「エレクトロニクス実装学会誌」**23**〔2〕155〜165 (2020)

●研究論文

論文

角柱状突合わせ継手の界面端における角部と直線部での特異応力場出現条件の考察

宮﨑　達二郎 *，佐藤　敬介 **，藤原　敬宏 **，野田　尚昭 ***，佐野　義一 ***

Examination of Appearance Conditions of Singular Stress Fields at the Vertex and Along the Side of Interface in Prismatic Butt Joint

Tatsujiro MIYAZAKI*, Keisuke SATO**, Takahiro FUJIWARA**, Nao-Aki NODA***, and Yoshikazu SANO***

* 琉球大学工学部工学科エネルギー環境工学コース（〒903-0213　沖縄県中頭郡西原町千原 1）
** 琉球大学大学院理工学研究科機械システム工学専攻（〒903-0213　沖縄県中頭郡西原町千原 1）
*** 九州工業大学大学院工学研究院機械知能工学研究系（〒804-8550　福岡県北九州市戸畑区仙水町 1-1）
* Energy and Environment Program, School of Engineering, Faculty of Engineering, University of the Ryukyus (1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213)
** Department of Mechanical Systems Engineering, Graduate School of Engineering and Science, University of the Ryukyus (1 Senbaru, Nishihara-cho, Nakagami-gun, Okinawa 903-0213)
*** Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology (1-1 Sensui-cho, Tobata-ku, Kitakyushu-shi, Fukuoka 804-8550)

概要　本論文では，角柱状突合わせ継手の界面端角部および直線部の Bad pair 条件の違いを考察した。有限要素法 (FEM) に基づく固有値解析で突合わせ継手の特異性指数を種々の材料組み合せにおいて求めた。界面端角部での Bad pair 条件は，2 次元モデルで知られている条件 $\alpha(\alpha-2\beta)>0$ とかなり近いが，明確に異なる場合がある。ここで，(α,β) は Dundurs の複合材料パラメータである。すなわち，多くの場合には (α,β) で表現できるが，(α,β) のみでは表現できない場合が存在する。Bad pair 条件の違いを明示するため，界面端角部で特異性が出現・消失する材料組み合せを (α,β) マップで比較して示した。さらに，3 次元モデルでの Good pair，Equal pair および Bad pair を判別する簡便式を提案し，その妥当性を解析結果に基づいて議論した。界面端直線部での Bad pair 条件は，$\alpha(\alpha-2\beta)>0$ で表現できることを示した。

Abstract

In this paper, we discuss the bad pair condition causing a singular stress at a vertex of the interface in three dimensional (3D) prismatic butt joints in comparison with the bad pair condition along the side. 3D finite element (FE) eigenanalysis is applied to obtain the singular index. We found that the bad pair condition at a vertex is slightly different from the well-known 2D bad pair condition $\alpha(\alpha-2\beta)>0$, which can be expressed using Dundurs' parameter (α,β). It should be noted that in most cases the bad pair can be judged by (α,β) except for some cases where the bad pair depends on the material combination even under the same (α,β). To clarify the difference, the bad pair conditions are compared on the (α,β) diagram. For convenience, a simple expression for a bad pair is proposed on the basis of the theoretical consideration, and the validity is confirmed numerically. We also confirm that the bad pair condition along the side of the interface can be expressed using Dundurs' parameter as $\alpha(\alpha-2\beta)>0$.

***Key Words**: Butt Joint, Interface, Singular Stress Field, Singular Index, Eigen Analysis*

1.　緒　言

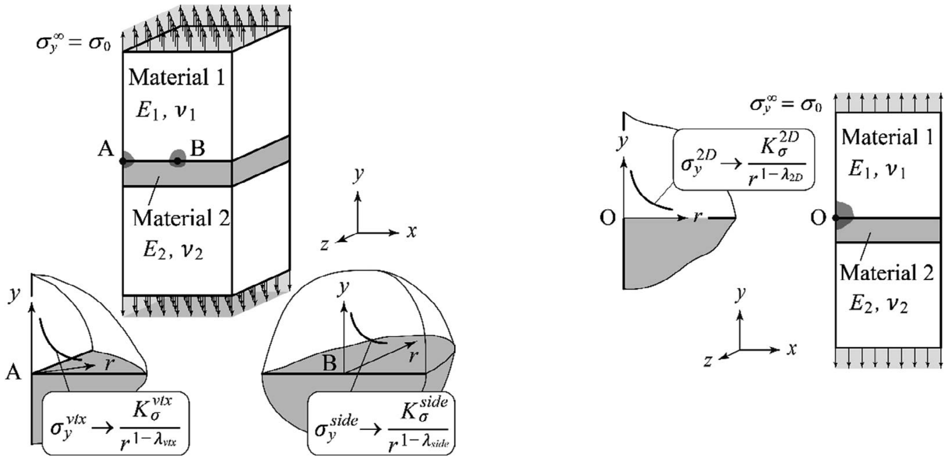
近年，CO_2 排出規制の厳格化に伴い，電気自動車やハイブリット車，燃料電池車などといったクリーンエネルギ自動車の開発が精力的に行われている [1)]。より燃費を良くし，環境負荷を小さくするためには自動車の電子化は必須であり [2),3)]，それを実現するには車内の厳しい環境に耐える半導体が不可欠である。半導体は弾性係数，線膨張係数など特性の異なる材料で構成されている。材料同士の相性に問題があると，熱や振動などの負荷によって半導体の損傷や破壊を招く特異応力が材料間の接合界面端に生じることになる [4),5)]。半導体の信頼性を確保するには，材料同士の相性を適切に評価する必要がある。

一般に，異材接合部の界面端部には次のように表される特異応力が生じる [6)]。

$$\sigma(r)=K_\sigma r^{\lambda-1},\ K_\sigma=\lim_{r\to 0} r^{1-\lambda}\sigma(r) \tag{1}$$

ここで，r は界面端部からの距離，σ は応力，λ は特異性指数，K_σ は特異応力場の強さである。λ は界面端部近傍での力学状態で決まり，離れた位置での接合体の形状，荷重の状態には関係しない [6)]。2 次元接合板の λ は Bogy [7),8)] の特性方程式，3 次元接合体の λ は有限要素法 (FEM) に基づく変位の固有方程式 [9)〜11)] を解くことで求められ，その値が 1 より小さくなる場合には特異応力場が存在することになる。はく離破壊は 2 次元モデルでは再現できない界面端角部から引き起こされることが多いが [12)]，応力解析や強度評価を行う際には 2 次元モデルがよく用いられる。

著者らは先に Fig. 1(a) に示す角柱状突合わせ継手（Butt Joint，以下 BJ と略す）の引張試験 [12)] に注目し，接着層厚



(a) 3D model.　　(b) 2D model.

Fig. 1 Schematic illustration of butt joint (BJ) models

さ 0.05 mm～5 mm の範囲の実験結果が特異応力場の強さ K_σ = 一定で表現できることを示した [13),14)]。すなわち，(1) Fig. 1(a) の 3 次元 BJ モデルの界面端角部 A，(2) Fig. 1(a) の 3 次元 BJ モデルの界面端直線部 B，(3) Fig. 1(b) の 2 次元 BJ モデルの界面端部 O に生じる特異応力のいずれに注目しても，接着強度は特異応力場の強さ K_σ = 一定で表現することができる。

このように，先の研究 [13),14)] では Fig. 1(b) の 2 次元 BJ モデルを用いて Fig. 1(a) を評価することの妥当性も確認された。特に，Fig. 1(b) の 2 次元 BJ モデルにおいて特異応力場が生じる条件は，Dundurs[15)～17)] の複合材料パラメータ (α, β) を用いて $\alpha \cdot (\alpha - 2\beta) > 0$ のように簡単に表され，それは Bad pair 条件と呼ばれる。しかしながら，Fig. 1(a) の 3 次元 BJ モデルの界面端角部の特異応力場の判別について，これまでにも結城，許 [18)] および古口ら [11)] によって研究がなされているが，このような明確な判別式は知られていない。そのため，例えば 2 次元 BJ モデルを想定して，特異応力場は存在せず安全と判断した場合でも，界面端角部では特異応力場が存在して強度上の危険個所となる可能性がある。したがって，最も基本的な 3 次元角状突合わせ継手［Fig. 1(a)］における Bad pair 条件を 2 次元 BJ モデル［Fig. 1(b)］と比較して示すことは，パワー半導体向けの実装部の設計や解析においても極めて重要である。

