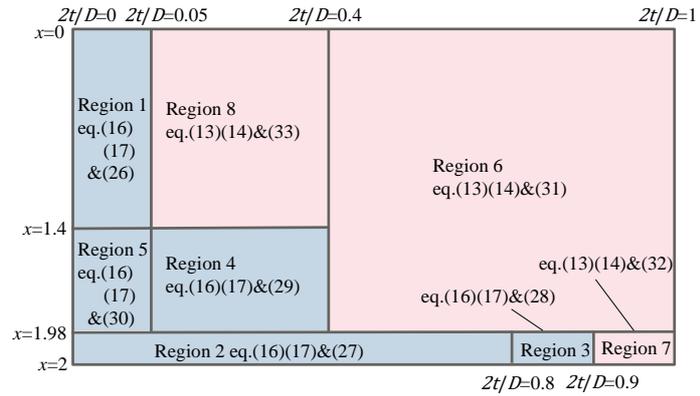


Fig.15 Classification of fillet shapes for making approximate formulas. Regions 1~5 are based on  $K_t/K_{ts}$  in Figs.13, 14 and regions 6~8 are based on  $K_t/K_{td}$  in Fig.12.

### 9. $K_t/K_{tN}^*$ によるフィレット形状の全範囲に対する応力集中係数の計算式

前章で、段付き丸棒のフィレット形状の全範囲に対する応力集中係数の計算式が付録の式(24)~(33)の通り得られた。ただし、各計算式は図 15 のそれぞれの領域のみで有効であり、やや不便である。本研究では、これまでの野田らの研究に倣い、FEMで求めた $K_t$ を、 $K_t/K_{tN}^*$ として、フィレット形状の全範囲の計算式として与えた。ここで、式(19)で表される $K_{tN}^*$ は、Neuberの三角則(Neuber, 1957)を修正し、精度の高い $K_{td}$ (式(13), (14), (15))と精度の高い $K_{ts}$ (式(16), (17), (18))を使用して求めた値であり、 $m = 1.6$ としている。図 16 に示すように、 $K_t/K_{tN}^*$ の値は $x \rightarrow 2$ の場合に急峻に変化する。さらに、 $1.98 < x \leq 2$ ではFEM解析が困難となるため、精度の高い $K_{ts}$ に基づく式(24)による $K_t/K_{ts}$ と精度の高い $K_{td}$ に基づく式(25)による $K_t/K_{td}$ から求められる $K_t/K_{tN}^*$ の値を用いて、近似式の精度確保を図った。また、 $x$ が2に漸近する際の $K_t/K_{tN}^*$ の変化、および全領域での $K_t/K_{tN}^*$ の1からの偏差が小さくなるように、式(19)には $m = 1.6$ を採用している。

$$K_{tN}^* = (K_{ts} - 1)(K_{td} - 1) / \{(K_{ts} - 1)^m + (K_{td} - 1)^m\}^{1/m} + 1, \quad m = 1.6 \tag{19}$$

FEMで求めた $K_t$ と、上述の通り前章近似式から求めた $K_t$ とによる $K_t/K_{tN}^*$ を近似する $x$ ,  $\lambda$ の多項式は式(20)で表される。近似式の精度を確保するために係数行列 $[A_{tN}]$ は3領域に分けて求めた。

$$K_t/K_{tN}^* = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^n A_{tN}(i+1, j+1) x^i \lambda^j \tag{20}$$

$x \leq 1.99$ ,  $l = 9, n = 9$  (近似誤差0.8%以下)