そこで本研究では，FEM に基づいた固有値解析で 3 次元角柱状突合わせ継手［Fig. 1(a)］の界面端角部および直線部の λ を種々の材料組み合わせにおいて求め，応力特異性が出現・消滅する材料組み合わせを明らかにする。また，界面端角部および直線部での応力特異性を判別する簡便式を提案し，その妥当性を検討する。

2. 突合わせ継手の 2 次元モデルの Bad pair 判別式

Fig. 1(b) に突合わせ継手の 2 次元モデルを示す。このモデルにおいて，特異応力場が存在するか否かの判別式は，厳密に導かれている [17)～19)]。また，以下のように，界面 $y = 0$ での x 軸方向の適合条件より，その物理的解釈がなされている [17),18)]。まず，界面に対して垂直な y 軸方向に引張る場合での x 軸方向の適合条件を考える。3 軸応力状態での x 方向のひずみ ε_x は，次のように表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)}{E} \tag{2}$$

材料 1 に応力 $\sigma_{x1} = 0$，$\sigma_{y1} = \sigma_0$，$\sigma_{z1} = \nu_1\left(\sigma_{x1} + \sigma_{y1}\right) = \nu_1\sigma_0$，材料 2 に応力 $\sigma_{x2} = 0$，$\sigma_{y2} = \sigma_0$，$\sigma_{z2} = \nu_2\left(\sigma_{x2} + \sigma_{y2}\right) = \nu_2\sigma_0$ を負荷する。材料 1 側と 2 側で同じひずみ ε_x が生じるとすると，それは次のように書き表される。

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu_1\left(1+\nu_1\right)}{E_1}\sigma_0 = -\frac{\nu_2\left(1+\nu_2\right)}{E_2}\sigma_0 \tag{3}$$

$\lambda_{2D} = 1$ となるための条件は，式 (3) より次のように表される。

$$\frac{\nu_1\left(1+\nu_1\right)}{E_1} = \frac{\nu_2\left(1+\nu_2\right)}{E_2} \tag{4}$$

式 (4) は，後述する Dundurs パラメータ (α, β) で表すと $\alpha - 2\beta = 0$ に相当する。

次に，界面に対して平行な x 軸方向に引張った場合での x 軸方向の適合条件を考える。材料 1 に応力 $\sigma_{x1} = \sigma_0$，$\sigma_{y1} = 0$，$\sigma_{z1} = \nu_1\left(\sigma_{x1} + \sigma_{y1}\right) = \nu_1\sigma_0$，材料 2 に応力 $\sigma_{x2} = \sigma_0$，$\sigma_{y2} = 0$，$\sigma_{z2} = \nu_2\left(\sigma_{x2} + \sigma_{y2}\right) = \nu_2\sigma_0$ を負荷する。材料 1 側と 2 側で同じひずみ ε_x が生じるとすると，それは次のように書き表される。

$$\varepsilon_x = \frac{1-\nu_1^2}{E_1}\sigma_0 = \frac{1-\nu_2^2}{E_2}\sigma_0 \tag{5}$$

$\lambda_{2D} = 1$ となるための条件は，式 (5) より次のように表される。

$$\frac{1-\nu_1^2}{E_1} = \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{6}$$

式 (6) は，後述する (α, β) で表すと $\alpha = 0$ に相当する。

最終的に，平面ひずみ下での特異性の判別式は式 (4)，(6) より次のように表される。

$$\left(\frac{\nu_1+\nu_1^2}{E_1}-\frac{\nu_2+\nu_2^2}{E_2}\right)\cdot\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}-\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right)\begin{cases}>0\cdots\text{Bad pair}\\=0\cdots\text{Equal pair}\\<0\cdots\text{Good pair}\end{cases} \tag{7}$$

ここで，Bad pair は $\lambda_{2D} < 1$，Good pair は $\lambda_{2D} > 1$，Equal pair は $\lambda_{2D} = 1$ となる材料組み合わせを示している。式 (7) は Dundurs パラメータ (α, β) を用いると次式のように書き換えられ，(α, β) マップには Fig. 2 のように描かれる。

$$\alpha\cdot(\alpha-2\beta)\begin{cases}>0\cdots\text{Bad pair}\\=0\cdots\text{Equal pair}\\<0\cdots\text{Good pair}\end{cases} \tag{8}$$

ここで，(α, β) は横弾性係数 G_m（$m = 1$，2）およびポアソン比 ν_m で次のように定義される。

$$\alpha=\frac{G_1(\kappa_2+1)-G_2(\kappa_1+1)}{G_1(\kappa_2+1)+G_2(\kappa_1+1)} \tag{9}$$

$$\beta=\frac{G_1(\kappa_2-1)-G_2(\kappa_1-1)}{G_1(\kappa_2+1)+G_2(\kappa_1+1)} \tag{10}$$

$$\kappa_m = 4-3\nu_m \tag{11}$$

本節では平面ひずみ下での特異性の判別式を導いたが，平面応力下でも同様な考えで導くことができる[17),18)]。

特異性指数は界面端部近傍の力学状態で決まるので，3 次元モデルの界面端直線部上に無限小領域を設定すると，その領域内は平面ひずみ状態となると考えられる。したがって，3 次元モデルの界面端直線部の特異性指数 λ_{side} は平面ひずみ条件下での λ_{2D} と等しくなり，その特異性も同じ式 (7) で判別される。

3. 角柱状突合わせ継手の界面端角部の特異性指数の解析

本研究では，FEM に基づいた固有値解析[9)〜11)] で特異性指数を求めた。この解析法では，Fig. 3(a) に示すように接合体の界面端角部 O に半径 r_0 の球を考える。そして，点 O に球座標 (r, θ, φ) を設定し，その球を有限要素分割する。球表面 $(r = r_0)$ を θ 方向および φ 方向に分割し，球面四角形の頂点と点 O を結んで内部を分割すると，要素内の (r, θ, φ) は次式で表すことができる。

$$r(\zeta)=r_0\rho(\zeta)=r_0\left(\frac{1+\zeta}{2}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$
$$\theta(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{8}H_n(\xi,\eta)\theta_n,\ \varphi(\xi,\eta)=\sum_{n=1}^{8}H_n(\xi,\eta)\varphi_n \tag{12}$$

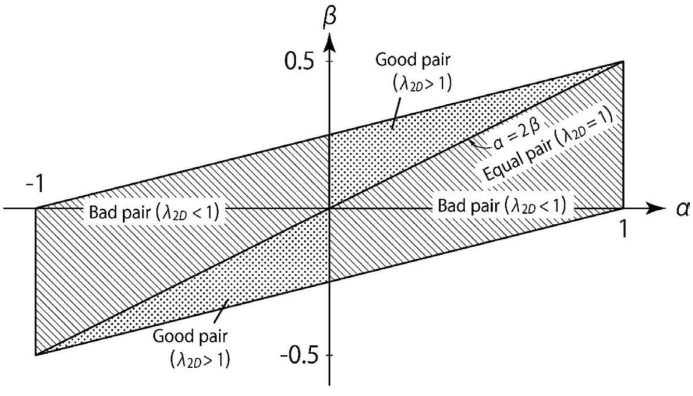
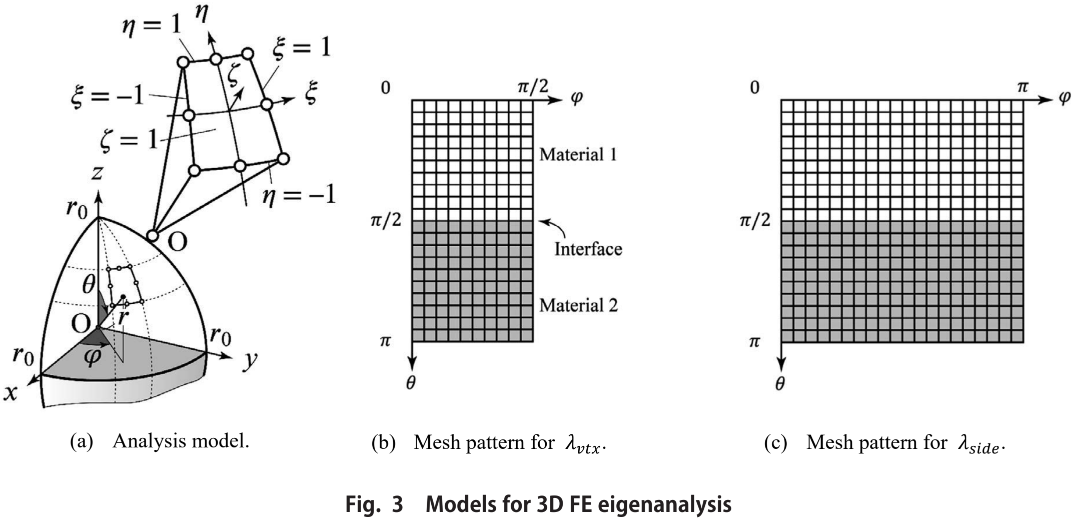
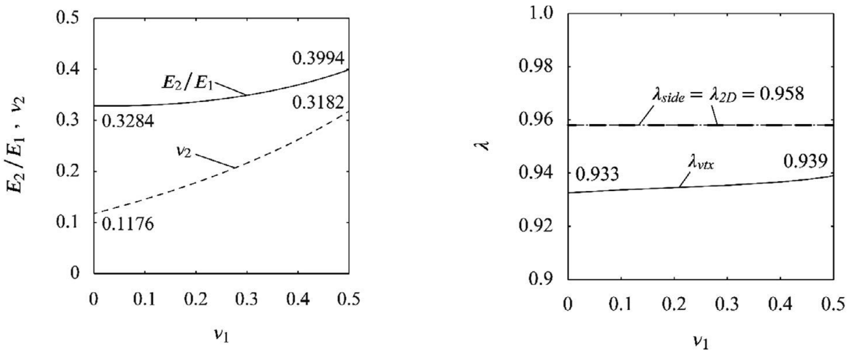


Fig. 2 Bad pair region of 2D butt joint in Fig. 1 (b) on (α, β) map



(a) Analysis model.　(b) Mesh pattern for λ_{vtx}.　(c) Mesh pattern for λ_{side}.

Fig. 3 Models for 3D FE eigenanalysis



(a) E_2/E_1 and ν_2.　　　(b) λ_{vtx}, λ_{side} and λ_{2D}.

Fig. 4 Singular indexes λ_{vtx}, λ_{side} and λ_{2D} under (α, β) = (0.5, 0.2)

ここで，(ζ,ξ,η) は要素内の局所座標であり，$|\zeta|\le 1$，$|\xi|\le 1$，$|\eta|\le 1$，H_n はセレンディプティ二次要素の内挿関数である。原点Oの変位を零とすると，離散化された節点の変位 u_i $(i = r, \theta, \varphi)$ は，次のように表される。

$$u_i=\rho^{\lambda}\sum_{n=1}^{8}H_n u_{i,n}\left(i=r,\theta,\varphi\right) \tag{13}$$

式 (12)，(13) を仮想仕事の原理に適用すると，次の固有方程式が得られる [9)〜11)]。

$$\left(\lambda^2[\mathbf{A}]+\lambda[\mathbf{B}]+[\mathbf{C}]\right)\{\mathbf{u}\}=0 \tag{14}$$

ここで，$[\mathbf{A}]$，$[\mathbf{B}]$ および $[\mathbf{C}]$ は接合体の材料特性および形状で決まる剛性行列，$\{\mathbf{u}\}$ は節点変位ベクトルである。

3 次元モデルの界面端角部の特異性指数 λ_{vtx} および直線部の特異性指数 λ_{side} は，固有方程式 (14) を解くことで得られる。λ_{vtx} の解析では Fig. 3(b)，λ_{side} の解析では Fig. 3(c) に示すようなパターンで要素分割を行った。最小要素寸法 $\theta_{\min}$，$\varphi_{\min}$ を種々に変化させながら解析を行い，解がそれに依存しないことを確認した。そして，計算の精度と量から最小要素寸法は $\theta_{\min}=\varphi_{\min}=5°$ とし，λ_{vtx} の解析では θ 方向を 36 分割，φ 方向を 18 分割，λ_{side} の解析では θ 方向および φ 方向を 36 分割した。行列 $[\mathbf{A}]$，$[\mathbf{B}]$ および $[\mathbf{C}]$ を計算する際に数値 2 重積分を行う必要があるが，本解析では優良格子点法 [20)] を用いて計算の精度と効率の確保に努めた。また，固有値計算には GPL の数値計算ソフトウェア Octave を用いた。

平面ひずみ条件下で (α, β) = (0.5, 0.2) となる場合の解析を一例として，その結果を Fig. 4 に示す。ν_1 を 0 から 0.5 まで変化させながら解析を行うと，1 実数の λ_{2D}，λ_{vtx} および λ_{side} が Fig. 4(b) のように得られた。なお，2 次元モデルの特異性指数 λ_{2D} については次の Bogy の特性方程式 [7),8)] を解いて求めた。

$$\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)-\lambda^2\right]^2\beta^2+2\lambda^2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\lambda\right)-\lambda^2\right]\alpha\beta$$
$$+\lambda^2\left(\lambda^2-1\right)\alpha^2+\frac{\sin^2(\pi\lambda)}{4}=0 \tag{15}$$

Fig. 4(a) に示すように E_2/E_1 は 0.3284 から 0.3994，ν_2 は 0.1176 から 0.3182 に変化するが，λ_{side} は変化することなく，λ_{2D} と等しい 0.958 となった。一方，λ_{vtx} は λ_{2D} より小さく，0.933 から 0.939 まで変化した。$\lambda_{side}=\lambda_{2D}$ となる結果は，(α, β) = (0.5, 0.2) 以外の場合においても確認された。したがって，λ_{side} については界面端直線部が平面ひずみ状態にあるとして求めればよく，特異性の判別は式 (7) で可能であると言える。

4. 角柱状突合わせ継手の界面端角部での Bad Pair 判別式

角柱状突合わせ継手界面端角部の特異性指数を得るのには，3 章で述べた数値手法を用いらざるを得ず，特異性の判別式についてはほとんど議論されていない [11),18)]。本章では，2 章に述べた Fig. 1 (b) の 2 次元モデルでの解釈を基に Fig. 1(a) の 3 次元モデルにおける判別式を導く。本章の議論で求められる判別式は解析的に厳密に導かれるものではないので，後述の 5 章でその妥当性を数値的に確認する。まず，界面に対して垂直な y 軸方向および平行な z 軸方向に引張った場合を考える。材料 1 側および 2 側に応力 $\sigma_{x1}=\sigma_{x2}=\sigma_x=0$，$\sigma_{y1}=\sigma_{y2}=\sigma_y=\sigma_0'+\sigma_0''$，$\sigma_{z1}=\sigma_{z2}=\sigma_z=\sigma_0'$ を負荷する。$\sigma_y=\sigma_z=\sigma_0'$ で生じる材料 1 側および 2 側の x 軸方向ひずみをそれぞれ ε_{x1}'，ε_{x2}'，$\sigma_y=\sigma_0''$ で生じる材料 1 側および 2 側の x 軸方向ひずみをそれぞれ ε_{x1}''，ε_{x2}'' とすると，材料 1 側の x 軸方向ひずみ ε_{x1} は次のように書き表される。

$$\varepsilon_{x1}=\varepsilon_{x1}'+\varepsilon_{x1}'' \tag{16}$$

$$\varepsilon_{x1}'=-2\frac{\nu_1}{E_1}\sigma_0' \tag{17}$$

$$\varepsilon_{x1}''=-\frac{\nu_1}{E_1}\sigma_0'' \tag{18}$$

同様に，材料 2 側の x 軸方向ひずみ ε_{x2} は次のように書き表される。

$$\varepsilon_{x2}=\varepsilon_{x2}'+\varepsilon_{x2}'' \tag{19}$$

$$\varepsilon_{x2}'=-2\frac{\nu_2}{E_2}\sigma_0' \tag{20}$$

$$\varepsilon''_{x2} = -\frac{\nu_2}{E_2}\sigma''_0 \tag{21}$$

ε'_{x1} は ε''_{x2}，ε''_{x1} は ε'_{x2} で相殺されて適合条件を成立させると，$\varepsilon'_{x1} = \varepsilon''_{x2}$ および $\varepsilon''_{x1} = \varepsilon'_{x2}$ より次式が得られる。

$$-2\frac{\nu_1}{E_1}\sigma'_0 = -\frac{\nu_2}{E_2}\sigma''_0 \tag{22}$$

$$-\frac{\nu_1}{E_1}\sigma''_0 = -2\frac{\nu_2}{E_2}\sigma'_0 \tag{23}$$

式 (22)，(23) を整理すると，次式が得られる。

$$\frac{\sigma''_0}{\sigma'_0} = 2\frac{\nu_1 E_2}{\nu_2 E_1} = 2\frac{\nu_2 E_1}{\nu_1 E_2} \tag{24}$$