$$[A_{tN}] = \begin{bmatrix} 0.9994 & 0.0402 & -1.2280 & 13.5265 & -70.7143 & 202.5021 & -337.1539 & 326.0297 & -169.9334 & 36.9317 \\ 0.1763 & -1.3045 & 6.5723 & -77.3034 & 481.4811 & -1409.3626 & 2225.0355 & -1975.5926 & 929.3585 & -178.9976 \\ -2.5888 & 15.7636 & -7.2357 & -93.8105 & -184.9058 & 1090.0235 & -1354.3841 & 494.9125 & 190.3156 & -149.0041 \\ 13.6318 & -75.5972 & 91.0291 & 474.6413 & -693.2687 & -35.6860 & -500.8691 & 1674.3755 & -1446.6311 & 503.1021 \\ -35.3752 & 171.4189 & -340.2816 & -520.8515 & 938.0776 & 180.4844 & 17.4447 & -305.2143 & 129.2546 & -247.0898 \\ 51.2949 & -200.3871 & 503.4797 & 152.8264 & -429.8136 & -343.5987 & 42.3137 & -858.6771 & 1047.7214 & 52.3387 \\ -43.6023 & 120.3719 & -342.0819 & 71.9488 & -67.3688 & 191.6864 & 524.2938 & 337.6972 & -636.3762 & -171.4237 \\ 21.5817 & -31.1445 & 90.3755 & -18.0977 & 130.8603 & -116.4721 & -372.4435 & 21.6310 & 97.0879 & 183.9840 \\ -5.7580 & -0.1269 & 5.1287 & -28.0086 & -23.4041 & 29.6219 & 105.7485 & -40.4339 & 31.5921 & -76.3300 \\ 0.6400 & 1.0362 & -4.6221 & 9.7668 & -3.9916 & 1.8091 & -15.5358 & 10.3106 & -10.8695 & 11.6763 \end{bmatrix} \tag{21}$$

1.99 ≤ x < 1.999, l = 3, n = 6 (近似誤差 0.8%以下)

$$[A_{tN}] = \begin{bmatrix} 3532.7675 & -46381.2540 & 52989.5820 & -6131.0401 & -47543.8898 & 25587.5596 & 13198.8849 \\ -4810.8210 & 43869.8546 & -26949.6890 & -13235.6694 & 48898.5469 & -14844.9183 & -25577.8977 \\ 2160.2206 & -9044.5245 & -12523.0644 & 16381.5138 & -10640.6916 & -6456.8901 & 16334.7712 \\ -318.8746 & -647.2942 & 6373.5434 & -4110.5212 & -968.6021 & 3746.6602 & -3424.3815 \end{bmatrix} \quad (22)$$

1.999 ≤ x, l = 7, n = 9 (近似誤差 1%以下)

$$[A_{tN}] = \begin{bmatrix} -24912.8165 & -87336.2869 & 986.8529 & 67322.1816 & 67561.2815 & 578.8331 & 7060.0462 & 19792.5912 & -129425.1490 & -120039.5769 \\ -1038.3630 & 40683.3677 & 3673.3649 & -30265.8966 & -64680.5672 & 39274.5330 & -25039.2097 & -1165.6896 & 29442.8824 & 76627.5563 \\ 1223.6918 & 4.3714 & -1358.7721 & 12050.1410 & -1927.6475 & 12535.3458 & 3305.4287 & -5338.5096 & 37933.3403 & -2895.4654 \\ 1239.1242 & 9502.9417 & 7269.7010 & -4464.8874 & 1482.3735 & -2640.5556 & 4321.6622 & 11572.1536 & 1303.1981 & 5848.6860 \\ 2578.7517 & -4206.0343 & -9499.6665 & -1989.0157 & 5531.2782 & -9525.4678 & -7379.9031 & -7295.8479 & -7669.7590 & -2459.5521 \\ 51.1370 & -399.5702 & 2140.1957 & -524.2461 & 583.6220 & 139.4944 & 3779.5250 & 835.8465 & 1118.0829 & -889.1366 \\ -64.9038 & 769.5367 & 735.7220 & -406.2373 & -1969.0764 & -24.8611 & -701.9539 & 338.6840 & 505.5130 & -608.8242 \\ -207.4984 & -306.5418 & -192.6320 & 433.4039 & 593.3309 & 333.0087 & 277.8826 & -147.9361 & -294.5717 & 300.6236 \end{bmatrix} \quad (23)$$

図 16 に、式(20)に上記係数マトリックスを用いた  $K_t/K_{tN}^*$  の値を示す。x = 2 では、 $K_t, K_{tN}^*$  共に無限大となるが、 $K_t/K_{tN}^*$  は有限値となる。このことは、体積力法による鋭い V 型切欠き ( $\rho = 0$ ) を有する丸棒の解析結果からも示されている(高瀬他, 2001)。式(20)の誤差は 0.8~1% 未満であり、FEM による  $K_t$  の解が無い x においても滑らかな内挿曲線を与える。

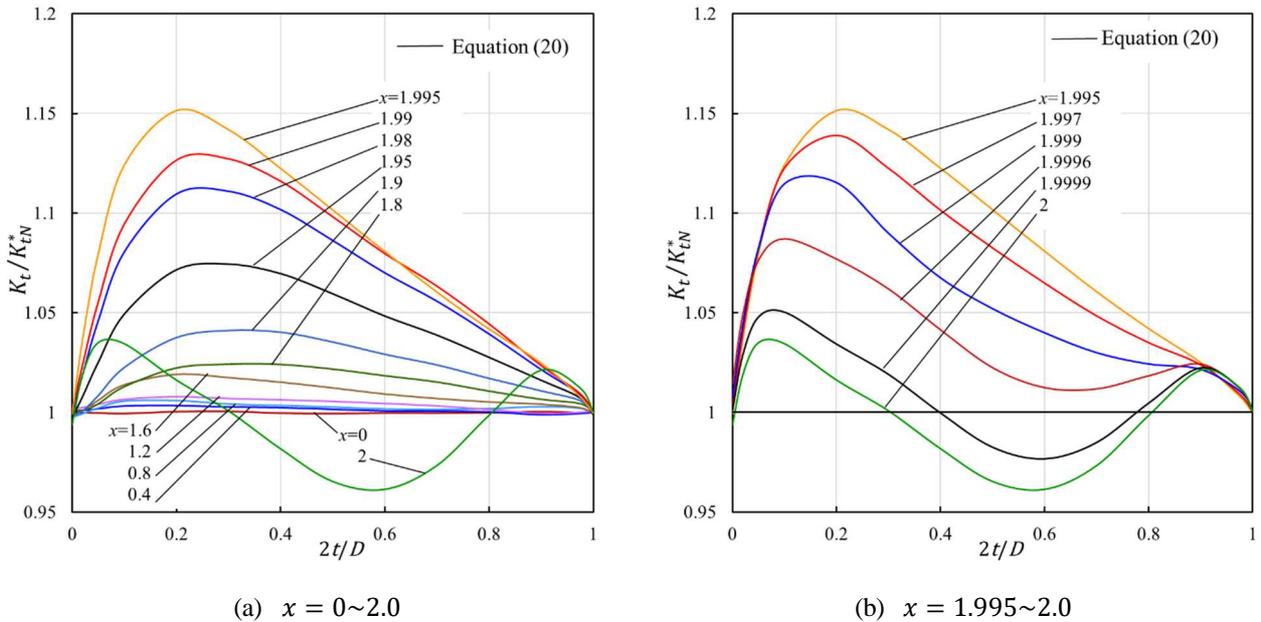


Fig.16  $K_t/K_{tN}^*$  obtained by Eq. (20). Equation (20) provides SCFs within 1% error for any dimensions of file.

### 10. 従来の応力集中係数との比較

設計実務においては、書籍 1(西田, 1978)、書籍 2(津村, 1965)、書籍 3(機械設計便覧編集委員会, 1992) 等による応力集中係数の図を参照し設計計算に用いることが多い。ねじりを受けるフィレット部を有する段付き丸棒に関しては、書籍 1 では Jacobsen の電気ポテンシャルの相似現象を利用した測定結果と Wiegand による歪ゲージによる測定結果から、書籍 2 では電圧分布との類似より求めた結果からの応力集中係数の図とされており、書籍 3 を含め大元の出典は同じと思われる。図 17 に書籍 1 の線図による応力集中係数 ( $K_t^{Nishida}$  と表記する) の、9 章の式(20)による応力集中係数 ( $K_t^{Eq.(20)}$  と表記する) に対する比を示す。図 17 より、 $K_t^{Nishida}$  には設計で重要な小さな  $\rho/d$  の範囲で 10% 程度の誤差があることがわかる。