よって，界面端角部の特異性指数$\lambda_{vtx} = 1$となるための条件は，次のように表される。

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} \tag{25}$$

界面端直線部と角部での特異応力場出現条件（Bad pair 条件）の比較には，Fig. 2 のような (α, β) マップが便利である。Bad pair と Good pair の境界となるのが Equal pair 条件であり，その一つが式 (25) で表される。3 次元モデルの界面端角部の Equal pair 条件 (25) は，2 次元モデルの界面端部の Equal pair 条件 (4)，(6) とは異なり，(α, β) マップ上の直線や曲線では表されない。しかしながら，式 (25) を満たす (α, β) の存在域は極めて狭い領域に限定され，Fig. 5 の領域 I のようになる。領域 I を不等式で数値的に表現すると付録の式 (A1)～(A4) で表される。

次に，界面に対して平行な x 軸方向および z 軸方向に引張る場合での x 軸方向の適合条件を考える。材料 1 側および 2 側に応力 $\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \sigma_x = \sigma'_0 + \sigma''_0$，$\sigma_{y1} = \sigma_{y2} = \sigma_y = 0$，$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} = \sigma_z = \sigma'_0$ を負荷する。$\sigma_x = \sigma_z = \sigma'_0$ で生じる材料 1 側および 2 側の x 軸方向ひずみをそれぞれ ε'_{x1}，ε'_{x2}，$\sigma_x = \sigma''_0$ で生じる材料 1 側および 2 側の x 軸方向ひずみをそれぞれ ε''_{x1}，ε''_{x2} とすると，材料 1 側の x 軸方向ひずみε_{x1}は次のように書き表される。

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon'_{x1} + \varepsilon''_{x1} \tag{26}$$

$$\varepsilon'_{x1} = \frac{1}{E_1}\sigma'_0 - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma'_0 \tag{27}$$

$$\varepsilon''_{x1} = \frac{1}{E_1}\sigma''_0 \tag{28}$$

同様に，材料 2 側の x 軸方向ひずみε_{x2}は次のように書き表される。

$$\varepsilon_{x2} = \varepsilon'_{x2} + \varepsilon''_{x2} \tag{29}$$

$$\varepsilon'_{x2} = \frac{1}{E_2}\sigma'_0 - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma'_0 \tag{30}$$

$$\varepsilon''_{x2} = \frac{1}{E_2}\sigma''_0 \tag{31}$$

ε'_{x1} は ε''_{x2}，ε''_{x1} は ε'_{x2} で相殺されて適合条件を成立させると，$\varepsilon'_{x1} = \varepsilon''_{x2}$ および $\varepsilon''_{x1} = \varepsilon'_{x2}$ より次式が得られる。

$$\frac{1}{E_1}\sigma'_0 - \frac{\nu_1}{E_1}\sigma'_0 = \frac{1}{E_2}\sigma''_0 \tag{32}$$

$$\frac{1}{E_1}\sigma''_0 = \frac{1}{E_2}\sigma'_0 - \frac{\nu_2}{E_2}\sigma'_0 \tag{33}$$

式 (32)，(33) を整理すると，次式が得られる。

$$\frac{\sigma''_0}{\sigma'_0} = (1-\nu_1)\frac{E_2}{E_1} = (1-\nu_2)\frac{E_1}{E_2} \tag{34}$$

よって，$\lambda_{vtx} = 1$ となるための条件は次のように表される。

$$\frac{\sqrt{1-\nu_1}}{E_1} = \frac{\sqrt{1-\nu_2}}{E_2} \tag{35}$$

式 (35) の Equal pair 条件を満たす (α, β) の存在域は，Fig. 5 の領域 II，III のようになる。それらの領域を不等式で数値的に表現すると付録の式 (A5)～(A10) のようになる。

最終的に，3 次元モデルの界面端角部での特異性の判別式は式 (25)，(35) より次のように表される。

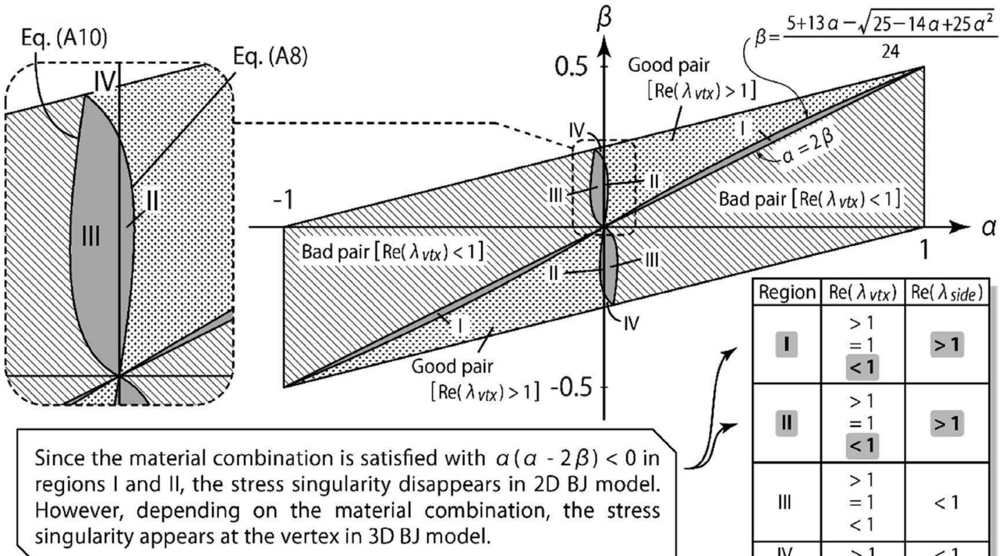


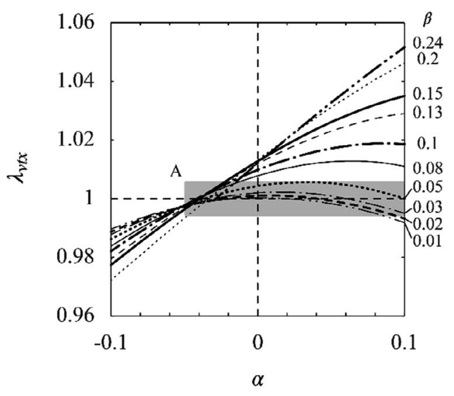
Fig. 5　Bad pair region of 3D prismatic butt joint in Fig. 1 (a) on (α, β) map

$$\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1-\nu_1}}{E_1}-\frac{\sqrt{1-\nu_2}}{E_2}\right)\begin{cases}>0\cdots\text{Bad pair}\\=0\cdots\text{Equal pair}\\<0\cdots\text{Good pair}\end{cases} \tag{36}$$