Peterson の式(Peterson, 1974, Pilkey et al, 2020)は応力集中係数を簡易な式で表しており便利である。図 18 は、フィレット部を有する段付き丸棒の実設計寸法例を示すが、Peterson の式のねじりに於ける適用範囲( $0.25 \leq t/\rho \leq 4$ )、

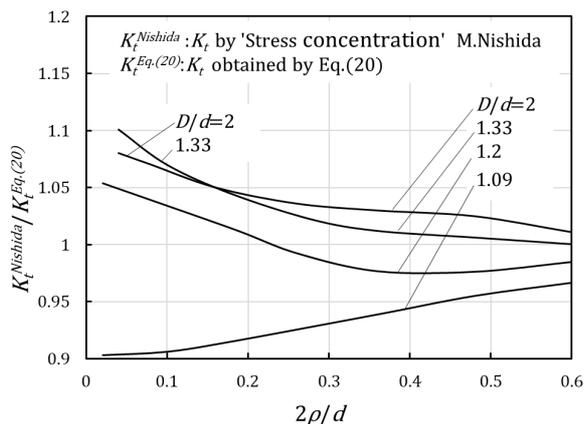


Fig.17 Accuracy of SCF  $K_t^{Nishida}$  in Ref (Nishida, 1978). Since  $0.9 \leq K_t^{Nishida}/K_t^{Eq.(20)} \leq 1.1$ ,  $K_t^{Nishida}$  has about 10% error when  $2\rho/d$  is small.

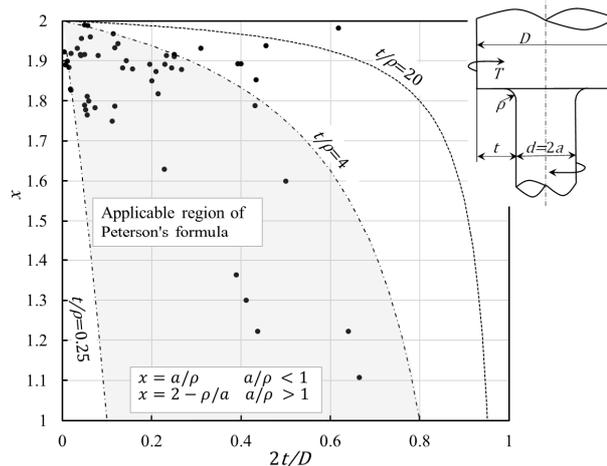


Fig.18 Actual design examples of stepped shafts with fillet previously used. The gray zone shows the applicable range of Peterson's formula. In practical designs, the stepped shafts in the range  $x=1.7\sim 2$  are often used.

は、引張り、曲げに於ける適用範囲( $0.1 \leq t/\rho \leq 20$ )に比べてかなり狭く、適用範囲を超える設計例が少なくない。図 19 に  $K_t^{Eq.(20)}$  に対する Peterson の式による応力集中係数 ( $K_t^P$  と表記する) の比を示す。  $K_t^P$  の  $K_t^{Eq.(20)}$  に対する誤差は、ねじりに於ける適用範囲内では最大でも 4% 程度である ( $0.97 \leq K_t^P/K_t^{Eq.(20)} \leq 1.04$ ) が、引張り、曲げに於ける適用範囲では最大 35% 程度となる ( $0.95 \leq K_t^P/K_t^{Eq.(20)} \leq 1.35$ )。この様に、ねじりに対する Peterson の式はその適用範囲内では誤差は大きくないが、適用範囲外の設計に対しては著しく過大な  $K_t$  を与えることがあり、設計実務での使用の制約となっている。

図 20 に  $D/d$  をパラメータにして  $\rho/d$  に対する 9 章の式(20)による応力集中係数  $K_t^{Eq.(20)}$  の線図を示す。図 20 により、設計実務で一般に参照される書籍の応力集中係数の線図に代えて、精度の高い応力集中係数が得られる。

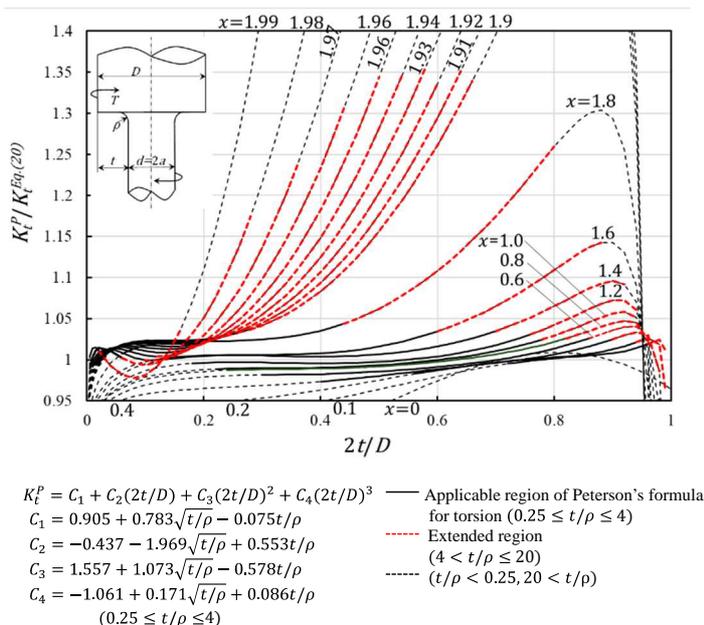


Fig.19 Accuracy of SCF  $K_t^P$  in Ref (Peterson, 1974, Pilkey et al, 2020). Since  $0.97 \leq K_t^P/K_t^{Eq.(20)} \leq 1.04$ , Peterson's formula has 4% error at most in the applicable range. Since  $0.95 \leq K_t^P/K_t^{Eq.(20)} \leq 1.35$ , Peterson's formula has 35% error at most in the same range proposed for tension and bending of stepped shaft by Peterson.

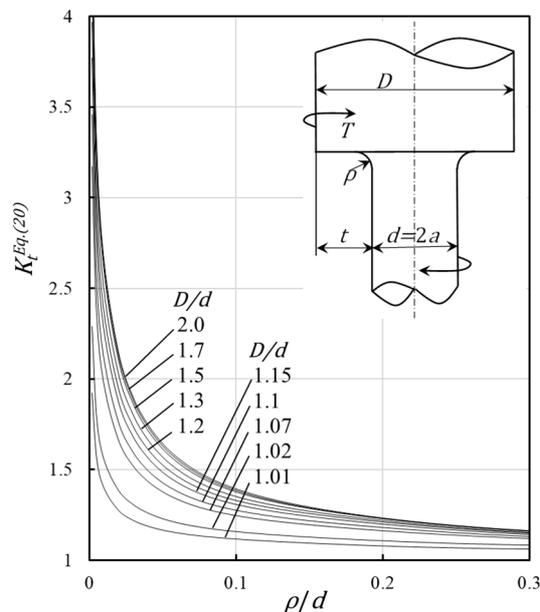


Fig.20 SCF diagram obtained by using Eq. (20) within 1% error.

## 11. 結 言

フィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数は、各種の軸の強度設計において重要である。引張り、曲げを受ける場合については、すべての寸法範囲に対し有効な応力集中係数の計算式が既に提案されているが、ねじりについては計算式が存在しない。そこで本論文では、解析手法として非軸対称荷重を受ける軸対称体に対する有限要素法を採用し、ねじりを受けるフィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数を全ての寸法範囲で精度良く近似する計算式を得た。また、体積法による解がある「半円切欠きを有する丸棒」、「60°V形切欠きを有する丸棒」に本解析手法を適用し、応力集中係数の解の精度が十分であることを確認した。