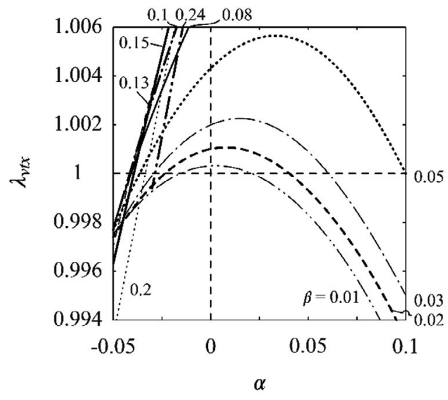
Fig. 5 に界面端角部で Bad pair，Equal pair および Good pair となる領域を記した (α,β) マップを示す。領域 I は式 (25)，領域 II および III は式 (35) で表される Equal pair 条件を満たす (α,β) の存在域である。式 (36) に示すように界面端角部での特異性の出現・消失は (α,β) では決まらないので，領域 I ～ III では Bad pair，Equal pair および Good pair のいずれかが材料組み合わせによって現れることになる。領域 IV は，2 次元モデルの Bad pair 条件 $\alpha(\alpha-2\beta)>0$ および式 (36) の Good pair 条件を同時に満たす (α,β) の存在域であり，それを不等式で表すと付録の式 (A11) となる。界面端直線部の (α,β) マップは $\lambda_{side}=\lambda_{2D}$ より Fig. 2 と同じように描かれるので，領域 I ～ IV が界面端角部と直線部での特異性の出現・消失の違いとなる（詳しくは，付録を参照されたい）。特に，領域 I および II には界面端角部で Bad pair，直線部で Good pair となり得る材料組み合わせが存在する。実材料を用いた議論は次章で行うが，そのような材料組み合わせを 2 次元モデルに適用すると，界面端角部で特異性が生じているにもかかわらず，Good pair となって界面端が危険側に評価される可能性がある。

5. 角柱状突合わせ継手の界面端角部の応力特異性の判別式の妥当性

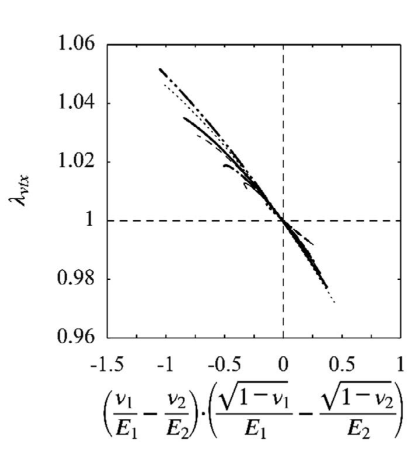
4 章の議論で求められた判別式 (36) は厳密な解析で導かれたものではないので，本章ではその妥当性を数値的に確認する。Fig. 5 に示すようにおおまかには $\alpha=0$ 付近および $\alpha=2\beta$ 付近で $\lambda_{vtx}=1$ となる。そこで，まず $\alpha=0$ 付近での式 (36) の妥当性を検討する。Fig. 6 に β を 0.01 から 0.24 まで変化させながら求めた $-0.1\leq\alpha\leq0.1$，$\nu_1\nu_2=0$ での λ_{vtx} を示す。ここで，$\alpha>0$ では ν_2 の最小値は 0 とならず，ν_1 の最小値が 0，$\alpha<0$ では ν_1 の最小値は 0 とならず，ν_2 の最小値が 0 となることから，$\nu_1\nu_2=0$ は ν_1 と ν_2 のいずれか一方が 0 となることを意味している。Fig. 6(b) は Fig. 6(a) の薄墨で示した領域 A を拡大したものである．Fig. 6(a)，(b) に示すように $\beta=0.01$ ~ 0.05 は $\alpha=-0.05$ ~ 0.1 の範囲の 2 点で，$\beta=0.08$ ~ 0.24 は $\alpha=-0.05$ ~ 0 の範囲の 1 点で $\lambda_{vtx}=1$ となっており，$\alpha=0$ で β に関係なく $\lambda_{2D}=1$ となる 2 次元モデルとは異なる傾向が見られる。式 (36) の妥当性を確



(a) λ_{vtx} vs. α.

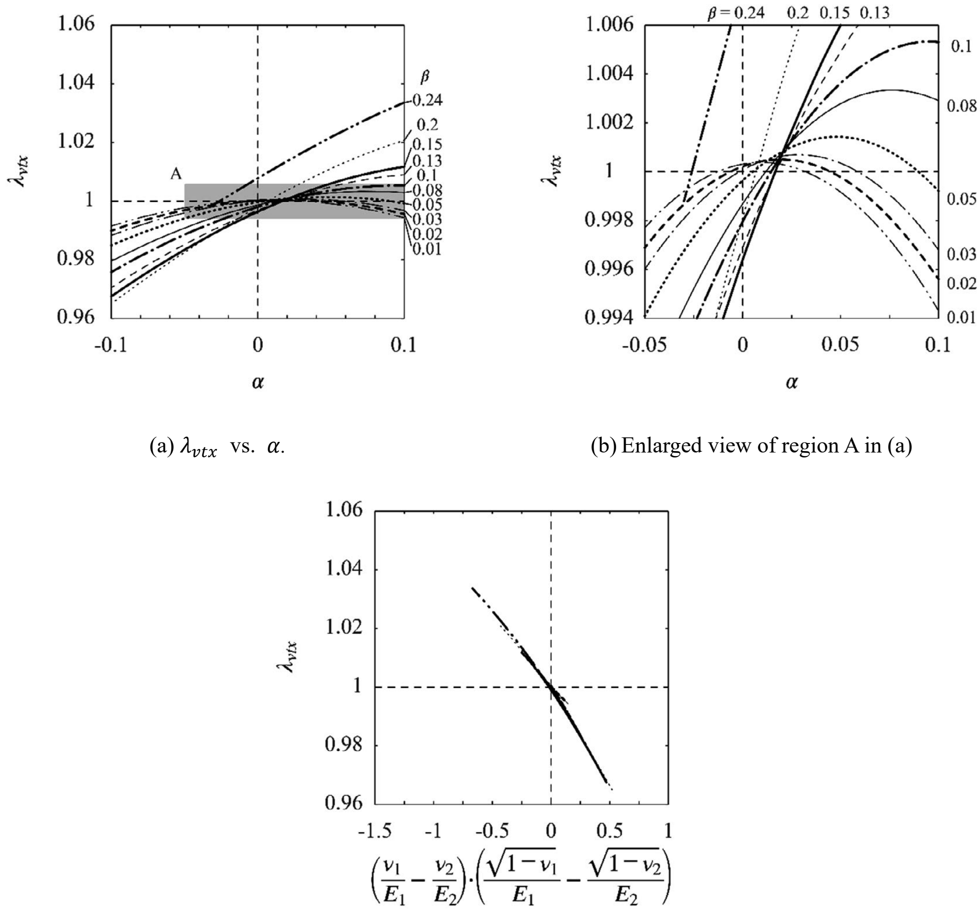


(b) Enlarged view of region A in (a)



(c) λ_{vtx} vs. $(\nu_1/E_1-\nu_2/E_2)\cdot(\sqrt{1-\nu_1}/E_1-\sqrt{1-\nu_2}/E_2)$.

Fig. 6 Singular indexes λ_{vtx} within the range of $-0.1\leq\alpha\leq0.1$ under $\nu_1\nu_2=0$



(a) λ_{vtx} vs. α.

(b) Enlarged view of region A in (a)

(c) λ_{vtx} vs. $(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) \cdot \left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1 - \sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$.

Fig. 7 Singular indexes λ_{vtx} within the range of $-0.1 \leq \alpha \leq 0.1$ under $\nu_1 = 0.499$

認するため，Fig. 6(c) に Fig. 6(a) の λ_{vtx} を $(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) \cdot \left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1 - \sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$ で整理した結果を示す。$(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) \cdot \left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1 - \sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$ の値が正で $\lambda_{vtx} < 1$，0 で $\lambda_{vtx} = 1$，負で $\lambda_{vtx} > 1$ となっている。

Fig. 7 に β を 0.01 から 0.24 まで変化させながら求めた $-0.1 \leq \alpha \leq 0.1$，$\nu_1 = 0.499$ での λ_{vtx} を示す。Fig. 7(b) は Fig. 7(a) の薄墨で示した領域 A を拡大したものである。Fig. 7(a)，(b) に示すように $\beta = 0.01 \sim 0.05$ は 2 点で，$\beta = 0.08 \sim 0.24$1 点で $\lambda_{vtx} = 1$ となっており，$\alpha = 0$ であれば $\lambda_{2D} = 1$ となる 2 次元モデルとは異なる傾向が見られる。式 (36) の妥当性を確認するため，Fig. 7(a) の λ_{vtx} を $(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) \cdot \left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1 - \sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$ で整理した結果を Fig. 7(c) に示す。$(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) \cdot \left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1 - \sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$ の値が正で $\lambda_{vtx} < 1$，0 で $\lambda_{vtx} = 1$，負で $\lambda_{vtx} > 1$ となっている。