- 1) 設計実務で使用される書籍(西田, 1978)による応力集中係数は、設計で重要な小さな  $\rho/d$  の範囲で、本研究で得られた応力集中係数に対して最大 10% 程度の誤差がある。
- 2) ねじりに対する Peterson による応力集中係数の式(Peterson, 1974)の本研究で得られた応力集中係数に対する誤差は、適用範囲内で最大 4% ( $0.95 \leq K_t^P/K_t^{Eq.(20)} \leq 1.1$ ) であるが、適用範囲が著しく狭く設計実務での使用の制約となっている。
- 3) 引張りと曲げに対する式の適用範囲まで拡張して比較すると、Peterson の式の最大誤差は引張りの場合に 25%、曲げの場合に 15% であった(小田, 2025)がねじりでは 35% ( $0.95 \leq K_t^P/K_t^{Eq.(20)} \leq 1.35$ ) にも及ぶ。

## 文 献

- 機械設計便覧編集委員会, 機械設計便覧, 丸善出版, (1992), 590.
- Neuber, H., Kerbspannungslehre, Springer-Verlag, Berlin (1957).
- 西田正孝, 応力集中, 森北出版 増補版, (1978), 646.
- 西谷弘信, 野田尚昭, 半だ円および 60° V 形切欠きを有する丸棒のねじりにおける応力集中, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 50, No. 457 (1984), pp. 1592-1599.
- 野田尚昭, 高瀬康, フィレット部を有する段付き丸棒および段付き平板の応力集中係数についての考察, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 62, No. 595 (1996), pp. 787-793.
- 野田尚昭, 高瀬康, 江藤洋介, 切欠き形状の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式 (円周切欠きを有する丸棒ねじり試験片), 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 70, No. 689 (2004), pp. 93-100.
- 野田尚昭, 高瀬康, 藤本将史, フィレットの寸法の全範囲に対して正確な応力集中係数を与える計算式: フィレット部を有する段付き丸棒の引張り, 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 67, No. 653 (2001), pp. 49-54.
- 小田和広, 高畑泰幸, 山下 新太, 野田尚昭, 引張りと曲げを受けるフィレット部を有する段付き丸棒の応力集中係数の誤差の検討, 日本機械学会九州支部第 78 期総会・講演会講演論文集, No.258-1 (2025), 111.
- Peterson, R. E., Stress Concentration Factors, John Wiley, New York (1974) pp. 80-107.
- Pilkey, W. D., Pilkey, D. F. and Bi, Z., Peterson's Stress Concentration Factors, 4<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons Inc (2020) pp. 167-208.
- 高瀬康, 野田尚昭, 取違琢, 王清, 鋭い V 型切欠きを有する丸棒の曲げにおける混合モードの一般化応力拡大係数  $K_{I,\lambda_1}$ ,  $K_{II,\lambda_2}$ ,  $K_{III,\lambda_4}$ , 日本機械学会論文集 A 編, Vol. 67, No. 658 (2001), pp. 976-981
- 津村利光, 強度設計データブック, 裳華房, (1965), 618.
- Zienkiewicz, O. C., 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, 培風館, pp. 264-267.

## References

- Machine design handbook editorial committee, Machine design handbook, Maruzen Publishing, (1992), 590 (in Japanese).
- Neuber, H., Kerbspannungslehre, Springer-Verlag, Berlin (1957).
- Nishida, M., Stress concentration, Morikita Publishing, expanded edition, (1978), 646 (in Japanese).
- Nisitani, H. and Noda, N., Stress concentration in round bar with semi-elliptical and 60° V-shaped notches under torsion, Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.50, No.457 (1984), pp.1592-1599 (in Japanese).

- Noda, N.-A. and Takase, Y., Study on stress concentration factor of fillet in stepped round and flat bars under tension and bending, Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.62, No.595 (1996), pp.787–793 (in Japanese).
- Noda, N.-A., Takase, Y., and Etou, Y., Convenient stress concentration formula useful any shape of notch in a round test specimen (Tension of a round bar having a V-shaped and circular-arc notch), Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.70, No.689 (2004), pp.93–100 (in Japanese).
- Noda, N.-A., Takase, Y., and Fujimoto, M., Convenient stress concentration formula useful any shape of fillet (Tension of a stepped round bar with fillet), Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.67, No.653 (2001), pp.49–54 (in Japanese).
- Oda, K., Takahata, Y., Yamashita, A., and Noda, N.-A., Study on the error of stress concentration factor for stepped round bar with fillet subjected to tension and bending, Proceedings of the 78th Annual Meeting and Conference of the Kyushu Branch of the JSME, No.258-1 (2025), 111 (in Japanese).
- Peterson, R. E., Stress concentration factors, Jhnn Wiley, New York(1974) pp. 80-107.
- Pilkey, W. D., Pilkey, D. F. and Bi, Z., Peterson’s Stress Concentration Factors, 4<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons Inc (2020) pp. 167-208.
- Takase, Y., Noda, N.-A., Torichigai, T. and Wang, Q., Generalized stress intensity factors of a V-notched bar under bending, Journal of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.67, No.658 (2001), pp.976–981 (in Japanese).
- Tsumura, T., Strength design data book, Shokabou, (1965), 618 (in Japanese).
- Zienkiewicz, O. C., The finite element method in engineering science, Baifukan(1975), pp. 264-267 (in Japanese).

**付録  $K_t/K_{ts}$  および  $K_t/K_{td}$  によるフィレット形状の全範囲に対する応力集中係数の計算式**

図 15 の 8 つの領域毎の  $K_t/K_{ts}$  または  $K_t/K_{td}$  は、各々  $x, \lambda$  の多項式として式(24), (25)のように表される。

$$K_t/K_{ts} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^n A_k(i+1, j+1)x^i \lambda^j \quad (k = 1 \sim 5) \quad (24)$$

$$K_t/K_{td} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^n A_k(i+1, j+1)x^i \lambda^j \quad (k = 6 \sim 8) \quad (25)$$

- 1) 領域 1 :  $\lambda=0$  で  $K_t/K_{ts}=1$  であり,  $K_t/K_{ts}$  は 0.95~1 の値となる。(近似誤差 0.6%以下).

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 0.99972 & -0.08260 \\ -0.01038 & -4.69279 \\ 0.02303 & 9.00521 \\ -0.01822 & -6.94924 \\ 0.00484 & 1.83412 \end{bmatrix} \quad (26)$$

- 2) 領域 2 :  $x \rightarrow 2$  に伴いフィレット半径  $\rho$  が 0 に近づく。(近似誤差 0.5%以下).

$$[A_2] = \begin{bmatrix} -0.26377 & -19.33345 & 7.148790 & -27.40238 \\ 1.26783 & 19.72055 & -7.59514 & 27.29401 \\ -0.31780 & -5.34270 & 2.23193 & -6.90314 \end{bmatrix} \quad (27)$$

- 3) 領域 3 : (近似誤差  $\approx 0$ )

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 0.88621 & 0.51237 \\ 0.07789 & -0.69618 \end{bmatrix} \quad (28)$$

- 4) 領域 4 :  $K_t/K_{ts}$  は, 0.61~0.98 の値となる。(近似誤差 0.4%以下).

$$[A_4] = \begin{bmatrix} 0.99624 & -1.24279 & -1.63041 & 5.12093 \\ -0.00251 & 0.63269 & 3.83735 & -8.61596 \\ 0.00202 & -0.30203 & -1.36704 & 3.01241 \end{bmatrix} \quad (29)$$

- 5) 領域 5 : 領域 1 と同様に,  $K_t/K_{ts}$  は 0.94~1 の値となる。(近似誤差 0.3%以下).

$$[A_5] = \begin{bmatrix} 1.00488 & -1.73670 \\ -0.00819 & 1.20615 \\ 0.00286 & -0.46519 \end{bmatrix} \quad (30)$$

6) 領域 6 :  $x$  と  $\lambda$  の広い範囲で  $K_t/K_{td}$  は 1 に近い値となる. (近似誤差 0.7%以下).

$$[A_6] = \begin{bmatrix} 1.00665 & -0.02266 & 0.01878 & -0.00317 \\ -0.12924 & 0.49845 & -0.61292 & 0.24462 \\ 0.23548 & -0.90227 & 1.12496 & -0.45849 \\ -0.10693 & 0.40837 & -0.50961 & 0.20827 \end{bmatrix} \quad (31)$$