Fig. 8 に Fig. 6 および Fig. 7 の解析結果で $\lambda_{vtx} = 1$ となる (α, β) を示す。丸印は Fig. 6，三角印は Fig. 7 の (α, β) である。$\nu_1 \nu_2 = 0$ の条件の下に式 (36) の Equal pair を満足させながら E_2/E_1，ν_1 および ν_2 を種々に変化させて求めた (α, β) を破線で示す。同様に $\nu_1 = 0.499$ の条件の下に求めた (α, β) を一点鎖線で示す。わずかにずれが見られるが，破線は丸印，一点鎖線は三角印と概ね一致している。

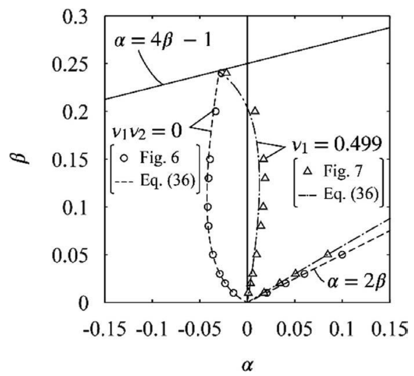
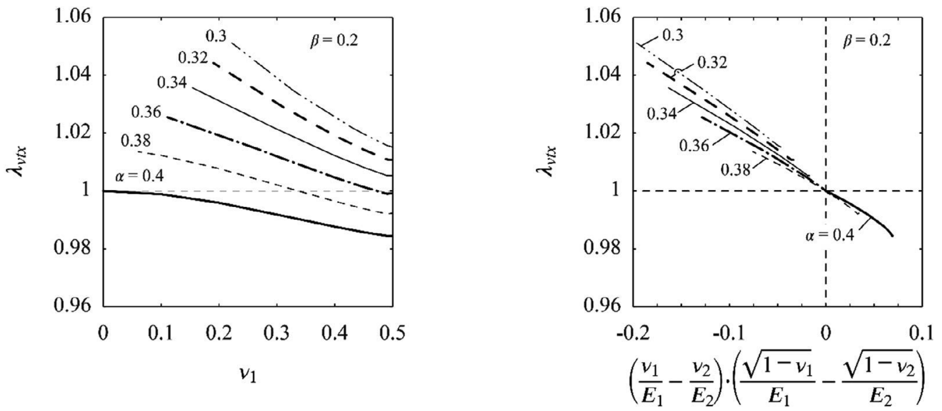


Fig. 8 Combination of α and β yielding $\lambda_{vtx} = 1$ under $\nu_1 \nu_2 = 0$ and $\nu_1 = 0.499$

次に，$\alpha = 2\beta$ 付近での式 (36) の妥当性を検討する。例として Fig. 9 に β を 0.2 に固定し，α を 0.3 から 0.4 まで変化させながら求めた λ_{vtx} を示す。Fig. 9(a) に示すように $\alpha = 0.36$，0.38 および 0.4 で，1 点で $\lambda_{vtx} = 1$ となっているのが確認される。式 (36) の妥当性を確認するため，Fig. 9(a) の λ_{vtx} を $(\nu_1/E_1 - \nu_2/E_2) \cdot \left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1 - \sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$ で整理した結果を



(a) λ_{vtx} vs. α.　　(b) λ_{vtx} vs. $(\nu_1/E_1-\nu_2/E_2)\cdot\left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1-\sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$.

Fig. 9　Singular indexes λ_{vtx} within the range of $-0.1 \le \alpha(\alpha-2\beta) \le 0$ under $\beta = 0.2$

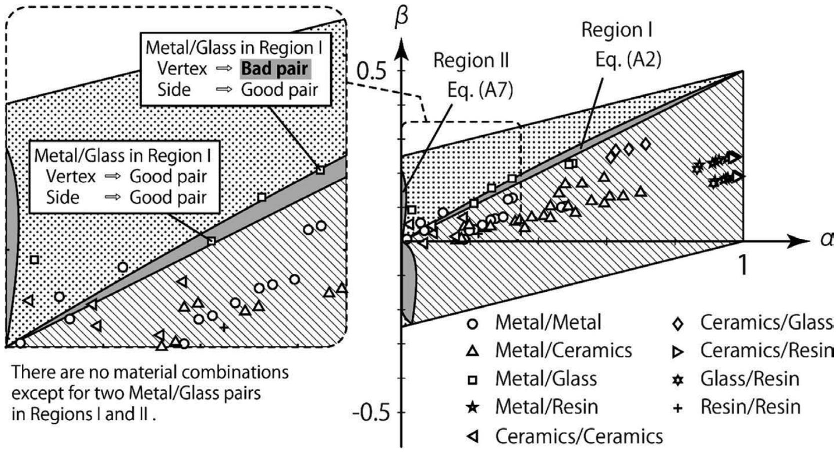


Fig. 10　Dundurs' parameters for several engineering materials[21] on (α, β) map in Fig. 5

Fig. 9(b) に示す。$(\nu_1/E_1-\nu_2/E_2)\cdot\left(\sqrt{1-\nu_1}/E_1-\sqrt{1-\nu_2}/E_2\right)$ の値が正で $\lambda_{vtx}<1$，0 で $\lambda_{vtx}=1$，負で $\lambda_{vtx}>1$ となっている。

以上の結果より，本判別式 (36) の妥当性が示された。界面端角部と直線部での特異性の出現・消失条件は，式 (8) と式 (36) を比べてわかるように異なる。そのため，特異性が界面端角部のみに出現し，2 次元モデルでは危険側の評価がなされる材料組み合わせが存在する。そこで以下では，代表的な実材料 [21]（金属，セラミックス，ガラス，樹脂）を用いて，界面端角部で Bad pair，直線部で Good pair となる材料組み合わせの存在について議論する。Fig. 10 に実材料を種々に組み合わせて得た (α, β) を示す。金属／金属，セラミックス／セラミックス，金属／セラミックスの一部を除いてほぼすべての点が 2 次元モデルでの Bad pair 領域［領域 III，IV を含む $\alpha(\alpha-2\beta)>0$ を満たす領域］および領域 I に分布しているのが見て取れる。領域 I および II に分布すると界面端角部で Bad pair，直線部で Good pair となる可能性があることから，本研究では領域 I および II に注目し，それらの領域に分布する点について確認を行った。その結果，領域 I には 2 組だけ分布する点が見られたが，領域 II には分布する点は見られなかった。領域 I に分布する 2 組はいずれも金属／ガラスであり，一方の組み合わせでは Good pair であった。もう一方の組み合わせでは Bad pair であったが，3 章で述べた FEM に基づく固有値解析で λ_{vtx} の値を調べたところ，$\lambda_{vtx}=0.9996$ と特異性は非常に弱く，界面端角部にはほぼ一様な応力場が形成されることが確認された。したがって，2 次元モデルを用いて接着強度の評価を行っても実用上の問題はないと言える。

パワー半導体向けの実装部の設計・開発には，機械的負荷および環境温度やジュール発熱による熱負荷に対して十分な考慮がなされた手法が求められる [22]。例えば，熱応力が繰返し作用する場合には疲労が想定され，FEM による熱－応力連成解析が取り入れられた設計・開発手法が提案されている [23]。高集積化・微細化によって構造寸法が小さくなると，構成部材の変形拘束が強くなり，母材よりも界面での破壊が起こりやすくなる [24]。界面端部には材料組み

合わせによって特異応力が生じることになるが，その場合のはく離強度の評価にはFEM解析で算出された応力よりも特異応力場の強さ K_σ の方が適していることが明らかになっている[13)〜16), 24〜26)]。そこで本論文では，最も基本的な形状である突合わせ継手の特異応力場の出現・消失条件について検討した。また，3次元モデルの界面端角部での特異応力場の出現・消失を判別できる簡便式を提案した。これらの結果は，はく離強度の評価に適したモデルの選択決定を容易にし，解析負担の軽減，設計・開発期間の短縮に繋がることが期待される。

6. 結　言

本研究では，角柱状突合わせ継手（3次元BJモデル）の界面端角部で応力特異性が出現するBad pair条件を議論した。特異応力場の存在領域を使用に便利な形式で表現した上で，その妥当性を確認した。具体的にはFEMに基づいた固有値解析で3次元BJモデルの界面端角部の特異性指数 λ_{vtx} および直線部の特異性指数 λ_{side} を調べて比較，検討した。得られた結論をまとめると，以下のようになる。

(1) 3次元BJモデルの界面端角部で応力特異性が出現・消滅する材料組み合わせを明らかにし，界面端角部のみに特異性が生じることがある領域，直線部のみに特異性が生じる領域，直線部に特異性が生じるが，角部にも生じることがある領域を (α, β) マップで明示した。

(2) (α, β) マップ上の $\alpha=0$ 付近および $\alpha=2\beta$ 付近では，2次元モデルのGood pair条件 $\alpha(\alpha-2\beta)<0$ を満足しても材料組み合わせによって界面端角部のみに特異性が生じるような領域が存在する。しかしながら，その領域は小さく，2次元モデルを想定して接着強度の評価を行っても実用上の問題はないことがわかった。

(3) 3次元BJモデルの界面端角部での応力特異性を判別する簡単な式を提案し，その妥当性を数値的に確認した。

(4) λ_{side} は2次元モデルの特異性指数 λ_{2D} と等しく，$\lambda_{side}=\lambda_{2D}$ となることが確認された。したがって，λ_{side} はDundursの複合材料パラメータで支配され，特異性の消失は $\alpha(\alpha-2\beta)$ の値で判断される。

（2019.7.11- 受理）

文　献

1) 大聖泰弘：“次世代自動車に関する将来展望—電動化の進展を見据えて—，”精密工学会誌，Vol. **84**, No. 9, pp. 755–760, 2018

2) 材料技術委員会：“特集／エレクトロニクス実装技術の現状と展望，車載用半導体センサとその実装技術，”エレクトロニクス実装学会誌，Vol. **18**, No. 1, pp. 2–6, 2015

3) 野村　徹：“自動車用センサの技術動向，”表面技術，Vol. **67**, No. 12, pp. 628–632, 2016

4) 中村真也：“リードフレームパッケージ用封止材の信頼性向上技術，”日立化成テクニカルリポート，Vol. **59**, pp. 16–17, 2016

5) 材料技術委員会：“特集／エレクトロニクス実装技術の現状と展望，最近の実装材料における信頼性解析技術課題，”エレクトロニクス実装学会誌，Vol. **20**, No. 1, pp. 20–23, 2017

6) 陳　玳珩：“固有関数展開法による接合角部の応力特異性の解析，”日本機械学会論文集A編，Vol. **65**, No. 635, pp. 1437–1444, 1999

7) D. B. Bogy: “Edge-bonded dissimilar orthogonal elastic wedges under normal and shear loading,” Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. **35**, pp. 460–466, 1968

8) D. B. Bogy: “Two edge-bonded elastic wedges of different and wedge angles under surface tractions,” Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. **38**, pp. 377–386, 1971

9) S. S. Pageau, P. F. Joseph, and S. B. Jr. Biggers: “The order of stress singularities for bonded and disbonded three-material junctions,” International Journal of Solids and Structures, Vol. **31**, No. 21, pp. 2979–2997, 1994

10) S. S. Pageau and S. B. Jr. Biggers: “Finite element evaluation of free-edge singular stress fields in anisotropic materials,” International Journal of Numerical Method in Engineering, Vol. **38**, No. 13, pp. 2225–2239, 1995

11) 古口日出男，村本　隆，井原郁夫：“角部を有する三次元異材接合体の応力特異性，”日本機械学会論文集A編，Vol. **64**, No. 618, pp. 480–487, 1998

12) Y. Suzuki: “Adhesive tensile strengths of scarf and butt joints of steel plates (Relation between adhesive layer thicknesses and adhesive strengths of joints),” JSME International Journal, Vol. **30**, No. 265, pp. 1042–1051, 1987

13) 野田尚昭，任　飛，高木　怜，坪井健二，佐野義一，高瀬康，宮崎達二郎：“特異応力場の強さの2次元解析に基づく接着強度評価の妥当性，”エレクトロニクス実装学会誌，Vol. **21**, No. 4, pp. 299–310, 2018

14) 宮崎達二郎，井上卓真，野田尚昭，佐野義一：“3次元異材接合体の界面端角部に生じる特異応力場の簡便で効率的な評価法について，”日本機械学会論文集，Vol. **84**, No. 864, DOI: 10.1299/transjsme.18-00013, 2018

15) Y. Zhang, N.-A. Noda, P. Wu, and M. Duan: “A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints,” International Journal of Adhesion and adhesives, Vol. **57**, pp. 105–117, 2015

16) Y. Zhang, N.-A. Noda, P. Wu, and M. Duan: “Corrigendum to “A mesh-independent technique to evaluate stress singularities in adhesive joints” [International Journal of Adhesion and adhesives, Vol. **57**, pp. 105–117, 2015],”International Journal of Adhesion

and adhesives, Vol. **60**, p. 130, 2015

17) J. Dundurs: "Discussion of edge-bonded dissimilar orthotropic elastic wedges under normal and shear loading," Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. **36**, pp. 650–652, 1969

18) 結城良治，許　金泉："三次元異材継手・異材界面き裂のBEM解析，" 日本機械学会論文集A編，Vol. **58**, No. 545, pp. 39–47, 1992

19) 井岡誠司，増田敬二，久保司郎："異種接合材への中間層挿入による自由縁応力特異性の消失に関する理論的および数値的検討，" 日本機械学会論文集A編，Vol. **71**, No. 703, pp. 536–542, 2005

20) 杉原正顕，室田一雄："数値計算法の数理，" 岩波書店，pp. 240–245, 2003

21) 結城良治，許　金泉，劉　金橋："異材接合材の界面端応力特異性の解析，" 生産研究，Vol. **44**, No. 4, pp. 206–210, 1992

22) 三浦英生："パワーエレクトロニクス製品の実装信頼性評価技術の現状と課題，" エレクトロニクス実装学会誌，Vol. **15**, No. 5, pp. 395–339, 2012

23) 廣畑賢治，久野勝美，高橋浩之，向井　稔，川上　崇，青木秀夫，高橋邦明："半導体パッケージ実装構造の熱—応力連成解析によるはんだ接合部の信頼性設計法，" エレクトロニクス実装学会誌，Vol. **9**, No. 5, pp. 405–412, 2006

24) 澁谷忠弘，"異種材料接合端部のはく離発生強度の破壊力学的評価と電子デバイスへの適用，" エレクトロニクス実装学会誌，Vol. **7**, No. 7, pp. 639–644, 2004

25) 服部敏雄，坂田荘司，初田俊雄，村上　元："応力特異場パラメータを用いた接着界面強度評価，" 日本機械学会論文集A編，Vol. **54**, No. 499, pp. 597–603, 1988

26) 北村隆行，平方寛之，井辻隆志："ナノ領域が支配するCu薄膜の界面端はく離強度特性，" 日本機械学会論文集A編，Vol. **68**, No. 665, pp. 119–125, 2002

付録：領域I～IVの導出

式(25)のEqual pair条件をαおよびβで書き直し，Fig. 5の領域Iを数値的に導く。式(9)に式(25)を代入し，変形すると，ν_2はαおよびν_1の陽関数で得られる。また，式(10)に式(25)を代入すると，βはν_1およびν_2の関数で表される。αおよびν_1の関数で表されたν_2を代入し，αおよびν_1の関数に書き換えたβを$\beta=\beta^*(\alpha,\nu_1)$とすると，それは次式のようになる。

$$\beta^*(\alpha,\nu_1)=\frac{1+\nu_1^2+\left(5-7\nu_1^2\right)\alpha-\sqrt{\left(1+\nu_1^2\right)^2(1+\alpha)^2-16\nu_1^2\alpha}}{8\left(1-\nu_1^2\right)}$$

$$\text{when}\quad \frac{\nu_1}{E_1}=\frac{\nu_2}{E_2} \tag{A1}$$

αを固定してν_1を0から0.5まで変化させると，α＝一定の下で$\beta=\beta^*(\alpha,\nu_1)$は$\beta=\beta^*(\alpha,0)$から$\beta=\beta^*(\alpha,0.5)$まで単調に増加するので，領域Iは次式で表される。

$$0\le\alpha\le1\quad\text{and}\quad\beta^*(\alpha,0)\le\beta\le\beta^*(\alpha,0.5) \tag{A2}$$