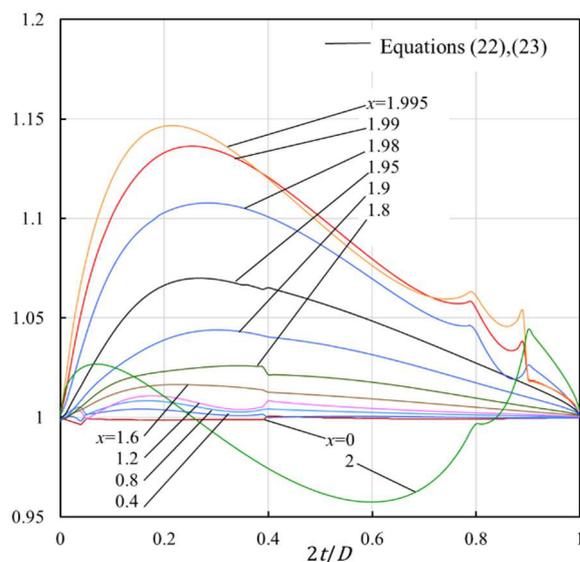
7) 領域 7 :  $2t/D$  が 1 に近い領域で, フィレット半径  $\rho$  が 0 に近づく際 ( $x \rightarrow 2$ ) に  $K_t/K_{td} \doteq 1$  である. (近似誤差 0.4%以下).

$$[A_7] = \begin{bmatrix} 27.25578 & -26.47282 \\ -13.25430 & 13.36419 \end{bmatrix} \quad (32)$$

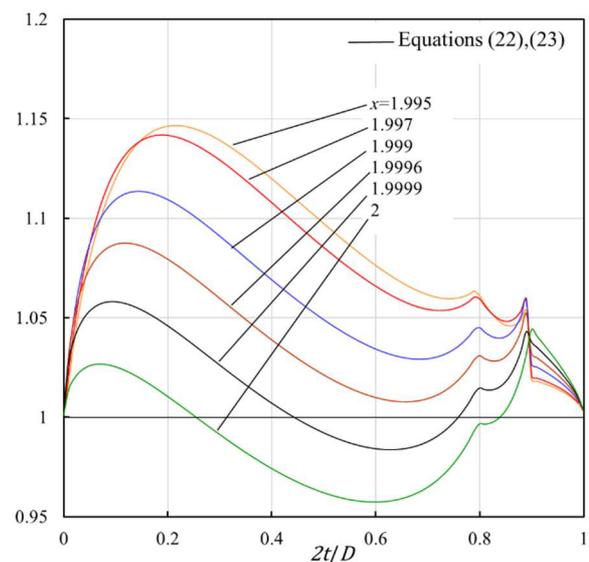
8) 領域 8 : 領域 4 と同様に,  $K_t/K_{td}$  の変動が小さく 0.928~1 の値となる. (近似誤差 0.5%以下).

$$[A_8] = \begin{bmatrix} 0.99975 & -0.01764 & 0.07252 & -0.08942 \\ -0.02656 & 0.52796 & -2.31094 & 3.00960 \\ -0.02294 & 0.06960 & 0.01737 & -0.20515 \end{bmatrix} \quad (33)$$

図 21 に, 付録の式(24), (25)による  $K_t/K_{ts}$ ,  $K_t/K_{td}$  の値から得た  $K_t$  を  $K_{tN}^*$  で除した値を示す. 各領域の範囲内で近似式の誤差は 0.7%未満である. なお, 式(24), (25)は各々5 領域, 3 領域で係数が異なる為に, 図 21 に示すように, 領域の境界で若干の不連続或いは滑らかでない箇所がある.



(a)  $x = 0 \sim 2.0$



(b)  $x = 1.995 \sim 2.0$

Fig.21  $K_t/K_{tN}^*$  obtained by Eqs. (22), (23). Equations (22), (23) provide SCFs within 0.7% error in each region.

The discontinuous results are caused at boundary regions in Fig.15.