ここで，$\beta=\beta^*(\alpha,0)$および$\beta=\beta^*(\alpha,0.5)$はそれぞれ次のように与えられる。

$$\beta^*(\alpha,0)=\frac{\alpha}{2} \tag{A3}$$

$$\beta^*(\alpha,0.5)=\frac{5+13\alpha-\sqrt{25-14\alpha+25\alpha^2}}{24} \tag{A4}$$

領域II～IVについても，領域Iと同様に導くことができる。式(9)，(10)および(35)を用い，αおよびν_1の関数で書き表したβを$\beta=\beta_i^{**}(\alpha,\nu_1)$（$i$＝1，2）とすると，それは次式のようになる。

$$\beta_i^{**}(\alpha,\nu_1)=\alpha+\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\nu_1}-\frac{2A}{k(1+A)}\left(A-\sqrt{4A^2-k}\right)$$

$$\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\arccos B+\frac{2\pi}{3}i\right)\quad\text{when}\quad\frac{\sqrt{1-\nu_1}}{E_1}=\frac{\sqrt{1-\nu_2}}{E_2} \tag{A5}$$

$$k=3(1-\nu_1)(1+\nu_1)^2,\ A=\frac{1-\alpha}{1+\alpha},\ B=-\frac{128A^4-48kA^2+3k^2}{16A\left(4A^2-k\right)^{3/2}} \tag{A6}$$

αを固定し，ν_1を0.5から減少させていくと，α＝一定の下で$\beta=\beta_2^{**}(\alpha,\nu_1)$は$\beta=\beta_2^{**}(\alpha,0.5)$から単調増加し，$\beta=\beta_1^{**}(\alpha,\nu_1)$は$\beta=\beta_1^{**}(\alpha,0.5)$から単調減少する。そして，$\nu_1$がある値$\nu_{10}$に至り，式(A6)の$B$がその上限値の1に達すると，$\beta=\beta_1^{**}(\alpha,\nu_{10})=\beta_2^{**}(\alpha,\nu_{10})$となる。したがって，領域IIは次式で表される。

$$0\le\alpha\le\frac{16-9\sqrt{3}}{16+9\sqrt{3}}\quad\text{and}\quad\beta_2^{**}(\alpha,0.5)\le\beta\le\beta_1^{**}(\alpha,0.5) \tag{A7}$$

ここで，$\beta=\beta_i^{**}(\alpha,0.5)$（$i$＝1，2）は次式で与えられる。

$$\beta_i^{**}(\alpha,0.5)=\frac{2\sqrt{2}}{27}\cdot\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\sqrt{5\alpha^2-118\alpha+5}$$

$$\cdot\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left\{\frac{11\alpha^4-24020\alpha^3+83010\alpha^2-24020\alpha+11}{32\sqrt{2}(1-\alpha)\left(5\alpha^2-118\alpha+5\right)^{3/2}}\right\}+\frac{\pi}{3}(2i-1)\right]$$

$$+\frac{11\alpha^2+86\alpha+11}{54(1+\alpha)} \tag{A8}$$

αを固定し，ν_1を0から増加させていくと，α＝一定の下で$\beta=\beta_2^{**}(\alpha,\nu_1)$は$\beta=\beta_2^{**}(\alpha,0)$から単調増加し，$\beta=\beta_1^{**}(\alpha,\nu_1)$は$\beta=\beta_1^{**}(\alpha,0)$から単調減少する。そして，$\nu_1$がある値$\nu_{11}$に至り，式(A6)の$B$がその上限値の1に達すると，$\beta=\beta_1^{**}(\alpha,\nu_{11})=\beta_2^{**}(\alpha,\nu_{11})$となる。しかしながら，$0\le\alpha\le\left(3-2\sqrt{2}\right)/\left(3+2\sqrt{2}\right)$の範囲では，$(\alpha,\beta,\nu_1)=\left(\alpha,\beta_1^{**}(\alpha,0),0\right)$の組み合わせで得られる$\nu_2$は0.5よりも大きくなる。$\nu_2=0.5$で式(35)を満たす$\beta$は，式(A8)において材料1と2を入換え，$(\alpha,\beta)$を$(-\alpha,-\beta)$，$\nu_1$を$\nu_2=0.5$とすることで，$\beta=-\beta_1^{**}(-\alpha,0.5)$のように得られる。したがって，$\alpha$＝一定

の下で $\beta=\beta_2^{**}(\alpha, v_1)$ は $\beta=\beta_2^{**}(\alpha, 0)$ から単調増加するが，$0\le\alpha\le\left(3-2\sqrt{2}\right)/\left(3+2\sqrt{2}\right)$ の範囲では $\beta=-\beta_1^{**}(-\alpha, 0.5)$ から単調増加する。$\beta=\beta_1^{**}(\alpha, v_1)$ は $\beta=\beta_1^{**}(\alpha, 0)$ から単調減少し，$v_1=v_{11}$ で $\beta=\beta_1^{**}(\alpha, v_{11})=\beta_2^{**}(\alpha, v_{11})$ となるので，領域 III は次式で表される。

$$\left.\begin{array}{lll} 0\le\alpha\le\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} & \text{and} & -\beta_1^{**}(-\alpha, 0.5)\le\beta\le\beta_1^{**}(\alpha, 0) \\ \dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\le\alpha\le\dfrac{8-3\sqrt{6}}{8+3\sqrt{6}} & \text{and} & \beta_2^{**}(\alpha, 0)\le\beta\le\beta_1^{**}(\alpha, 0) \end{array}\right\} \tag{A9}$$

ここで，$\beta=\beta_i^{**}(\alpha, 0)$（$i=1$，2）は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\beta_i^{**}(\alpha, 0)=&\frac{\alpha}{2}+\frac{1-\alpha}{3(1+\alpha)}\sqrt{\alpha^2-14\alpha+1}\\ &\cdot\cos\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{3}\arccos\left\{\dfrac{11\alpha^4-404\alpha^3+1218\alpha^2-404\alpha+11}{16(1-\alpha)\left(\alpha^2-14\alpha+1\right)^{3/2}}\right\}\\ +\dfrac{\pi}{3}(2i-1)\end{array}\right]\\ &-\frac{\alpha^2-14\alpha+1}{12(1+\alpha)}\end{aligned} \tag{A10}$$

領域 IV は，次式で表される。

$$0\le\alpha\le\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} \quad \text{and} \quad -\frac{1-\alpha}{4}\le\beta\le-\beta_1^{**}(-\alpha, 0.5) \tag{A11}$$

著者紹介

宮﨑達二郎（みやざき　たつじろう）
2003 年九州大学大学院機械科学専攻博士後期課程修了，博士（工学）。同年琉球大学工学部講師。05 年助教授，07 年准教授，19 年教授。現在に至る。金属材料の疲労強度信頼性評価，疲労き裂の補修法，接着継手の強度評価に関する研究に従事。

佐藤敬介（さとう　けいすけ）
2018 年琉球大学工学部機械システム工学科卒業。現在，同大学大学院理工学研究科機械システム専攻博士前期課程在学中。異材界面端の応力特異性に関する研究に従事。

藤原敬宏（ふじわら　たかひろ）
2019 年琉球大学工学部機械システム工学科卒業。現在，同大学大学院理工学研究科機械システム専攻博士前期課程在学中。異材界面端の応力特異性に関する研究に従事。

野田尚昭（のだ　なおあき）
1984 年九州大学大学院機械工学専攻修了，工学博士。同年九州工業大学講師，87 年助教授，03 年教授。85 年リーハイ大学客員研究員，96 年山東工業大学客座教授，03 華東交通大学兼職教授，08 年日本塑性加工学会賞論文賞，08 年山東大学客座教授，10 年河南科技大学兼職教授，10 年日本材料学会学術貢献賞，10 年素形材産業技術賞，12 年日本機械学会フェロー，15 年自動車技術会フェロー，17 年日本機械学会材料力学部門賞，18 年東北大学兼職教授。

佐野義一（さの　よしかず）
1964 年九州大学大学院機械工学専攻修士課程修了。同年，日立金属（株）若松工場に入社。02 年（株）日立金属若松技術顧問。04 年九州職業能力開発大学校特任教授，九州大学学術研究員。10 年九州工業大学支援研究員。13 年丸栄化工（株）顧問。博士（工学），技術士（金属・金属加工部門）。